$a = \frac{a_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}}, b = \frac{b_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}}, i = 1,2,\cdots,n$,则有

$$\frac{a_i^2}{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \frac{b_i^2}{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} \geq 2\frac{a_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}}\frac{b_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}},(i = 1,2,\cdots,n)$$

$a = \frac{a_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}}, b = \frac{b_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}}, i = 1,2,\cdots,n$,则有

$$\frac{a_i^2}{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \frac{b_i^2}{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} \geq 2\frac{a_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}}\frac{b_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}},(i = 1,2,\cdots,n)$$

$a = \frac{a_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}}, b = \frac{b_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}}, i = 1,2,\cdots,n$,则有

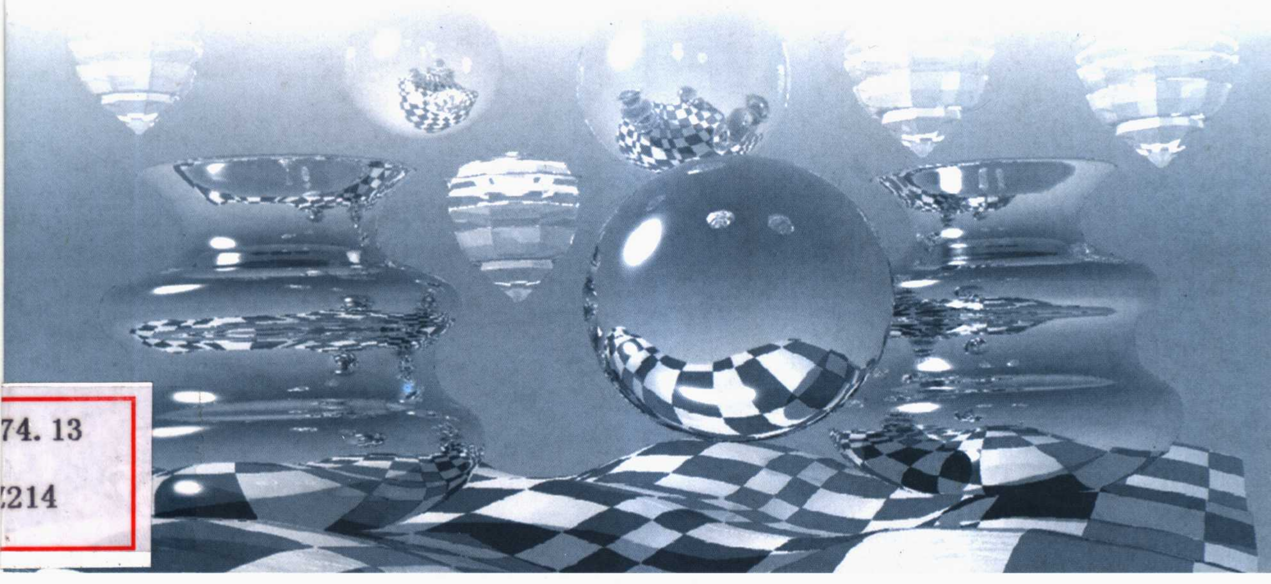
$$\frac{a_i^2}{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \frac{b_i^2}{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} \geq 2\frac{a_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}}\frac{b_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}},(i = 1,2,\cdots,n)$$

几何凸函数

JIHE TU HANSHU

● 张小明 著

● 安徽大学出版社



几何凸函数

张小明 著

安徽大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

几何凸函数 / 张小明著. —合肥:安徽大学出版社,
2004.6

ISBN 7-81052-855-6

Ⅰ.几...　Ⅱ.张...　Ⅲ.凸函数　Ⅳ.0174.13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 040150 号

内容摘要　几何凸函数是近几年提出的一个崭新的概念.本书是对这一课题研究成果所作的一个阶段性总结.书中先简单介绍了凸函数的几个重要性质及其应用,然后从几何凸函数的定义出发,详细介绍了几何凸函数和 Schur-几何凸函数的各种性质.并以大量的实例说明了几何凸函数这一课题的研究价值,同时也说明了几何凸函数是发现和证明不等式的一个可与凸函数媲美的强有力的工具.书末还列举了与几何凸函数有关的几个未解决的问题.

本书可供数学研究人员、大学数学系师生、中学数学教师以及数学爱好者阅读.

几何凸函数　　张小明　**著**

出版发行	安徽大学出版社 (合肥市肥西路 3 号 邮编 230039)	**印　刷**	安徽省天歌印刷厂
联系电话	编辑部 0551-5108348 发行部 0551-5107784	**开　本**	787×960　1/16
电子信箱	ahdxchps@mail.hf.ah.cn	**印　张**	11.75
责任编辑	谈　菁	**字　数**	210 千
封面设计	孟献辉	**版　次**	2004 年 6 月第 1 版
		印　次	2004 年 6 月第 1 次印刷

ISBN 7-81052-855-6/O·41　　**定价　22.00 元**

序

张小明先生写了一本有用的书，我很乐意为其做序.

本书将关于凸函数的控制不等式的理论和方法，平行地推广到几何凸函数上，用一种统一的模式推导一些已知的不等式，同时也能建立一些新的不等式. 凸函数与几何凸函数在定义上是平行的，在应用上各有千秋，一个不等式有时用凸函数的性质来证明比较简单一些，有时则反之；同样，在构建一个新的不等式时，用凸函数获得的结果有时要强些，有时则用几何凸函数获得到的结果较强. 书中还对几个经典不等式做出简证或推广，这些都说明了几何凸函数的研究价值.

至于凸函数与几何凸函数的关系，用专业术语来讲不叫“同构”，应该称为“共轭”. 若 $f(x)$ 是凸函数则 $g(x) = \log(f(\exp(x)))$ 是几何凸函数，这样的关系叫做共轭，因为 log 和 exp 互为反函数.

既然每个几何凸函数一定与某个凸函数共轭，是否就没有必要引进几何凸函数这个概念了？还不能这么说. 有人开玩笑说：你们数学家的功夫都花在证明两个本来相同的东西是相等的. 这虽然是一句调侃的话，但数学家们为了研究和应用的方便，的确引进了不少相互等价的新概念，并在似乎互相平行的路径上进行探索. 而这样的探索其中不少取得了有价值的成果. 自然规律包括数学规律都是客观存在的，它们本来就在那里，等待着我们去发现. 原先难于发现的某些规律，如

果引进哪怕是等价的新概念能使我们的探索更加便捷、更加容易些，我们就没有理由不这样做.

本书作者原来的研究方向是泛函微分方程，在发表多篇论文后，近期致力于不等式的研究. 此书是作者在不等式研究领域的第一本著作，我个人认为也是一本力作. 作者的科研条件是艰苦的，其刻苦钻研和敬业的精神尤其值得钦佩. 相信本书的问世将会促进我国在几何凸函数和不等式领域中相关的研究和应用.

杨 路

2003 年 10 月 31 日

前 言

几何凸函数是一个与凸函数平行的概念.作为一个研究课题,它在十几年以前就已经出现并取得了初步研究成果,但作为一个概念提出却是 1992 年的事(在不知情的情况下,1998 年国内有学者也提出了这个概念).十几年过去了,有关几何凸函数的研究成果不断涌现.鉴于此,对几何凸函数的研究成果进行一次阶段性的总结,也就显得很有必要、势在必行了.本书即是作者在这方面所作的一个初步尝试.

本书力求全面反映到目前为止人们在几何凸函数方面的研究成果.大量的事实表明,几何凸函数具有凸函数同样的优点,即能够把许多已知的用不同方法得到的不等式,用一种统一的模式推导出来,是证明和推广已知不等式、发现新的不等式的一个强有力的工具;另一方面,几何凸函数与凸函数作为两个证明和发现不等式的工具来说,各有所长,不能互相替代.这两个工具具有同样的重要性,不可偏废、不能厚此薄彼.

本书的部分内容曾于 2003 年 6 月至 8 月在 http://zgbdsyjxz.nease.net 网站上公布,在中国不等式研究小组主办的内部刊物《不等式研究通讯》上发表过.书中凡从他文收录的研究成果都会以各种不同方式予以注明.除经典结论外,书中未注明的定理、推论或例题,一般都是作者首次公开面世的研究成果.

几何凸函数是一个全新的研究课题,作者自涉足这个课

题以来,就一直得到我国著名数学家、博士生导师、成都计算机科学院杨路研究员的帮助和鼓励.杨路研究员常给迷茫中的作者指明研究路线、给予研究动力,并在百忙之中为本书作序;北京联合大学的恩师石焕南教授数十次给作者寄来有关资料,以满足作者的写作要求(这是一般人难以做到的);在本书的写作过程中,湖南理工学院的萧振纲教授、徐州师范大学的张晗方教授,以及青岛职业技术学院的续铁权教授都给予了作者多次指导和不少帮助,特别是萧振纲教授还腾出宝贵的时间审阅了本书初稿,对本书的写作提出了许多建设性的意见,并作了大量的文字润色工作;作为几何凸函数的提出者之一,浙江衢州教育局教研室的李世杰老师不仅给作者提供了自己的研究成果,而且也审阅了本书初稿;西藏自治区党委组织部的刘保乾先生、重庆邮电学院的杨定华老师、浙江新昌中学的吴裕东老师、浙江电视大学海宁学院的常汉杰老师也给予了作者诸多帮助.作者在此向以上这些老师一并表示诚挚的谢意.

浙江电视大学海宁学院的领导对作者的学术研究,一贯予以精神和物质上的支持,在此也表示由衷的感谢.

由于作者偏居一隅,信息不灵,虽然本书"力求全面",但也难免挂一漏万,使有些读者在几何凸函数方面的重要研究成果没有在本书中反映出来,尚希有关读者鉴谅.另外,由于作者才疏学浅,书中难免有这样或那样的错误和不足,恳请读者不吝指教(zjzxm79@sohu.com 314400 浙江省海宁市文苑路 81 号浙江电视大学海宁学院).

作者的硕士研究生导师、安徽大学数学系郑祖庥教授一直牵挂着作者的学习和生活,谨以此书献给这位令人尊敬的老人.

张小明于海宁水月亭

2004 年 1 月 16 日

目　次

第一章　基础知识

本章介绍几个经典不等式、一些凸函数及其控制知识.其中大多数定义和定理都能在文献[1]-[5]中查到出处或证明,较复杂的证明不在这里给出.

先列举本书几个常用的记号:N 为自然数集,N_{++} 为正自然数集,R 为实数集,R_{+} 为非负实数集,R_{++} 为正实数集,R^n 为 n 维实向量空间,R^n_{+} 为 n 维非负实向量集,R^n_{++} 为 n 维正实向量集,设 $I_1,I_2,\cdots,I_n,I$ 为区间,记

$$I^n = \{(a_1,a_2,\cdots,a_n) \mid a_i \in I, i = 1,2,\cdots,n\},$$

$$I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n = \{(a_1,a_2,\cdots,a_n) \mid a_i \in I_i, i = 1,2,\cdots,n\}.$$

第一节　几个经典不等式

在本节中,将记述与本书有关的一些经典不等式.

定理 1.1　设 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in R^n_{++}$,其算术平均 $A(a)$与几何平均 $G(a)$分别设为:$A(a)=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$,$G(a)=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$,则有

$$A(a)\geq G(a),$$

等式成立当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$.

定理 1.1 称为算术-几何平均不等式,它显然与下面的定理 1.1* 是等价的.本书的第四章的第七节中,我们将给出它的一个极为简单的证明.

定理 1.1*　设 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in R^n_{++}$,则有

$$a_1^n+a_2^n+\cdots+a_n^n\geq na_1a_2\cdots a_n,$$

等式成立当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$.

定理 1.2(*Cauchy* 不等式)　设 $a_i,b_i\in R, i=1,2,\cdots,n$,则有

$$\Big(\sum_{i=1}^n a_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^n b_i^2\Big)\geq\Big(\sum_{i=1}^n a_ib_i\Big)^2,$$

等式成立当且仅当$\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\cdots=\dfrac{a_n}{b_n}$(其中当分母为 0,则分子亦为 0).

证明　如果 $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 0$ 或 $\sum_{i=1}^{n} b_i^2 = 0$，则结论显然成立；下设 $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \neq 0$ 且 $\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \neq 0$，因为对任意实数 a, b 都有

$$a^2 + b^2 \geq 2ab,$$

分别令 $a = \frac{a_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}}, b = \frac{b_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}}, i = 1, 2, \cdots, n$，则有

$$\frac{a_i^2}{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \frac{b_i^2}{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} \geq 2 \frac{a_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}} \frac{b_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}}, (i = 1, 2, \cdots, n)$$

求和即得

$$2 \geq \frac{\sum_{i=1}^{n} 2 a_i b_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2}},$$

故

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2.$$

定理 1.3（*Hölder* **不等式**）　如果 $x_i, y_i \in R_+, i = 1, 2, \cdots, n, p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$，则有

$$(x_1^p + x_2^p + \cdots + x_n^p)^{\frac{1}{p}} (y_1^q + y_2^q + \cdots + y_n^q)^{\frac{1}{q}} \geq x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n,$$

等式成立当且仅当 $\frac{x_1^p}{y_1^q} = \frac{x_2^p}{y_2^q} = \cdots = \frac{x_n^p}{y_n^q}$（其中当分母为 0，则分子亦为 0）.

杨定华先生在本书的第四章的第六节将给出一个简单的证明，**Hölder** 不等式的积分形式如下：

定理 1.4　设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是定义在 $[a, b]$ 上的非负函数，在 $[a, b]$ 上可积，且常数 $p, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$，则有

$$\left(\int_a^b f^p(x) dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b g^q(x)\right)^{\frac{1}{q}} dx \geq \int_a^b f(x) g(x) dx, \qquad (1.1)$$

等式成立当且仅当存在实数 k，使得 $f^p(x) \xlongequal{a.e} k g^q(x)$ 或 $g^q(x) \xlongequal{a.e} k f^p(x)$.

证明　对于函数 $f^p(x)$, $g^q(x)$ 和 $f(x) \cdot g(x)$ 在 $[a, b]$ 上的可积性，可由

文献[9]的第四章第二节的例 4 和例 5 得到,往证(1.1)式成立即可.

在$[a,b]$均取 $n+1$ 个分点 $x_n(i), i=0,1,\cdots,n$,使得 $a=x_n(0)<x_n(1)<\cdots<x_n(n)=b$,在$[x_n(i),x_n(i+1)]$上任取点 $\zeta_n(i), i=1,2,\cdots,n$,记 $\Delta_n=\max\{x_n(i+1)-x_n(i), i=1,2,\cdots,n\}=\frac{b-a}{n}$,且当 $n\to+\infty$时,$\Delta_n\to 0$,则有

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{b-a}{n}f^p(\zeta_n(i))\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{b-a}{n}g^q(\zeta_n(i))\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$=\frac{b-a}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}f^p(\zeta_n(i))\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}g^q(\zeta_n(i))\right)^{\frac{1}{q}},$$

由定理 1.3 知

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{b-a}{n}f^p(\zeta_n(i))\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{b-a}{n}g^q(\zeta_n(i))\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\geq\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f(\zeta_n(i))g(\zeta_n(i)),$$

令 $n\to+\infty$,由定积分定义即知

$$\left(\int_a^b f^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b g^q(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}\geq\int_a^b f(x)g(x)dx.$$

推论 1.1 设 $f(x)$是定义在$[a,b]$上且取值为正的可积函数,则有

$$\int_a^b f(x)dx\cdot\int_a^b\frac{1}{f(x)}dx\geq(b-a)^2. \tag{1.2}$$

证明 函数$\frac{1}{f(x)}$在$[a,b]$上的可积性,可参考文献[9]的第四章第二节的例 5 而得到.在定理 1.4 中,令 $p=q=2$,用$\sqrt{f(x)}$代入 $f(x)$,用$\frac{1}{\sqrt{f(x)}}$代入 $g(x)$,整理即可得推论(1.2)式.

定理 1.5 (*Jensen* 不等式) 设 ϕ 是$[\alpha,\beta]$上的凸函数,函数 f 和 p 在$[a,b]$上可积,$\alpha\leq f(x)\leq\beta$, $p(x)\geq 0$, $x\in[a,b]$且 $\int_a^b p(x)dx=1$,则有

$$\phi\left(\int_a^b p(x)f(x)dx\right)\leq\int_a^b p(x)\phi(f(x))dx.$$

第二节 凸集与凸函数

定义 2.1 设集合 $H\subseteq R^n$,如果任取 $x,y\in H$, $a\in[0,1]$,都有 $ax+(1-a)y\in H$,则称 H 为凸集.

定理 2.1 设集合 $H\subseteq R^n$ 是闭的，则 H 为凸集的充分必要条件是：对任意 $x,y\in H$，都有 $\frac{x+y}{2}\in H$.

证明 必要性，任取 $x,y\in H$，在定义 2.1 中取 $a=\frac{1}{2}$ 即可.

充分性，若对任意 $x,y\in H$，有 $\frac{x+y}{2}\in H$，以 $\frac{x+y}{2}$ 代 x，或以 $\frac{x+y}{2}$ 代 y，分别整理，有

$$\frac{x+3y}{4}\in H, \tag{2.1}$$

$$\frac{3x+y}{4}\in H, \tag{2.2}$$

在(2.1)式和 (2.2)式中，以 $\frac{x+y}{2}$ 代 x，得两个不等式，左边 x 的系数为 $\frac{1}{8}$ 和 $\frac{3}{8}$；以 $\frac{x+y}{2}$ 代 y，又得两个不等式，左边 x 的系数为 $\frac{5}{8}$ 和 $\frac{7}{8}$；依此类推，x 的系数可为 $\frac{1}{2^n},\frac{3}{2^n},\cdots,\frac{2^{n-1}-1}{2^n}$，此时相应 y 的系数可为 $1-\frac{1}{2^n},1-\frac{3}{2^n},\cdots,1-\frac{2^{n-1}-1}{2^n}$；据对称性，$y$ 的系数可为 $\frac{1}{2^n},\frac{3}{2^n},\cdots,\frac{2^{n-1}-1}{2^n}$，相应 x 的系数为 $1-\frac{1}{2^n},1-\frac{3}{2^n},\cdots,1-\frac{2^{n-1}-1}{2^n}$. 这样当 $n\to+\infty$ 时，以上所有式子左边 x 的系数集合在[0,1]中稠密，又因 $H\subseteq R^n$ 是闭集，由此即知定理 2.1 成立.

凸集有一个很直观的特征：连结点集内的任两点的线段都在这个点集内.

定义 2.2 设 $H\subseteq R^n$ 为凸集，函数 $\phi:H\to R$，任取 $x,y\in H$，

(i) 如果 $\phi(\frac{x+y}{2})\leq\frac{1}{2}\phi(x)+\frac{1}{2}\phi(y)$ 恒成立，则称 ϕ 在 H 上为凸函数.

(ii) 如果 $\phi(\frac{x+y}{2})\geq\frac{1}{2}\phi(x)+\frac{1}{2}\phi(y)$ 恒成立，则称 ϕ 在 H 上为凹函数.

显然如果 ϕ 是凸函数，则 $-\phi$ 是凹函数，因此往下只需讨论凸函数即可，所有关于凸函数的不等式反向即得凹函数的相应不等式.

定理 2.2 设 $H\subseteq R^n$ 为凸集，函数 $\phi:H\to R$ 连续，任取 $x,y\in H$，$a\in[0,1]$，则 ϕ 在 H 上为凸函数当且仅当

$$\phi(ax+(1-a)y)\leq a\phi(x)+(1-a)\phi(y).$$

恒成立.

证明 因

$$\phi(\frac{x+y}{2}) \leq \frac{1}{2}\phi(x) + \frac{1}{2}\phi(y), \tag{2.3}$$

对任取 $x, y \in H$ 都成立,在(2.3)式中,以$\frac{x+y}{2}$代 x,或以$\frac{x+y}{2}$代 y,则分别有

$$\phi(\frac{x+3y}{4}) \leq \frac{1}{4}\phi(x) + \frac{3}{4}\phi(y), \tag{2.4}$$

$$\phi(\frac{3x+y}{4}) \leq \frac{3}{4}\phi(x) + \frac{1}{4}\phi(y), \tag{2.5}$$

这称第一组代换;对于(2.4)式和 (2.5)式,以$\frac{x+y}{2}$代 x,得两个不等式,右边 $\phi(x)$的系数$\frac{1}{8}$,$\frac{3}{8}$,以$\frac{x+y}{2}$代 y,又得两个不等式,右边 $\phi(x)$的系数为$\frac{5}{8}$,$\frac{7}{8}$,这称第二组代换,…,当进行第 $n-1$ 组代换时,共有 2^{n-1}个不等式,x处用$\frac{x+y}{2}$代入时,第 $n-2$ 组代换中的不等式的右边 $\phi(x)$的系数各除以 2 后,成为了第 $n-1$ 组代换中的不等式的右边 $\phi(x)$的系数,分别是$\frac{1}{2^n}$,$\frac{3}{2^n}$,…,$\frac{2^{n-1}-1}{2^n}$,另外,以$\frac{x+y}{2}$代 y 时,根据对称性,右边 $\phi(y)$的系数分别是$\frac{1}{2^n}$,$\frac{3}{2^n}$,…,$\frac{2^{n-1}-1}{2^n}$,$\phi(x)$的系数分别为 $1-\frac{1}{2^n}$,$1-\frac{3}{2^n}$,…,$1-\frac{2^{n-1}-1}{2^n}$,即 $\phi(x)$的系数全部为$\frac{1}{2^n}$,$\frac{3}{2^n}$,…,$\frac{2^n-1}{2^n}$,当 $n \to +\infty$时,以上所有不等式右边 $\phi(x)$的系数集合在$[0,1]$中稠密,根据函数 ϕ 的连续性,即知定理 2.2 成立.

定理 2.3 设函数 ϕ 在开区间 $I \subseteq R$ 上二次可微,则 ϕ 在 I 上为凸函数当且仅当 $\phi''(t) \geq 0$ 对 $t \in I$ 恒成立.

设集合 $H \subseteq R^n$,函数 $\phi: H \to R$,记

$$L(x) = \begin{pmatrix} \phi''_{11} & \phi''_{12} & \cdots & \phi''_{1n} \\ \phi''_{21} & \phi''_{22} & \cdots & \phi''_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi''_{n1} & \phi''_{n2} & \cdots & \phi''_{nn} \end{pmatrix}.$$

定理 2.4 设 $H\subseteq R^n$ 为开凸集，ϕ 在 H 上二次可微，则 ϕ 在 H 上为凸函数当且仅当 $L(x)$ 在 H 上半正定.

定理 2.5 设 $H\subseteq R^n$ 为凸集，函数 $\phi: H\to R$ 连续，则 ϕ 为 H 上的凸函数当且仅当对任意 $x^{(i)}\in H,\lambda_i>0,i=1,2,\cdots,m$，当 $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i=1$ 时，恒有

$$\phi(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i x^{(i)})\leq\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\phi(x^{(i)}).\tag{2.6}$$

(2.6)式就是著名的 ***Jensen*** 不等式.

定理 2.6 设 $H\subseteq R^n$ 为凸集，函数 $\phi: H\to R$ 连续，则 ϕ 为 H 上的凸函数当且仅当对任意 $x^{(i)}\in H,i=1,2,\cdots m$，恒有

$$\phi(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}x^{(i)})\leq\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\phi(x^{(i)}).\tag{2.7}$$

定理 2.7 定义在区间 $[a,b]$ 上的连续函数 f 为凸函数的充分必要条件是：对于 $[a,b]$ 中任意 $x_1<x_2<x_3$，恒有

$$\begin{vmatrix} x_1 & f(x_1) & 1\\ x_2 & f(x_2) & 1\\ x_3 & f(x_3) & 1\end{vmatrix}\geq 0.\tag{2.8}$$

定理 2.8 若一个凸函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，则

(ⅰ) f 在 (a,b) 上处处有单侧导数.

(ⅱ) 对于任意 $x\in(a,b)$，恒有 $f'_-(x)\leq f'_+(x)$.

第三节 实向量的控制

定义 3.1 设向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R^n$，$x_{[1]},x_{[2]},\cdots,x_{[n]}$ 表示 x 中分量的递减重排，若对于 $x,y\in R^n$，有

$$\sum_{i=1}^{k}x_{[i]}\geq\sum_{i=1}^{k}y_{[i]},k=1,2,\cdots,n-1,$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_{[i]}=\sum_{i=1}^{n}y_{[i]},$$

则称 x 控制 y，记为 $x\succ y$.

例 1 设 $x=(\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{4})$，$y=(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$，则 x,y 的重排分别为 $(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4})$ 和 $(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$，因有

$$\frac{1}{2} \geq \frac{1}{3},$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4} \geq \frac{1}{3}+\frac{1}{3},$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3},$$

成立,所以 $x \succ y$.

定理 3.1　设向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R^n$, $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in R^n$, 用 $x_{(1)},x_{(2)},\cdots,x_{(n)}$ 表示 x 中分量的递增重排,则

$$(x_{[1]}+y_{[1]},\cdots,x_{[n]}+y_{[n]}) \succ (x_1+y_1,\cdots,x_n+y_n)$$
$$\succ (x_{[1]}+y_{(1)},\cdots,x_{[n]}+y_{(n)}).$$

定义 3.2　对单位矩阵作一次交换任意二行的行变换,所得的矩阵称置换矩阵.

如 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ 为三阶置换矩阵.

定义 3.3　集合 $H\subseteq R^n$ 称为对称的,如果对于任意的 $x\in H$ 和任意的置换矩阵 G,都有 $xG\in H$.

例 2　设 $A=\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_i>0, i=1,2,3\}$,因任取$(a,b,c)\in A$,有

$$(a,b,c)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=(a,c,b)\in A,$$

$$(a,b,c)\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=(b,a,c)\in A,$$

$$(a,b,c)\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=(c,b,a)\in A,$$

所以 A 为 R^3 中的对称集.

定义 3.4　函数 ϕ 在对称集 H 上称为对称的,如果对于任意的 $x\in H$ 和任意的置换矩阵 G,都有 $\phi(xG)=\phi(x)$.

例 3　设 $f(x_1,x_2,x_3)=\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}+\dfrac{x_2}{x_3}+\dfrac{x_3}{x_2}+\dfrac{x_3}{x_1}+\dfrac{x_1}{x_3}$,交换任两个自变

量,函数值保持不变,所以 f 为对称函数.

定理 3.2 设集合 $H \subseteq R^n$ 为对称凸集,函数 ϕ 在 H 上为对称凸函数,则对任意 $x, y \in H$,当 $x \succ y$ 时,恒有 $\phi(x) \geq \phi(y)$.

定理 3.3 设集合 $H \subseteq R^n$ 为对称凸集,函数 ϕ 在 H 上为对称凹函数,则对任意 $x, y \in H$,当 $x \succ y$ 时,恒有 $\phi(x) \leq \phi(y)$.

例 4 设 $n \geq 2$,函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1^n + x_2^n + \cdots + x_n^n$,其中 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in R_+^n$,求证:

$$\frac{x_1^n + x_2^n + \cdots + x_n^n}{n} \geq \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)^n.$$

证明 对于 f 相对于定理 2.4 的 $L(x)$ 为

$$L(x) = \begin{pmatrix} f''_{11} & f''_{12} & \cdots & f''_{1n} \\ f''_{21} & f''_{22} & \cdots & f''_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f''_{n1} & f''_{n2} & \cdots & f''_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} n(n-1)x_1^{n-2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n(n-1)x_2^{n-2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n(n-1)x_n^{n-2} \end{pmatrix},$$

$L(x)$ 显然是为正定阵,由定理 2.4 知 f 为凸函数,又显然有

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \succ \left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}, \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}, \cdots, \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right),$$

根据定理 3.2 有

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1^n + x_2^n + \cdots + x_n^n$$

$$\geq f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}, \cdots, \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) = n\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)^n,$$

即

$$\frac{x_1^n + x_2^n + \cdots + x_n^n}{n} \geq \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)^n.$$

这个证明干净利落,正如[4]中所说的,不等式的控制证明能把许多已有的从不同方法得来的不等式,用一种统一的方法简便地推导出来,它更是推广已有的不等式、发现新的不等式的一种强有力的工具.

用控制不等式的理论和方法来证明不等式时,有时判断一个 n 元函数是 n 维凸函数是比较困难的.为此,我们引进 Schur－凸(凹)函数的概念.