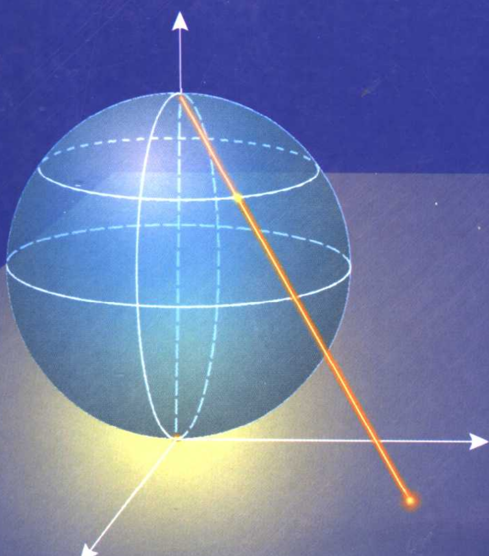
新世纪高等院校精品教材

复变函数与拉普拉斯变换
习题指导

金忆丹 编著



浙江大學出版社

复变函数与拉普拉斯变换习题指导

金忆丹　编著

浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

复变函数与拉普拉斯变换习题指导/金忆丹编著.
—杭州：浙江大学出版社，2004.8
ISBN 7-308-03812-2

Ⅰ.复... Ⅱ.金... Ⅲ.①复变函数—高等学校—教学参考资料②拉普拉斯变换—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.①O174.5②O177.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第076897号

责任编辑 陈晓嘉 白建基
出版发行 浙江大学出版社
(杭州浙大路38号 邮政编码310027)
(E-mail：zupress@mail.hz.zj.cn)
(网址：http://www.zjupress.com)
经　　销 浙江省新华书店
排　　版 杭州大漠照排印刷有限公司
印　　刷 浙江大学印刷厂
开　　本 850mm×1168mm 1/32
印　　张 9.5
字　　数 247千
版 印 次 2004年8月第1版 2004年8月第1次
印　　数 0001—3000
书　　号 ISBN 7-308-03812-2/O·314
定　　价 12.50元

编者的话

复变函数与拉普拉斯变换注[1]是工程技术中常用的数学工具，在很多高校中作为一门独立的课程开设.由浙江大学出版社出版的《复变函数与拉普拉斯变换》一书(在本书中简称参考书目[1])，由于其内容简洁，篇幅适中，并结合一些工程实际，自1988年第1版问世以来，已修订了3次，重印了12次.本书作为一本教学与习题辅导书，主要以该教材为蓝本，参考了国内外相关课程的教材，旨在帮助读者理清思路，明晰概念，提高解题能力.为此，本书从读者认知的实际过程出发，在每一章中均按照[基本要求]、[基本概念]、[思考题及解答]、[习题及解答]循序渐进地设置了模块.如在[基本要求]中，对每一章应该掌握的内容作了提纲挈领式的描述，使读者能在几百字的篇幅中对学习的目标和任务有一个明确的认识和回顾.在[基本概念]中，对该章必须了解的核心概念和知识点，通过一些精选的例题加深并拓宽了认识，至于参考书目[1]中的例题则不再重复列举.书中省略了一些超出教育部大纲要求的内容与证明注[2].[思考题及解答]不仅能帮助读者加深理解课程内容，还能为独立完成习题作一些铺陈.[习题及解答]除了介绍基本的解题方法，有的还对其他解题思路作了提示.

为了方便读者在工程技术实践中的应用，有关留数计算公式、拉氏变换公式及保角映射的一些图示等仍然作为一些简单的附表放在本书的末尾，以供参考、备查.

注[1]　拉普拉斯变换以后可简称为拉氏变换.

注[2]　本书中凡超过教学大纲的内容，均打上了“*”号(仅供需要的读者选用).

本书力求行文通顺，推理清楚透彻，希望它能成为读者学习复变函数理论与方法时的有益的补充读物.

在此要特别感谢责任编辑陈晓嘉女士.在本书的编写过程中，她自始至终给了我许多很好的建议与热情的支持；同时也衷心地感谢我的许多从事“复变函数”教学的同行，与他们经常不断地交流看法，也督促和帮助我不断地更新内容、改正谬误、精益求精.

由于作者水平有限，错误与不妥之处敬请广大读者批评指教.

编者于求是园

2004年8月

目　录

第一章　复数的预备知识 …… 1

[基本要求] …… 1

[基本概念] …… 1

[思考题及解答] …… 12

[习题及解答] …… 15

第二章　解析函数 …… 23

[基本要求] …… 23

[基本概念] …… 24

[思考题及解答] …… 39

[习题及解答] …… 44

第三章　复变函数积分 …… 59

[基本要求] …… 59

[基本概念] …… 60

[思考题及解答] …… 80

[习题及解答] …… 84

第四章　台劳(Taylor)级数与罗朗(Laurent)级数 …… 94

[基本要求] …… 94

[基本概念] …… 94

[思考题及解答] …… 114

[习题及解答] …… 120

第五章　留数 …… 135

[基本要求] …… 135

[基本概念] …………………………………………………… 136
[思考题及解答] ……………………………………………… 165
[习题及解答] ………………………………………………… 173
第六章 保角映射…………………………………………… 196
[基本要求] …………………………………………………… 196
[基本概念] …………………………………………………… 196
[思考题及解答] ……………………………………………… 221
[习题及解答] ………………………………………………… 228
第七章 拉普拉斯变换……………………………………… 250
[基本要求] …………………………………………………… 250
[基本概念] …………………………………………………… 250
[习题及解答] ………………………………………………… 261
附表Ⅰ 某些保角映射及其示意图………………………… 281
附表Ⅱ 留数公式表………………………………………… 283
附表Ⅲ 某些定积分的计算公式…………………………… 285
附表Ⅳ 拉普拉斯变换主要公式表………………………… 287
附表Ⅴ 拉普拉斯变换简表………………………………… 288
参考书目……………………………………………………… 298

第一章　复数的预备知识

【基本要求】

(1) 能根据复数的定义及复平面的建立，将复数用不同的方式(代数形式、三角函数形式、指数形式)表示出来并互相转化.

(2) 掌握复数的四则运算，了解复数的模与辐角的意义，会进行复数的乘积与商、乘幂与方根的运算，会选取适当的复数表示式简化复数的运算.

(3) 掌握扩充复平面上无穷远点(∞)的概念.

(4) 了解复平面上点集的概念(特别是光滑曲线与区域的定义)，会判断平面图形与其复数表示之间的关系.

【基本概念】

1. 复数

(1) 复数的定义与共轭复数

复数 $z = x + \mathrm{i}y$，x 和 y 为实数，i 为虚数单位，$\mathrm{i}^2 = -1$.

实部 $x = \mathrm{Re}(z)$，虚部 $y = \mathrm{Im}(z)$.

两复数相等：当且仅当它们的实部与虚部分别相等.

记复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 的共轭复数为 $\overline{z} = x - \mathrm{i}y$，它具有性质：

$$(\overline{\overline{z}}) = z;\ z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z);\ z - \overline{z} = 2\mathrm{i}\mathrm{Im}(z) \qquad (1.1)$$

(2) 模与辐角

复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的模

$$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}\geqslant 0 \tag{1.2}$$

显然有

$$|z|^2=z\overline{z},\ |\overline{z}|=|z| \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned}|y|=|\operatorname{Im}(z)|\leqslant|z|\leqslant|\operatorname{Re}(z)|+|\operatorname{Im}(z)|\\ =|x|+|y|\end{aligned} \tag{1.4}$$

$$\begin{aligned}|x|=|\operatorname{Re}(z)|\leqslant|z|\leqslant|\operatorname{Re}(z)|+|\operatorname{Im}(z)|\\ =|x|+|y|\end{aligned} \tag{1.5}$$

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2| \tag{1.6}$$

$$|z_1-z_2|\geqslant||z_1|-|z_2|| \tag{1.7}$$

例 1 利用共轭复数与模的性质证明复数的三角形不等式(1.6)：

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$$

证 $|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)}$

$$\begin{aligned}&=(z_1+z_2)(\overline{z}_1+\overline{z}_2)\\&=z_1\overline{z}_1+z_1\overline{z}_2+z_2\overline{z}_1+z_2\overline{z}_2\\&=|z_1|^2+z_1\overline{z}_2+(\overline{z_1\overline{z}_2})+|z_2|^2\\&=|z_1|^2+2\operatorname{Re}(z_1\overline{z}_2)+|z_2|^2\\&\leqslant|z_1|^2+2|z_1\overline{z}_2|+|z_2|^2\\&=|z_1|^2+2|z_1||z_2|+|z_2|^2\\&=(|z_1|+|z_2|)^2\end{aligned}$$

当 $z\neq 0$ 时，实轴正向与复数 z 所表示的向量之间的夹角

$$\theta=\operatorname{Arg}z$$

称为复数 z 的辐角，它是多值的，且有 $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$.

满足条件 $-\pi < \theta_0 \leqslant \pi$ 的辐角 θ_0 称为 $\mathrm{Arg}z$ 的主值，记为

$$\theta_0 = \arg z \quad (-\pi < \theta_0 \leqslant \pi) \tag{1.8}$$

于是

$$\mathrm{Arg}z = \arg z + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{1.9}$$

(3) 三角函数与指数表示

如果称 $z = x + \mathrm{i}y$ 为复数的代数表示形式，那么由 $x = r\cos\theta$ 与 $y = r\sin\theta$ 得复数的三角函数表示式

$$z = r\cos\theta + \mathrm{i}r\sin\theta = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \tag{1.10}$$

利用欧拉(Euler)公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$，可将复数 z 转化为指数表示式

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \tag{1.11}$$

其中 $r = |z|$，$\theta = \mathrm{Arg}z$.

复数的上述三种表示形式可互相转换，而当 $x = x + \mathrm{i}y$ 已知时转换成其他形式的关键是需要计算复数 z 的模 $|z|$ 与辐角的主值 $\theta_0 = \arg z$.

对复数 $z = x + \mathrm{i}y$，模 $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geqslant 0$. 其辐角的主值 $\arg z \in (-\pi, \pi]$ 与 $\tan\theta$ 的反正切主值 $\arctan\frac{y}{x} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 之间有如下的关系：

$$\underset{(z \neq 0)}{\arg z} = \begin{cases} \arctan\frac{y}{x}, & x > 0;\ (\text{Ⅰ、Ⅳ 象限与正实轴}) \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0,\ y > 0;\ (\text{正虚轴}) \\ \arctan\frac{y}{x} + \pi, & x < 0,\ y \geqslant 0;\ (\text{Ⅱ 象限与负实轴}) \\ \arctan\frac{y}{x} - \pi, & x < 0,\ y < 0;\ (\text{Ⅲ 象限}) \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0,\ y < 0.\ (\text{负虚轴}) \end{cases} \tag{1.12}$$

2. 复数的运算,复数的乘积与商,乘幂与方根

用代数表达式表示的两个复数 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$, $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$ 在进行加减乘除的四则运算时与两实数的四则运算并无多大区别,只需在运算过程中将 $\mathrm{i}^2 = -1$ 代入,且将实部与实部、虚部与虚部分别归并即可. 两复数的商 $\dfrac{z_1}{z_2}$ $(z_2 \neq 0)$ 的运算可先将分母实数化(即分子分母同乘以分母的共轭复数 $\bar{z}_2$) 再运算之.

利用复数的三角表达式或指数表达式来对两个复数(或多个复数)相乘或相除,特别是一个复数的乘幂与开方运算,就要简捷得多.

(1) 两个复数的乘积与商在指数形式下的运算

设 $z_1 = r_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}$, $z_2 = r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$, 则

$$z_1 z_2 = r_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1} \cdot r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2} = r_1 r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1 + \theta_2)} \tag{1.13}$$

所以有

$$|z_1 z_2| = r_1 r_2 = |z_1| |z_2| \tag{1.14}$$

$$\mathrm{Arg}(z_1 - z_2) = \mathrm{Arg}z_1 + \mathrm{Arg}z_2 \text{ ①} \tag{1.15}$$

(1.14)式说明两个复数乘积的模等于这两个复数的模的乘积.

当 $z_2 \neq 0$ 时,有

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{r_1}{r_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \tag{1.16}$$

$$\mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Arg}z_1 - \mathrm{Arg}z_2 \text{ ②} \tag{1.17}$$

(1.16)式说明两个复数的商的模等于这两个复数的模的商.

---

① 注意:该式不能写成 $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$. 而且,由于辐角的多值性,该等式应理解为对左边 $z_1 z_2$ 的辐角的任意一个值,右边必定有一个 $\mathrm{Arg}z_1 + \mathrm{Arg}z_2$ 的值与之对应,反之亦然.

② 它的意义与①类同.

(2) 复数的乘幂与方根

设 $z = re^{i\theta}$，利用公式(1.13)，可得它的 n 次幂

$$z^n = r^n \cdot e^{in\theta} = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)\ (n \geqslant 2) \tag{1.18}$$

又因为

$$z^n = [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r^n(\cos\theta + i\sin\theta)^n \tag{1.19}$$

在(1.18)与(1.19)式中取 $r = |z| = 1$ 得到棣莫佛(de Moivre)公式

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \tag{1.20}$$

从(1.18)式可知

$$|z^n| = r^n = |z|^n \tag{1.21}$$

复数的 n 次方根是复数 n 次乘幂的逆运算.

设 $z = re^{i\theta}$ 为已知复数，n 为整数，且 $n \geqslant 2$，则称满足方程

$$w^n = z$$

的所有 w 的值为 z 的 n 次方根，记为

$$w = \sqrt[n]{z} \quad 或 \quad w = z^{\frac{1}{n}}$$

设 $w = \rho e^{i\varphi}$，由 $w^n = z$ 得 $(\rho e^{i\varphi})^n = re^{i\theta}$，$\theta = \mathrm{Arg}z$. 再设 $\theta_0 = \arg z$，则有

$$\rho^n = r,\ n\varphi = \theta_0 + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

解之得

$$\rho = \sqrt[n]{r},\ \varphi = \frac{\theta_0 + 2k\pi}{n} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{1.22}$$

$$w_k = (\sqrt[n]{z})_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n}} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, n-1) \tag{1.23}$$

例 2 利用两种方法计算$(-\sqrt{3}-i)^3$.

解 (a) 用复数的代数表示式运算：

$$(-\sqrt{3}-\mathrm{i})^3=(-\sqrt{3})^3+3(-\sqrt{3})^2(-\mathrm{i})+3(-\sqrt{3})(-\mathrm{i})^2+(-\mathrm{i})^3$$

$$=-3\sqrt{3}-9\mathrm{i}+3\sqrt{3}+\mathrm{i}=-8\mathrm{i}$$

(b) 转化为指数形式运算：

因为 $|-\sqrt{3}-\mathrm{i}|=2$，

$$\arg(-\sqrt{3}-\mathrm{i})=\arctan\left(\frac{-1}{-\sqrt{3}}\right)-\pi=\frac{\pi}{6}-\pi=-\frac{5\pi}{6}$$

$$(-\sqrt{3}-\mathrm{i})^3=(2\mathrm{e}^{-\frac{5}{6}\pi\mathrm{i}})^3=8\mathrm{e}^{-\frac{15}{6}\pi\mathrm{i}}=8\cdot\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}=-8\mathrm{i}$$

显然，当幂次不是很高时用上述两种方法计算复数的乘幂，工作量的差别不大，但如果上题改为求 $(-\sqrt{3}-\mathrm{i})^{11}$ 的话，那么用方法(b)显然比用方法(a)便捷.

3. 复球面、扩充复平面与无穷远点

用三维空间中的球面投影法来引进扩充的复平面 $\overline{\mathbb{C}}$ 与无穷远点 (∞) 概念.

设 S 是三维空间中以 $(0,\ 0,\ \frac{1}{2})$ 为中心、直径为 1 的球面；$N(0,\ 0,\ 1)$ 为球的北极，$O(0,\ 0,\ 0)$ 是球的南极，复平面 $\mathbb{C}$ 与球面 S 在 O 点相切. 球面 S 上的点的坐标由 3 个实数 $(x,\ y,\ \xi)$ 确定，其中复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 被认为是点 $(x,\ y,\ 0)$，见图 1-1. 设复平面 $\mathbb{C}$ 上点 $z(x,\ y,\ 0)$，考虑三维空间中连结 z 与 S 上的北极点 N 的线段 L，则 L 与 S 的交点只有一点为 P，反之，对于 S 上的一点 P_i，就有 $\mathbb{C}$ 上的 z_i 与之对应，这就建立了复平面 $\mathbb{C}$ 与球面除 N 以外的一一对应 $z\leftrightarrow P$. 复平面上模为 1 的点

$$z=x+\mathrm{i}y,\ z\in\{z;\ x^2+y^2=1\}$$

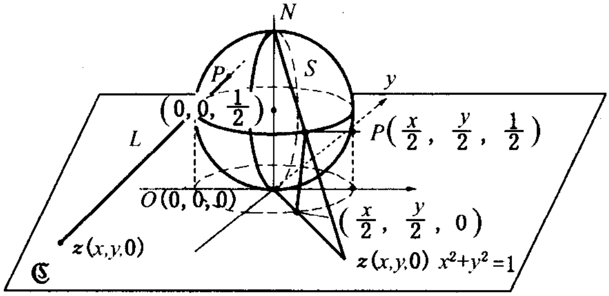


图 1-1　复球面

对应了球面 S 上的点 $P\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

设 $z = x + \mathrm{i}y$ 是模大于 1 的点，则对应的 P 点落在上半球面内，此时 P 点的竖坐标 $\xi > \frac{1}{2}$.

设 $z = x + \mathrm{i}y$ 的模小于 1，则对应的 P 点落在下半球面内，此时 P 点的竖坐标 $\xi < \frac{1}{2}$.

复数 $z = 0$ 对应了南极点 O，当 $|z| \to +\infty$ 时的 z 所对应的 $P \to N$. 复平面 $\mathbb{C}$ 上与球面 S 的北极点 N 相对应的点为无穷远点，记 $z = \infty$，它是模为 $+\infty$ 的点. 有限复平面 $\mathbb{C}$ 加上无穷远点“∞”，称为扩充的复平面. 记 $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$，与扩充复平面 $\bar{\mathbb{C}}$ 相对应的球面 S 称为复球面.

4. 复平面上的点集概念，平面图形的复数表示

(1) 曲线的概念

设 $x(t)$ 与 $y(t)$ 是实变量 t 的实值函数，它们在闭区间 $[\alpha, \beta]$ 上连续，则由方程组

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta) \tag{1.24}$$

或由定义在区间$[\alpha,\beta]$上的连续复值函数

$$z(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t) \qquad (\alpha\leqslant t\leqslant\beta) \tag{1.25}$$

所描绘的点集C,称为复平面上的一条有向曲线,(1.25)式也称为曲线C的参数表示式.

$A=z(\alpha)=x(\alpha)+\mathrm{i}y(\alpha)$为曲线$C$的起点;$B=z(\beta)=x(\beta)+\mathrm{i}y(\beta)$为曲线$C$的终点.

如果一条曲线以B为起点、A为终点,且逆着C的方向变化,则称它为C的反向曲线,记为C^-.

设$z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$与$z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$是复平面上两个给定的点,则连接z_0与z_1的直线段C的参数方程为:

$$C:z(t)=[x_0+(x_1-x_0)t]+\mathrm{i}[y_0+(y_1-y_0)t] \quad (0\leqslant t\leqslant 1)$$

或

$$C:z(t)=z_0+(z_1-z_0)t \quad (0\leqslant t\leqslant 1) \tag{1.26}$$

见图 1-2.

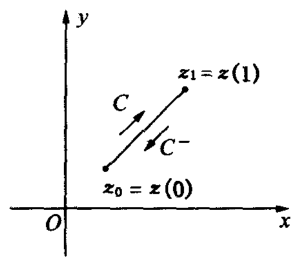


图 1-2

显然,C的逆向曲线C^-的参数方程为

$$\begin{aligned}C^-:\gamma(t)&=z_1+(z_0-z_1)t\\&=z(1-t) \quad (0\leqslant t\leqslant 1)\end{aligned} \tag{1.27}$$

一般情况下,如果曲线C的参数方程已知为

$$C:z=z(t) \quad (\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$$

则C^-的参数方程为

$$C^-:\gamma(t)=z(\alpha+\beta-t) \quad (\alpha\leqslant t\leqslant\beta) \tag{1.28}$$

如果一条曲线具有性质$z(\alpha)=z(\beta)$,则称它为闭曲线.

对于曲线C:$z(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t) \quad (\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$,当$\alpha\leqslant t_1\leqslant\beta$,$\alpha<t_2\leqslant\beta$, $t_1\neq t_2$时有$z(t_1)\neq z(t_2)$,则称C为简单曲线.(直观上

说简单曲线没有纽结)

如果曲线 C: $z(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t)\quad(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$，$x(t)$ 与 $y(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可微，且 $[x'(t)]^2+[y'(t)]^2\neq 0$，则称 C 为光滑曲线；$x(t)$ 与 $y(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 内除有限个点外可微，则称 C 为分段光滑曲线. 今后如无特别说明，曲线都是指光滑曲线或分段光滑曲线.

例 3 找出下列直线段的参数表达式：

(a) 连结原点 $z_0=0$ 到点 $z_1=1+\mathrm{i}$ 的直线段；

(b) 连结点 $z_0=2$ 到 $z_1=1+\mathrm{i}$ 的直线段.

解 (a) $z_0=0$，$z_1=1+\mathrm{i}$，由(1.26)式，

$$C_1: z(t)=z_0+(z_1-z_0)t=(1+\mathrm{i})t$$

$$(0\leqslant t\leqslant 1)\quad (\text{见图 } 1-3)$$

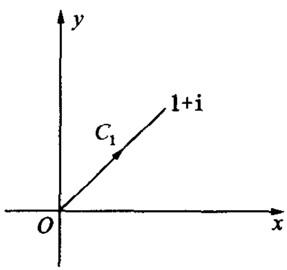


图 1 - 3

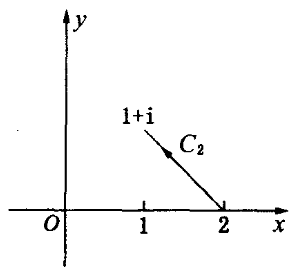


图 1 - 4

(b) $z_0=2$，$z_1=1+\mathrm{i}$，由(1.26)式，

C_2: $z(t)=2+(1+\mathrm{i}-2)t=2+(\mathrm{i}-1)t\ (0\leqslant t\leqslant 1)$ (见图 1 - 4)

例 4 找出抛物线 $y=x^2$ 上部分曲线的参数表达式：

(a) 抛物线上连结原点 $z_0=0$ 到点 $z_1=2+4\mathrm{i}$ 的曲线段；

(b) 抛物线上连结点 $1+\mathrm{i}$ 到原点的曲线段.

解 设 $x(t)=t$，$y(t)=t^2\ (-\infty<t<+\infty)$ 为抛物线 $y=x^2$ 的参数表示式，即

$$z(t)=t+t^2\mathrm{i}\quad(-\infty<t<+\infty)$$

(a) $t \in [0, 2]$: $z(0) = 0$, $z_1 = z(2) = 2 + 4\mathrm{i}$.
所以

$$C_1: z(t) = t + t^2\mathrm{i} \quad (0 \leqslant t \leqslant 2) \quad (见图 1-5)$$

(b) 设以 $z_0 = z(0) = 0$ 为起点，$z_1 = z(1) = 1 + \mathrm{i}$ 为终点的抛物线上一部分是 C_2: $z(t) = t + t^2\mathrm{i}$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$，则所求曲线即是 C_2 的逆向曲线

$$\begin{aligned} C_2^-: \gamma(t) &= z(1-t) \\ &= (1-t) + (1-t)^2\mathrm{i} \quad (0 \leqslant t \leqslant 1) \quad (见图 1-6) \end{aligned}$$

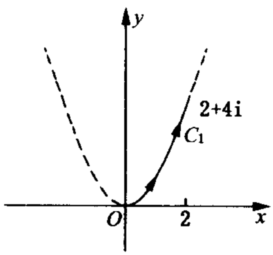


图 1-5

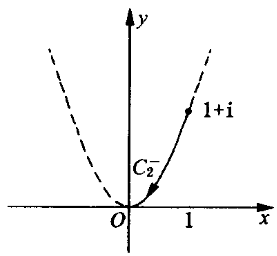


图 1-6

例 5 找出沿着圆周曲线 $|z| = R$ 的逆时针方向以 $-\mathrm{i}R$ 为起点、$\mathrm{i}R$ 为终点的曲线的参数方程.

解 C: $z(t) = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = R(\cos t + \mathrm{i}\sin t)$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$
(见图 1-7)

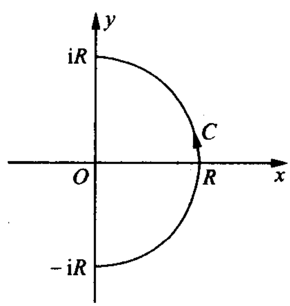


图 1-7

(2) 点 z_0 的邻域

满足 $|z - z_0| < \varepsilon$ 的所有的点的集合 $\{z;\ |z - z_0| < \varepsilon\}$ 称为 z_0 的 ε-邻域，记为

$$D(z_0, \varepsilon) = \{z;\ |z - z_0| < \varepsilon\} \quad (1.29)$$

$D(z_0, \varepsilon) \backslash \{z_0\}$ 称为 z_0 的去心邻域.