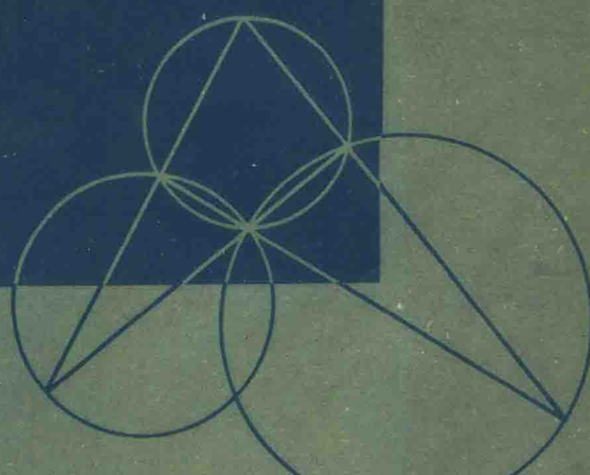
中学数学教师进修讲义

平面几何复习与研究



太原市教育学院

一九七八年九月

前　言

以英明领袖华主席为首的党中央，高举毛主席的伟大旗帜，清除“四害”，抓纲治国，我国的社会主义革命和社会主义建设进入了新的发展时期。毛主席的教育路线得到全面贯彻，无产阶级教育事业蓬勃发展。广大教师正在又红又专的大道上阔步前进，为“四个现代化”早出人才、快出人才贡献力量。

为了适应教育事业发展的新形势，提高师资水平，我们编写了《平面几何复习与研究》一书，供我市中学数学教师进修培训和教学参考之用。

全书内容分五章：第一章绪言，介绍初等几何发展的概况和近代公理体系；第二章几何命题，介绍几何命题的种类和命题的四种形式；第三章推证通法，介绍几何证题的一般方法；第四章中学几何复习，系统介绍中学几何的基本概念和定理，并在广度和深度上有一定的加宽加深；第五章证题术，分类介绍各种几何命题的具体证法。

编写本讲义时，注意了以下三点：

1． 为了邦助学员系统掌握中学教材，讲义重点放在中学几何复习上。在第四章，将中学几何的基本概念和定理按教材顺序尽量列出，并给以明确的叙述和必要的证明。概念的叙述放在每节的前面，定理的讲述也适当进行了集中，以便复习。

2.为了邦助学员掌握几何证题法和书写格式，在复习中学几何之前，介绍了推证通法，以指导复习，在其后又介绍了一些证题术作为复习的总结，各部分内容都选列了较多的例题，以作示范。

3． 为了训练学员的推理论证能力，每章节后配备有各类型的习题，数量较多，供练习选用。

本书对象是中学数学教师。内容的取材、编排和讲述上，主要考虑教师进修和提高的需要，与中学教材不完全一致，在教学参考时宜注意。

本书由我院数学教研组晚成国同志编写。

由于我们对毛主席教育思想学习不够，政治业务水平不高，编写时间仓促，讲义中一定存在不少缺点或错误，希同志们批评指正。

太原市教育学院数学教研组

一九七八年七月

目　录

一、绪　言

1　初等几何的对象

恩格斯在《反杜林论》中指出：

“和数的概念一样，形的概念也完全是从外部世界得来的，而不是在头脑中由纯粹的思维产生出来的。必须先存在具有一定形状的物体，把这些形状加以比较，然后才能构成形的概念。纯数学的对象是现实世界的空间形式和数量关系，所以是非常现实的材料。这些材料以极度抽象的形式出现，这只能在表面上掩盖它起源于外部世界的事实。但是，为了能够从纯粹的状态中研究这些形式和关系，必须使它们完全脱离自己的内容，把内容作为无关重要的东西放在一边，这样，我们就得到没有长宽高的点、没有厚度和宽度的线、……。和其他一切科学一样，数学是从人的需要中产生的，是从丈量土地和测量容积，从计算时间和制造器皿产生的。但是，正如同在其他一切思维领域中一样，从现实世界抽象出来的规律，在一定的发展阶段上就和现实世界脱离，并且作为某种独立的东西，……，纯数学也正是这样，它在以后被应用于世界，虽然它是从这个世界得来的，并且只表现世界的联系形式的一部分——正是仅仅因为这样，它才是可以应用的。”

在这段话里，恩格斯用辩证唯物主义观点批判了资产阶级唯心论和形而上学观点，对我们正确认识几何学的对象和起源问题，给了很好的启示。

几何学的对象是现实世界的空间形式，因此，几何学中的概念、定理都是客观现实的反映。现实世界的空间形式具体表现为各种物体的不同形状、大小和位置关系，所以，我们说几何学是研究物体的形状、大小和位置关系的科学。

一个物体，如果只注意它的形状和大小，不管它的其他性质，就称为几何体。一个几何体一定占有一部分空间，并且用它的表面和周围空间分开，因此，我们说面是体的界限，两个面相交就得到线，线和线相交就得到点。几何中的点、线、面、体都是从现实世界中抽象出来的概念，它们只能依附于物体而不单独存在。点具有位置而无大小，线有长短而无粗细，面有宽窄而无厚薄。体可以看成是由点、线、面组成的。

点、线、面、体或者它们的集合称为几何图形。

平面几何学是研究平面图形的性质、作法和计算的学科。

2　古代几何简史

几何学是在人类社会生产实践中产生和发展起来的，它的历史非常悠久。

伟大领袖和导师毛主席教导我们："中国是世界文明发达最早的国家之一，中国已有了将近四千年的有文字可考的历史。"我们伟大祖国在历史上对世界文化和科学的各个方面都有重大贡献，几何方面也不例外。

我国古代，由于农业和手工业的需要，劳动人民很早就知道了许多简单的几何知识。例如，石器时代（约公元前几千年）的陶器和殷周两代的青铜器上，都有精美的几何图案。战国时代的墨子（公元前480—390年）著《墨经》上说："圜，一中同长也"，给圆下了精确的定义，比西方欧几里德的定义早一百多年。我国最早的数学古书《周髀算经》和《九章算术》（成书约在公元前400年，前者更早）载有很多几何知识，其中"勾股定理"发现于公元前1100年，较希腊的毕达哥拉斯的发现早五百多年，另外，还有许多关于土地面积和物体体积的计算方法。在圆周率方面：三国时，魏人刘徽（公元263年）利用勾股定理作出割圆术，由圆内接正六边形分割到圆内接正九十六边形，求出π≈3.14，实际上已用了极限概念，南北朝时代，我国伟大数学家祖冲之（公元429—500年）算出π的值是在3.1415926和3.1415927之间，并定分数$\frac{22}{7}$为π的约率，$\frac{355}{113}$为密率。祖冲之的约率与希腊的阿基米德所得数值相同，而密率在欧洲直到1573年才为德国人鄂图所知，比祖冲之晚一千多年，这些事实说明，历史上我国人民在几何知识方面已达到很高程度。

在西方，相传几何学是在四千年以前发源于埃及。由于尼罗河每年定期泛滥，两岸田地尽被淹没，水退以后，田地界线消失，需重新测量划定，由于这种实际需要，测量田地的方法便产生了。据说，几何学就是起源于这种测地术。我们现在用"几何学"一词，原是我国明朝徐光启翻译欧儿里德《几何原本》时采用的，这个词的原意无论在英文、拉丁文或希腊文中都含有"测量土地的技术"的意思，说明上面传说具有一定的可靠性。古代埃及建有很多金字塔，工程浩大，造形精美，这些伟大建筑物证明，埃及劳动人民很早就具有丰富的几何知识。现存的世界上最早的数学书《阿梅斯手册》，是约公元前1700年的埃发人阿梅斯手抄的，里面载有很多耕地面积和仓库容积的求法以及有关金字塔的几何问题。由于希腊和埃及只地中海一水相隔，商业贸易促进文化交流，约在公元前七、八世纪，几何学便从埃及传入希腊，并得到光辉的发展，逐渐形成一门独立的科学。

古代希腊的许多数学家总结了前人的经验，进行了新的创造，对几何学的建立和发展有很大的功绩。例如：太勒斯（公元前639—549年）曾证明了等腰三角形两底角相等、对顶角相等、半圆所对圆周角为直角等定理，并根据相似形理论，用一根竹竿测得金字塔的高。毕达哥拉斯（公元前569—500年）曾证明了勾股定理、三角形内角和定理，他的学生希派斯还发现不可公度线段的存在。希波克拉特（公元前470—）曾著历史上第一部几何教科书，首先采用"反证法"，他与柏拉图（公元前429—348年）同为研究"几何三大问题"（即三等分角、化圆为方、立方倍积）的有名人。柏拉图将逻辑学的思想方法引进几何学，把几何学建立在定义、公理及论理学的基础上，并首创证题

的“分析法”。欧几里德（公元前330—275年）是古代希腊最伟大的数学家，他搜集当时所有已知的初等几何材料（包括他自已的发现）。，按着严密的逻辑系统，创造性地编成一部《几何原本》，这书对于几何学的发展和几何学的教学，都起了巨大的作用，被译成各种文字出版并流传下来，被看为几何学的唯一经典著作，为历代人们学习和研究，甚至“欧几里德”成了几何学的代名词，一直把这种体系的几何学称为“欧几里德几何学。”

3　欧几里德的《几何原本》

欧几里德的《几何原本》一书，最突出的一点是它从一些特别提出的公理、公设和定义有计划地来论证其他命题，其次是他第一次把丰富而散漫的几何材料整理成了系统严明的读本。

《几何原本》全书分十三卷（后人又续两卷），其中一至四卷和第六卷讲平面几何。第一卷讲三角形全等，三角形的边角关系，平行线理论与三角形及多角形等积的条件。第二卷讲如何把三角形变成等积的正方形，第三卷讲圆，第四卷讨论圆的内接和外切多边形，第六卷讲相似多边形理论。第五和七至十卷讲算术，最后三卷讲立体几何。

从内容看，《几何原本》包括了现在中学几何的全部内容。两千年来，它被认为是最好的初等几何教科书。我国明朝万历丁未年（1607年），由徐光启与意大利人利马窦合译前六卷，在北京出版，这是西洋数学输入我国的开端。清咸丰五年（1855年）李善兰与英人伟烈亚力又续译了后九卷。

《几何原本》虽然具有严密的系统性，但它并不是没有缺点的，它的缺点在于它的的基础部分。《几何原本》的基础是用一些定义、公设和公理来构造的，主要有下列几条：

定义：（在第一卷，共有23个）

（1）点是没有部分的。

（2）线是有长度而无宽度的。

（3）线的各端是点。

（4）直线是这样的线，它上面的点是同样地放置着的。

（5）面只有长度和宽度。

（6）面的边缘是线。

（7）平面是这样的面，它上面的直线是同样地放置着的。

（8）平面上的角度是平面上不形成一条直线的两条相交直线的互相倾斜。

（9）当形成一个角度的两条直线成一条直线时，那个角度称为平角。

接着定义了圆、圆周、圆心、三角形、四边形。最后是：

（23）平行的直线是同在一个平面上而且尽量向两侧延长也决不会相交的直线。

公设：

（1）从任意的点到另一点可以作直线。

（2）每条直线都可以无限延长。

（3）以任意一点为中心，可以用任意的长度为半径作圆。

（4）所有直角都相等。

（5）同一平面上两直线与第三直线相交，若其中一侧的两个内角之和小于二直角，则该两直线必在这一侧相交。

这最后一条就是有名的“欧几里德第五公设”，也叫“平行公设”。

公理：

（1）等于同量的量相等。　　（2）等量加等量和相等。

（3）等量减等量差相等。　　（4）不等量加等量和不等。

（5）等量的两倍仍相等。　　（6）等量的一半仍相等。

（7）能重合的量相等。　　（8）全体大于部分。

欧几里德给点、线、面都下了定义，但他用了部分、长、宽、端、边缘等概念，而没有解释。直线、平面的定义也语意模糊。用其公设、公理来推证其它命题也显得根据不足，而只能求助于直观性，例如，一直线分平面为两侧，圆与直线、圆与圆相交（在一定条件下）视为显然，严格说来，这些都是逻辑上的缺陷，但这是由于历史的局限而不能苛求于古人的。

欧几里德以后，有许多数学家想给点、直线、平面下一种更好的定义，其中有名的是阿基米德（公元前287—212年），他提出了五条公理：

（1）有公共端点的所有线中，直线最短。（图1—1）

（2）有公共端点在同一平面上的两条线，如果都是凸的，其中一条被另一条和连结端点的直线包围，则被包围的线较短。（图1—2）

（3）所有以一条平面上的曲线当作周界的面中，平面最小。（图1—3）

（4）以一条平面上的曲线，当作公共周界的两个面，如果都是凸的，而且其中一个被另一个和周界所在的平面所围住，则被包围的面较小。（1—4）

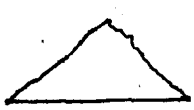


图1—1

图1—2

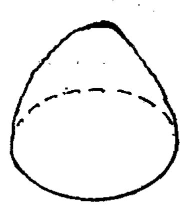


图1—3

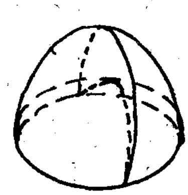


图1—4

（5）两条不等的线、两个不等的面或体，只要把可比较的量中的小的扩大到适当的倍数，便会比大的更大。即：若$a<b$，则存在自然数n，使$na>b$。

这些公理中，（1）、（3）是想给直线、平面下定义，但它用了长度、面积概念。

仍然是不严格的，但（5）对于研究直线性质（连续性）却有重要意义，这就是阿基米德公理。

欧几里德《几何原本》中的“第五公设问题”，引起后来许多学者的注意和研究，因为公设（5）比前四条公设复杂，好似一条定理，而且在《几何原本》中，用公设（5）来证明定理比较迟（到定理29），因此，人们一直想证明第五公设，而且两千年来很多的数学家都进行过这种尝试，都没有一个人成功，但却从中发现了许多和第五公设等效的命题（可以互相推证的两个命题称为等效命题）。例如：

（1）通过直线外一点，至多可以作一条平行线。（图1—5）

（2）一直线的斜线和垂线必相交。（图1—6）

（3）三角形内角和为二直角。（图1—7）

（4）存在两个相似三角形。（图1—8）

（5）任何三角形有外接圆。（图1—9）

（6）在一直线同侧与该直线等距离的三点在一直线上。（二平行线间距离处处相等）（图1—10）

（7）任意三角形的三条高线交于一点。（图1—11）

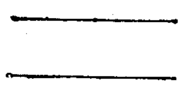


图1—5

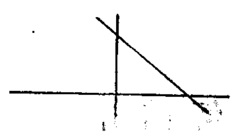


图1—6

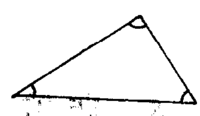


图1—7

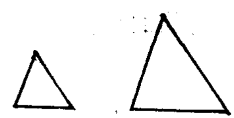


图1—8

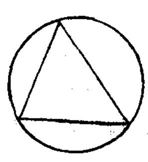


图1—9

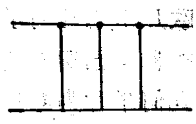


图1—10

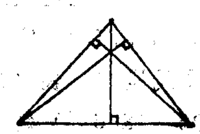


图1—11

上面的命题（1）就是普通采用的“平行公理”，下面我们来证明它和第五公设是等效的命题。

先由第五公设推导平行公理：

证明　如图 1—12，设B为直线CD外一点，作$BA\perp CD$，$BF\perp AB$。

那么，BF与CD不相交（否则与"三角形外角大于不相邻内角"矛盾）。

设BK是不同于BF的直线，则在AB的某一侧必有$\alpha+\beta<2d$，根据第五公设，BK必与CD相交，故BF是与CD不相交的唯一直线，即过B只能作一条与CD平行的直线。

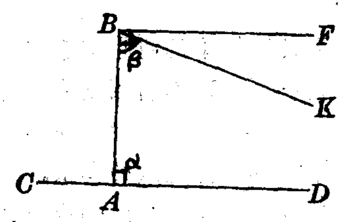


图 1—12

再由平行公里推导第五公设：

证明　如图 1—13，设BK和CD被BC所截，同旁内角和$\alpha+\beta<2d$。

过B引BF，使$\alpha'=\alpha$，则BF与CD不能相交（否则，与"三角形外角大于不相邻的内角"矛盾），根据平行公理，BF就是过B与CD平行的唯一直线。因为$\alpha'+\beta=\alpha+\beta<2d$，所以$BK$是和$BF$不同的直线，故$BK$与$CD$必相交，且交在$\alpha+\beta<2d$的一侧。（否则在另一侧有三角形两个角的和大于二直角，这是不可能的）。

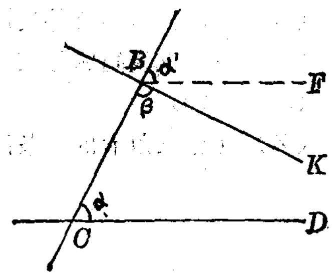


图 1—13

4　非欧几何简介

经过两千多年来许多数学家证明第五公设的失败，使人们感到这种证明工作是徒劳的，因而提出了最后的解决办法，就是：这个证明是不可能的。于是，几何学便突破了原来的限制而得到发展，产生了与欧几里德几何不同的两种几何，称为非欧几何，使人们对于现实世界的空间形式的认识，进入了一个新的阶段。

19世纪初，三个数学家：德国的高斯（1777—1855年）、匈牙利的波里埃（1802—1860年）、俄国的罗巴切夫斯基（1792—1856年），不约而同地从否定第五公设出发，建立了一种新的几何学，它被发展到和欧几里德几何学具有同样的规模而没有发现任何矛盾，由于罗氏最初发表（1826年），故称罗巴切夫斯基几何学。二十八后，德国数学家黎曼（1826—1866年）建立了另一种几何学称为黎曼几何学。由于两千多年传统思想一直认为欧氏几何是唯一可能的，因此非欧几何的思想一开始并没有获得同时代人的承认，但是非欧几何与欧氏几何在逻辑上都没有发现矛盾，特别是由于射影几何及微分几何的发展，欧氏罗氏黎氏三种几何学在更高的观点上被统一起来，深刻地揭示了事物间的辩证关系，这样，便彻底推翻了认为欧氏几何是唯一可能的空间形式这种形而上学的看法。现在，非欧几何在天体物理学和原子物理学上都得到了应用。

欧氏、罗氏、黎氏三种几何学有其相同的部分，例如，等腰三角形两底角相等、全等三角形三个判定定理（sss、sas、asa）、三角形三个角的平分线交于一点、三条中线交于一点等，都是他们共有的定理，这共同的部分一般称为绝对几何。三种几何主要不同之点在于引进了不同的平行公理，由此便导出很多不同的结论。现举例列表如下：

	欧 氏 几 何	罗 氏 几 何	黎 氏 几 何
平 行 公 理	过直线外一点只可作一条平行线	过直线外一点可作两条平行线	同一平面内任二直线必相交
三角形的内角和	等于二直角	小于二直角	大于二直角
三角形的面积	与内角和无关	与角欠（二直角减去三内角和）成正比	与角余（三内角和减去二直角）成正比
平行线间的距离	二平行线间距离处处相等	二平行线在平行方向无限接近在相反方向无限远离	
三角形的三边中垂线	交于一点	或交于一点或三线平行或三线离散	交于一点
两个三角形若三对对应角各各相等	两三角形的三对对应边成比例（两三角形相似）	两三角形全等	两三角形全等

非欧几何的一些结论与欧氏几何不同，它们是否可以在图形上实现呢？法国数学家潘加来（1854—1912年），建立了一种在欧氏平面上的罗氏几何模型。

取平面上一直线a，规定：

罗氏点：上半平面的点。

罗氏无限远点：a上的点。

罗氏直线：上半平面内，圆心在a上的半圆或与a垂直的射线。

罗氏角：两半圆在交点的切线夹角，一半圆与一垂直于a的半直线在交点的切线与半直线的交角，垂直于a的二半直线的交角（此时二直线平行）。

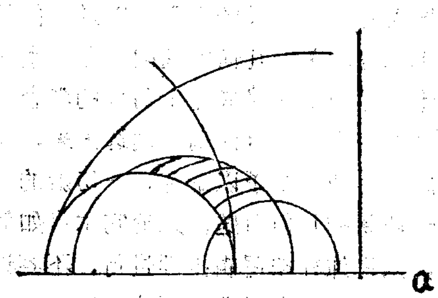


图 1—14

根据欧氏几何的定理，可以得到罗氏几何的结论。与欧氏几何相同的如：

（1）过两点可作一直线。

（2）两直线最多有一个交点。

与欧氏几何不同的如：

（1）三角形三内角之和小于二直角。

（2）罗氏平行公理：过直线外一点至少可以作两直线与此直线不相交，（或交于无限远点）。

这样便在欧氏平面上找到了罗氏几何的模型，如果欧氏几何没有矛盾的话，罗氏几何也不会有矛盾，反过来，如果罗氏几何有矛盾就会反映在欧氏几何中，这就说明，罗氏几何与欧氏几何一样在逻辑上都是没有矛盾的。

下面我们介绍在球面上的黎氏几何模型（半球面模型）。

取一个球面作为黎氏平面。规定：

黎氏点：球面上的点（直径两端算作同一个点）。

黎氏直线：球面上的大圆（大圆上的直径两端算作同一个点）。

黎氏角：两大圆的平面夹角。

根据欧氏几何的球面性质，有黎氏几何的结论。

与欧氏几何相同的如：

（1）过两点可以作一直线。

（2）两直线相交的交点只有一个。

与欧氏几何不同的如：

（1）三角形三内角和大于二直角。

（2）黎氏平行公理：同一平面内任二直线必相交。

（3）任一直线不能把黎氏平面分成两个不同区域（黎氏平面的单侧性）。

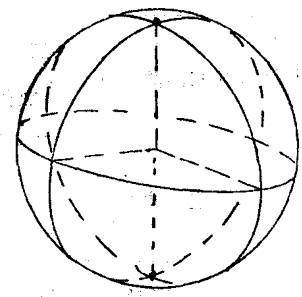


图1—15

5 希尔伯特公理体系

罗氏几何与欧氏的出现，以及它们的无矛盾性的证明，进一步要求彻底整理几何学的逻辑基础。关于几何的基础问题，也即公理体系的产生以及公理体系所起的作用，是到了十九世纪末才建成完全明确的观念。近代公理法要求在建立几何学时，必须把一些无定义的基本概念（元词）挑选出来，而这些概念相互间的关系则在一些不加证明的基本命题（公理）中予以确定，一切新的概念一定要用基本概念或已有定义的概念来下定义，一切新的几何命题，无论它本身如何明显都需要加以证明。这就是说，在建立几何学时，只许纯粹按逻辑推理进行，不容许凭其直观而加以承认，而要满足这种要求，就需要给几何学建立稳固的理论基础。

人们在尝试证明欧几里德第五公设的长期研究过程中，给几何基础积累了丰富的公理资料，在此基础上，德国数学家希尔伯特（1862—1943年）于1899年发表《几何基础》一书，提出了一套完善的几何公理体系，用纯粹逻辑推理方法来建立欧几里德几何

学，这种工作不仅使欧氏几何的基础不再残缺，同时使罗氏几何、黎氏几何也获得了牢固基础。他还提出公理体系的无矛盾性、独立性和完备性三个基本要求，从而使几何基础问题的到最后的解决。

希尔伯特公理体系列表如下：

- 希尔伯特公理体系
  - 元词
    - 元名
      - 点
      - 直线
      - 平面
    - 元谊
      - 结合关系
        - 点在直线上（直线通过点）
        - 点在平面上（平面通过点）
      - 顺序关系：一点介于两点之间
      - 合同关系
        - 两线段相等
        - 两角相等
  - 公理
    - 结合公理（I_1—I_8）
    - 顺序公理（II_1—II_4）
    - 合同公理（III_1—III_5）
    - 平行公理（IV）
    - 连续公理（V_1—V_2）

下面分别介绍五组公理：

Ⅰ.结合公理

I_1.通过不同两点的直线必定存在。（图1—16甲）

I_2.通过不同两点的直线至多有一条。（图1—16乙）

I_3.在每一直线上至少有两点，至少有三点不同在一直线上。（图1—17）

（以上属于平面几何）

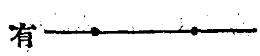


图1—16（甲）

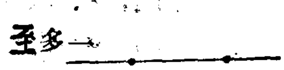


图1—16（乙）

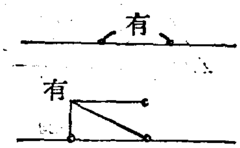


图1—17

I_4.通过不同在一直线上的三点的平面必定存在，在每一平面上至少有一点。（图1—18）

I_5.通过不同在一直线上的三点的平面至多有一个。（图1—19）

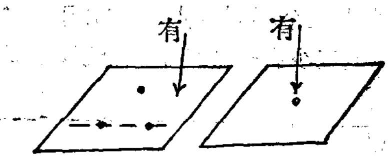


图1—18

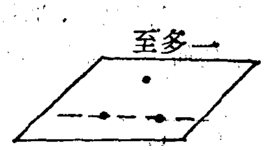


图1—19

Ⅰ$_6$.若一直线有不同两点在某平面上，则该直线全在这平面上。(直线上的所有点在平面上，叫做直线在平面上)。(图1—20)

Ⅰ$_7$.若两平面有一个公共点，则它们至少还有另一个公共点。(图1—21)

Ⅰ$_8$.至少有四点不在同一平面上。(图1—22)

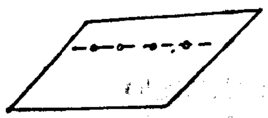


图1—20

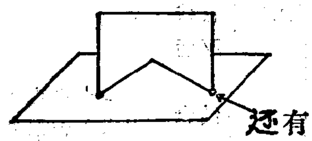


图1—21

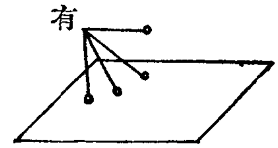


图1—22

用这组公理可推证以下定理：

(1)两条直线至多有一个公共点。

(2)两个平面若有一个公共点，则有一条公共直线。

证明：设两平面α、β有一公共点A，由Ⅰ$_7$，还有公共点B，由Ⅰ$_1$、Ⅰ$_2$，AB决定一直线a，由Ⅰ$_6$直线a由α、β的公共点组成。设α、β还有公共点C，不在α上，由Ⅰ$_4$、Ⅰ$_5$有A、B、C决定一平面，于是α、β是同一平面，故不存在C，即α、β的公共点全在a上，即α、β有一条公共直线。

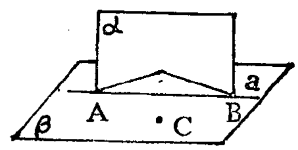


图1—23

(3)每个平面上至少有三个点。

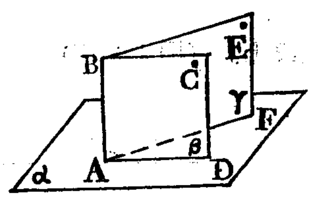


图1—24

证明：设给定平面α。

由Ⅰ$_4$，α上有点A，

由Ⅰ$_8$，α外有点B。

由Ⅰ$_3$，直线AB外有点C。

由Ⅰ$_4$，A、B、C决定一平面β，β与α有公共点A。

由Ⅰ$_7$，α与β还有公共点D(可能C即D)。

由Ⅰ$_8$，β外有点E。

由Ⅰ$_4$，过A、B、E有平面γ，且γ与β不同(∵E在β外)。

由Ⅰ$_7$，γ与α还有公共点F，据Ⅰ$_6$，F不在AB上(否则B在AF上)。

∵D、F不在AB上，∴D、F不是β、γ的公共点，故D、F是不同两点。

∴α上有三个不同点A、D、F。

Ⅱ.顺序公理

Ⅱ$_1$.若B介于A、C之间，则A、B、C是一直线上三个不同的点，且B介于C、A之间。

Ⅱ$_2$.对于任何不同的A、B两点，在直线AB上至少有一点C，使B介于A、C之间。

图1—25

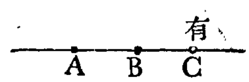


图1—26

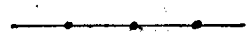


图1—27

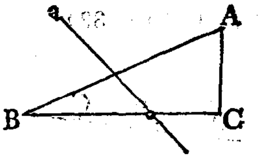


图1—28

II_3.在一直线上任何不同的三点中，至多有一点介于其余两点之间。（图1—27）

II_4.（巴士公理）设A、B、C是不同在一直线上的三点，a是平面ABC上的一直线，它不通过A、B、C中任何一点。若a有一点介于A和B之间，则a还有一点介于A和C或B和C之间。（图1—28）

（巴士1843—1930年德国数学家）

定理：已知A和C两点，则直线AC上至少有一点D介于A、C之间。

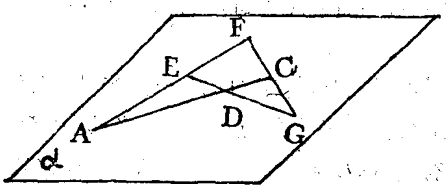


图1—29

证明：由I_3，直线AC外有点E。

由I_4，A、C、E决定一平面α。

由II_2，直线AE上有点F，使E介于AF之间。直线FC上有点G，使C介于F、G之间。

由I_6，G在平面α上，于是直线EG截ΔAFC的一边AF于E。

由II_4，直线EG应与AC或FC相交，但直线EG不能与FC相交（否则，EG与FG重合，点E就落在重合线上，A也在重合线上，即E、A、C三点在一直线上，与I_3矛盾），故直线EG与AC交于内点D，即AC上存在D，使D介于A、C之间。

Ⅲ.合同公理

有了"介于……之间"这个概念和顺序公理，就可以导出一些结论，从而定义下列各个概念了：

线段——介于A、B两点之间有无限多个点，这些点的集合或说直线上两点之间的部分叫做线段，记作线段AB，A、B叫做线段的端点，端点不属于线段。（图1—30）

射线——设O和A是直线a上的两点，则a上还有无限多个点X，使O不介于AX之间，

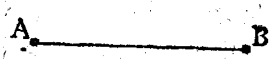


图1—30

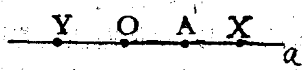


图1—31

又有无限多个点Y使O介于A和Y之间，则X点的集合与Y点的集合各叫做一条射线。或说，直线上某点一旁的部分叫做射线。O叫原点。（图1—31）

角——一点及从该点发出的两条半直线的总体叫做一个角。

平角——如果一点及该点发出的两条半直线恰好形成一直线，这个角叫做平角。

线段的相等和角的相等（或合同）都是不加定义的基本关系，它们满足下列公理Ⅲ：

III_1. 设AB是给定的线段，$A'X'$是自A'点发出的一条半线，则在$A'X'$上有且仅有一

点B'，使得线段$AB=A'B'$。对于每条线段AB，都有$AB=BA$。（图1—32）

Ⅲ$_2$．如果线段$A'B'=AB$ 且$A''B''=AB$，则$A'B'=A''B''$。（图1—33）

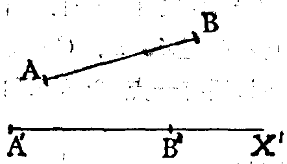


图1—32

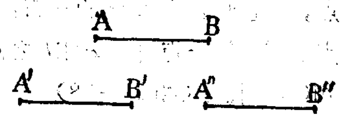


图1—33

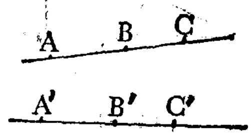


图1—34

Ⅲ$_3$．设B点介于A和C两点之间，B'点介于A'和C'两点之间，若线段$AB=A'B'$且$BC=B'C'$，则$AC=A'C'$。（图1—34）

Ⅲ$_4$．设$\angle XOY$是给定的一个非平角的角，$O'X'$是自O'点发出的一条半线，λ'是自$O'X'$所在的直线伸出的一个半面，则在λ'上有且仅有一条自O'点发出的半线$O'Y'$，使得$\angle XOY=\angle X'O'Y'$，对于每个角$\angle XOY$，都有$\angle XOY=\angle XOY$和$\angle XOY=\angle YOX$。（图1—35）

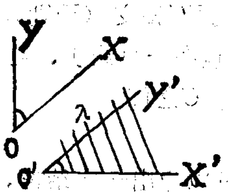


图1—35

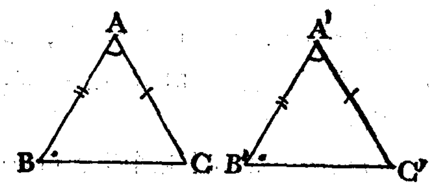


图1—36

Ⅲ$_5$．设A、B、C是不同在一直线上的三点，A'、B'、C'也是不同在一直线上的三点，若线段$AB=A'B'$，$AC=A'C'$且$\angle BAC=\angle B'A'C'$，则$\angle ABC=\angle A'B'C'$。（图1—36）

由这些公理可以推证线段相等或角相等关系具有反身性（甲＝甲）、对称性（若甲＝乙，则乙＝甲）和传递性（若甲＝乙，乙＝丙，则甲＝丙）。又可建立线段或角的大于、小于，加法以及图形的变位等等概念。

Ⅳ．平行公理

英国数学家普雷非耳（1748—1819年）用下面的公理代替欧凡里德第五公设。

Ⅳ．通过不在已知直线上的一点至多可以引一条与该已知直线平行的直线。（图1—37）

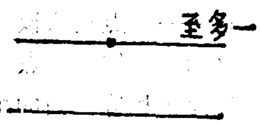


图1—37

Ⅴ．连续公理

假设有同在一直线上的n个不同的点A_1、A_2、……A_n，当$i<j<k$时，A_j介于A_i、A_k之间，我们就说n个点排成$\{A_1A_2\cdots\cdots A_n\}$的顺序。

V_1. 或不容尺公理（阿基米德公理）

设AB和CD是给定的两线段，且$AB>CD$，则在半线AB上存在有限个点A_1，A_2，……A_n，合于下列条件：

（1）诸点A_i（$i=1，2，3……n$）排成$\{A_1A_2A_3……A_n\}$的顺序；

（2）线段$AA_1=A_1A_2=……=A_{n-1}A_n=CD$；

（3）B点介于A和A_n之间。（图1—38）

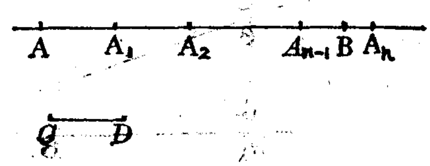


图1—38

这个公理通常表述成：给定线段$AB>CD$之后，必定存在正整数m，使得$mCD\leqslant AB<(m+1)CD$。

V_2. 康托公理

设在直线a上给了无限个线段A_iB_i（$i=0、1、2…n…$），其中线段$A_{i+1}B_{i+1}$的点全属于A_iB_i，假若无论给出怎样小的线段PQ，在该串线段中，总有线段A_KB_K小于PQ，那么在直线a上有且仅有一点C属于该串线段的每个线段，或是其中某些线段的端点。（图1—39）

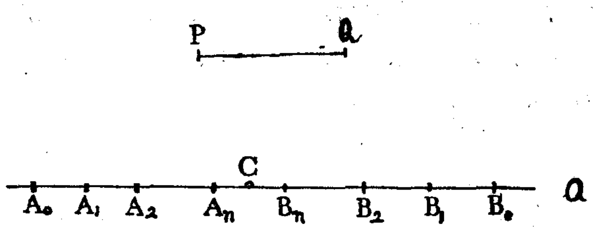


图1—39

希尔伯特还证明了这套公理体系是无矛盾的、独立的、完备的。在这套公理基础上纯粹用逻辑推理方法，足可以建立系统严明的欧几里德几何学。但要完成这件工作却是一件相当繁重的任务，这是属于《几何基础》课的任务，在此就不介绍了。

习 题 一

1.证明：不同两直线至多有一个公共点。

2.证明：一直线和不在它上面的一点确定一个平面。

3.根据公理I_{1-2}，十个点最多可以确定几条直线？

4.试给“线段”、“半直线”、“半面”、“角”下严格的定义。

5.试证“一直线的垂线和斜线必相交”与第五公设等效。

证明：先证“$\Longleftarrow$”。

设AB与CD是直线AC的垂线和斜线，那末，在AC的某一旁，有同旁内角和$\alpha+\beta<2d$，根据第五公设，AB与CD必相交。（图(一)）

再证“$\Longrightarrow$”。

设AB与CD被直线AC所截，同旁内角和$\alpha+\beta<2d$。