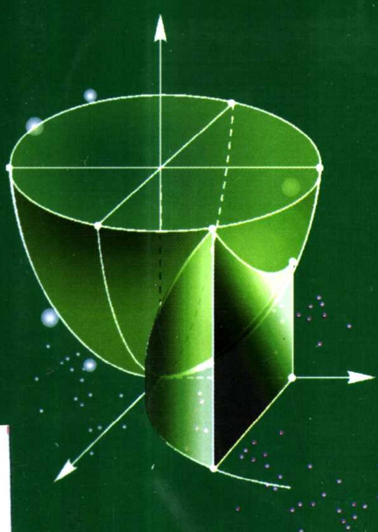
（与盛骤、吴迪光、张光天编《高等数学》配套）

盛骤 吴迪光 编

《高等数学》学习指导与题解



浙江大學出版社

《高等数学》学习指导与题解

（与盛骤、吴迪光、张光天编《高等数学》配套）

盛　骤　吴迪光　编

浙江大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

《高等数学》学习指导与题解 / 盛骤，吴迪光编 .
杭州：浙江大学出版社，2004.4
ISBN 7-308-03612-X

Ⅰ.高... Ⅱ.①盛...②吴... Ⅲ.高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 012221 号

责任编辑 李玲如
出版发行 浙江大学出版社
(杭州浙大路 38 号 邮政编码 310027)
(E-mail：zupress@mail.hz.zj.cn)
(网址：http://www.zjupress.com)
排　　版 浙江大学出版社电脑排版中心
印　　刷 浙江大学印刷厂
开　　本 850mm×1168mm 1/32
印　　张 11.75
字　　数 395 千字
版　　次 2004 年 4 月第 1 版
印　　次 2004 年 4 月第 1 次印刷
印　　数 0001—5000
书　　号 ISBN 7-308-03612-X/O・307
定　　价 18.00 元

前　　言

本书是盛骤、吴迪光、张光天所编的《高等数学》(第四版)(浙江大学出版社 2004 年 3 月出版)(以下简称《教材》)配套的指导教材.

本书旨在帮助读者掌握高等数学的基本内容和解题方法,以期读者提高学习效率.

全书共十二章,内容包括一元函数的微分学和积分学,多元函数的微分学和积分学、向量代数与空间解析几何、微分方程和无穷级数、傅里叶级数.每章包括四个部分:1.内容提要　旨在便于读者提纲挈领地掌握课程内容. 2.例题　帮助读者掌握解题步骤与方法,指出易犯的错误并究其原因,澄清不正确的想法、做法,帮助读者加深对于基本概念的理解,提高解题的正确率. 3.练习题　题量不多,但覆盖了全部基本内容.通过解这些练习题,使读者熟悉基本解题方法. 4.《教材》习题题解　对《教材》中的部分习题做了题解.

我们期望通过我们对例题和习题的解题示范,使读者对于如何着手解题,如何思考有所启发,通过对本书的学习能提高读者的解题能力,加深对基本内容的理解和掌握.

关于题解,我们希望读者先自行思考,自己解题,然后与题解对照,如果自己不动手去做题,只是照抄,那是无益的。

本书适宜于学习高等数学课程的读者使用,也可供参加高等数学远程教育和网络课程学习的读者使用,或作为专升本复习迎考的参考书。

我们诚恳希望读者提出意见。

编　者

2004 年 1 月

目　　录

第一章　函　数

一、内容提要

1. 函数概念

设 A 是非空的实数集，若存在一个法则，按照它，对于每一个实数 $x \in A$，都有确定的实数 y 与之对应，则称 **y 是 x 的函数**，记为

$$y = f(x), \quad x \in A$$

实数集 A 叫做函数的**定义域**，x 叫**自变量**，y 也叫**因变量**，y 与 x 的对应关系叫做**函数关系**.

在我们所讨论的函数中，若对于自变量在定义域中的每一个值，函数只有一个确定值与之对应，这种函数叫做**单值函数**. 如果多于一个值与之对应，叫做**多值函数**. 对多值函数的情形，可化成两个或两个以上的单值函数来讨论.

在实际问题中，函数的定义域要根据问题的实际意义来确定，但在数学上作一般讨论时，函数的定义域就约定为使数学表达式有意义的自变量的取值范围，称它为**自然定义域**，简称**定义域**.

函数 $y = f(x)$ 在 $x = a \in A$ 处的值记为 $f(a)$，简称**函数值**，有时也用记号 $y|_{x=a}$ 来表示. 对于函数 $y = f(x)$ 定义域中每一个 x 的值都有 y 的确定的值与之对应，所有这些 y 值所成的集合叫做函数 $y = f(x)$ 的**值域**.

在平面直角坐标系 xOy 中，凡坐标满足方程 $y - f(x) = 0$，

$x \in A$ 的点(x,y)的集合$\{(x,y) \mid y = f(x), x \in A\}$称为**函数 $y = f(x)$ 的图形**.

2. 分段函数

在函数的定义域内,用两个或两个以上的数学式分段表示的函数,叫做**分段函数**.例如

$$y = f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

便是一个分段函数,定义域是$(-\infty, +\infty)$,对应关系是:当 $x > 0$ 时,$y = 1$;当 $x = 0$ 时,$y = 0$;当 $x < 0$ 时,$y = -1$,函数的值域是集合$\{-1,0,1\}$.

3. 反函数

在函数的定义中,按关系式

$$y = f(x), \quad x \in A, y \in B \tag{1.1}$$

x 是自变量,y 是因变量(函数).在关系式 $y = f(x)$ 中,反过来,将 y 看成自变量,x 看成因变量(函数),即对每一个 $y \in B$,按 $y = f(x)$ 都有确定的 x 值与之对应,称 **x 是 y 的反函数**,即(1.1)的反函数.在求反函数的表达式时,可将(1.1)中的关系式 $y = f(x)$ 看成一个方程式,从中将 x 解出,写作

$$x = \varphi(y), \quad y \in B \tag{1.2}$$

这就是反函数的表示式.习惯上自变量的记号取作 x,故将(1.2)中 x,y 记号对换(对应关系不变),得

$$y = \varphi(x), \quad x \in B \tag{1.3}$$

它仍是(1.1)的反函数.若将 φ 记为 f^{-1},则(1.3)可写为

$$y = f^{-1}(x), \quad x \in B \tag{1.4}$$

因此,(1.2)(1.3)与(1.4)都是(1.1)的反函数,只是用作表示的记号不同而已.

例如，$y = 2^x$ 的反函数是 $x = \log_2 y$，或记作 $y = \log_2 x$；若记 $f(x) = 2^x$，其反函数也记作 $f^{-1}(x) \doteq \log_2 x$.

又如，$y = x^2, x \in (-\infty, +\infty)$，它的反函数是 $x = \pm\sqrt{y}, y \in (0, +\infty)$，或 $y = \pm\sqrt{x}, x \in [0, +\infty)$，它的两个单值分支分别为

$$y = \sqrt{x}, \qquad x \in [0, +\infty),$$

与

$$y = -\sqrt{x}, \quad x \in [0, +\infty).$$

4. 复合函数

若函数 $y = f(u), u = g(x)$，且 $u = g(x)$ 的值域或部分值域包含在 $f(u)$ 的定义域中，则变量 y 通过变量 u 与变量 x 建立了对应关系，这个对应关系称为 **y 是 x 的复合函数**，u 是**中间变量**，x 是**自变量**. 通常将

$$y = f(u), \quad u = g(x)$$

合并写成

$$y = f[g(x)]$$

5. 初等函数

基本初等函数（常值函数、指数函数、对数函数、幂函数、三角函数、反三角函数）经过有限次的加、减、乘、除（分母不为零）的四则运算，以及有限次的复合步骤所构成的函数，叫做**初等函数**.

例如　函数　$y = \dfrac{\sqrt{x+1}}{\log_2(2-x)}$ 是一个初等函数.

又如　函数　$y = x^x$，由于 $x^x = e^{\ln x^x} = e^{x\ln x}$，因此

$$y = x^x = e^{x\ln x}$$

是由 $y = e^u, u = x\ln x$ 复合而成的函数，因而它也是一个初等函数.

二、例题

例 1.1 求下列函数的定义域

(1) $f(x) = \sqrt{4-x^2} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

(2) $f(x) = \sqrt{\ln \dfrac{4x-x^2}{3}}$

(3) $f(x) = \arcsin \dfrac{x^2+2}{5}$

(4) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & 0 \leqslant x < 1 \\ x+1, & x \geqslant 1 \end{cases}$

解 (1) 在 $\sqrt{4-x^2}$ 中,应 $4-x^2 \geqslant 0$,即 $x^2 \leqslant 4$,$|x| \leqslant 2$,故应 $-2 \leqslant x \leqslant 2$;在$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$中,应 $x^2-1>0$,即 $x^2>1$,$|x|>1$,故应 $x<-1$ 或 $x>1$. 因此,取公共部分得 $f(x)=\sqrt{x^2-1}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$的定义域为$[-2,-1)$及$(1,2]$.

(2) 平方根下应非负,即应 $\ln \dfrac{4x-x^2}{3} \geqslant 0$,必须$\dfrac{4x-x^2}{3} \geqslant 1$,整理得$(x-1)(x-3) \leqslant 0$,列表:

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,3)$	3	$(3,+\infty)$
$(x-1)(x-3)$	+	0	−	0	+

知函数 $f(x)=\sqrt{\ln \dfrac{4x-x^2}{3}}$ 的定义域为$[1,3]$.

(3) 对于反正弦函数应有 $\left|\dfrac{x^2+2}{5}\right| \leqslant 1$,即应 $|x^2+2| \leqslant 5$,

$-5 \leqslant x^2+2 \leqslant 5$，即 $-7 \leqslant x^2 \leqslant 3$，而 $-7 \leqslant x^2$ 总成立，故只需要 $x^2 \leqslant 3$，得 $|x| \leqslant \sqrt{3}$，亦即 $-\sqrt{3} \leqslant x \leqslant \sqrt{3}$. 因此，函数 $f(x)=\arcsin \dfrac{x^2+2}{5}$ 的定义域是 $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.

(4) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & 0 \leqslant x<1 \\ x+1, & x \geqslant 1\end{cases}$ 是分段函数，将各分段表达式给出 x 的变化范围合在一起，即可得该分段函数的定义域. 因此，该分段函数的定义域是 $[0,+\infty)$. □

注 1 求函数定义域时，要注意使函数有意义的限制条件：例如

(1) $\sqrt[n]{\varphi(x)}$（n 为偶数），应有 $\varphi(x) \geqslant 0$.

(2) $\dfrac{1}{\log_a \varphi(x)}$ $(a>0, a \neq 1)$，应有 $\varphi(x)>0$ 且 $\varphi(x) \neq 1$.

(3) $\arcsin \varphi(x)$ 或 $\arccos \varphi(x)$，应有 $|\varphi(x)| \leqslant 1$.

(4) $f[\varphi(x)]$. 应有 $u=\varphi(x)$ 的值域或部分值域包含在 $f(u)$ 的定义域内.

例 1.2 设 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x}, & x<0 \\ 3, & 0 \leqslant x<1 \\ \ln(2x-1), & x \geqslant 1\end{cases}$

求 $f(-3), f(\frac{1}{3}), f(1), f(1+h)$

解 $f(-3)=\sqrt{1-(-3)}=\sqrt{4}=2, f\left(\dfrac{1}{3}\right)=3$

$$f(1)=\ln(2 \times 1-1)=\ln 1=0$$

$$\begin{aligned} f(1+h) &= \begin{cases}\sqrt{1-(1+h)}, & 1+h<0 \\ 3, & 0 \leqslant 1+h<1 \\ \ln[2(1+h)-1], & 1+h \geqslant 1\end{cases} \\ &= \begin{cases}\sqrt{-h}, & h<-1 \\ 3, & -1 \leqslant h<0 \\ \ln(1+2h), & h \geqslant 0\end{cases} \end{aligned}$$ □

注 应注意分段函数的对应规则，例如本题中，$\dfrac{1}{3} \in [0,1)$，由

题设，按对应规则 $f\left(\frac{1}{3}\right)=3$.

例 1.3 求 $f(x)$，已知

(1) $f(2x-1)=x^2$， (2) $f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}$

解 (1) 令 $2x-1=t$，解出 $x=\frac{1+t}{2}$，由题设，得

$$f(t)=\left(\frac{1+t}{2}\right)^2=\frac{(1+t)^2}{4}$$

由于函数关系与变量的记号无关，将变量的记号 t 换成 x，得所求函数为

$$f(x)=\frac{(1+x)^2}{4}$$

(2) 令 $\frac{1}{x}=t$，即 $x=\frac{1}{t}(t\neq 0)$，由题设，得

$$f(t)=\frac{1}{t}+\sqrt{1+\left(\frac{1}{t}\right)^2}=\frac{1}{t}+\frac{\sqrt{t^2+1}}{|t|}$$

将变量的记号 t 换成 x，得所求函数

$$f(x)=\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x|}$$ □

注 应注意函数关系与变量的记号无关，$f(t)=\frac{(1+t)^2}{4}$ 与 $f(x)=\frac{(1+x)^2}{4}$ 是同一函数.

例 1.4 设 $G(x)=x+\frac{1}{x}$，试证

$$G(x^3)=[G(x)]^3-3[G(x)].$$

解 在 $G(x)=x+\frac{1}{x}$ 中，以 x^3 代替 x，得

$$\begin{aligned}G(x^3)&=x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)\\&=[G(x)]^3-3[G(x)]\end{aligned}$$ □

注 为了证明问题，有时用到代数(或三角)恒等式，这里用到

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

例 1.5 (1) 试设置中间变量,将复合函数 $y=\ln\sin\frac{x}{2}$ 分解成若干个简单函数.

(2) 问将 $y=\sqrt{1-u^2}$,$u=x^2+3$ 复合起来,能否构成一个复合函数?

(3) 问 $\sin^2 x$ 与 $\sin x^2$ 的复合关系是否相同?

解 (1) 由内层依次到外层,层层设置中间变量,即令

$$v=\frac{x}{2},\ u=\sin v$$

于是,函数 $y=\ln\sin\frac{x}{2}$ 可写成

$$y=\ln u,\ u=\sin v,\ v=\frac{x}{2}$$

其中 u,v 是中间变量.

(2) 不能.因外层函数 $y=\sqrt{1-u^2}$ 的定义域为 $|u|\leqslant 1$,而 $u=x^2+3$,当 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时,有 $u=x^2+3\geqslant 3$,内层函数 $1-(x^2+3)^2<0$,因而 $y=\sqrt{1-(x^2+3)^2}$ 无意义,故不能构成复合函数.

(3) 由于 $y=\sin^2 x=(\sin x)^2$ 的复合步骤为

$$y=u^2,\ u=\sin x$$

而 $y=\sin x^2$ 的复合步骤为

$$y=\sin u,\ u=x^2$$

它们的复合步骤不相同,这是两个不同的复合函数. □

注 分析复合函数的复合结构时,既能拆开,又能合拢.复合时,要认清能复合的条件,即内层函数的值域或部分值域包含在外层函数的定义域中,因而并不是所有函数都能复合的.同时,还须注意复合的步骤.

例 1.6 (1) 设 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$,求 $f[f(x)]$.

(2) 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<1\\ 1+\ln x, & x\geqslant 1\end{cases}$,$\varphi(x)=3x-2$,求

$f[\varphi(0)]$，$\varphi[f(e)]$.

解 (1) 在 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ 中，以 $f(x)$ 代 x，得

$$f[f(x)]=\frac{f(x)}{f(x)-1}=\frac{\dfrac{x}{x-1}}{\dfrac{x}{x-1}-1}=\frac{\dfrac{x}{x-1}}{\dfrac{x-x+1}{x-1}}=x$$

(2) 由 $\varphi(x)=3x-2$，知 $\varphi(0)=-2<1$，故有

$$f[\varphi(0)]=(-2)^2=4$$

因 $e>1$，此时 $f(x)=1+\ln x$，得 $f(e)=1+\ln e=2$，故

$$\varphi[f(e)]=\varphi(2)=3\times 2-2=4$$ □

例 1.7 求下列函数的反函数 $y=f^{-1}(x)$：

(1) $y=f(x)=e^{x+3}$， (2) $y=f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$，

(3) $y=f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$.

解 (1) 从 $y=e^{x+3}$ 中解出 x. 取自然对数得 $\ln y=x+3$，解得 $x=\ln y-3$，再将 x 与 y 对换，得所求反函数为

$$y=f^{-1}(x)=\ln x-3$$

(2) 从 $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ 中解出 x. 由 $(x-1)y=x+1$，整理后得 $x(y-1)=1+y$，解出 $x=\dfrac{y+1}{y-1}$，将 x 与 y 对换，得所求反函数为

$$y=f^{-1}(x)=\frac{x+1}{x-1}$$

这里，反函数 $y=f^{-1}(x)$ 就是函数 $y=f(x)$ 本身.

(3) 从 $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ 中解出 x. 由于 $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}=\dfrac{e^{2x}-1}{2e^x}$ 即

$$(e^x)^2-2ye^x-1=0$$

解得 $e^x=y\pm\sqrt{y^2+1}$，因 $e^x>0$，故舍去负号，即得 $x=\ln(y+\sqrt{y^2+1})$，将 x 与 y 对换，得所求反函数为

$$y = f^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$ □

注 由于 $x = f^{-1}(y)$ 是从 $y = f(x)$ 当成代数方程解出的，故在给定的直角坐标系中，$x = f^{-1}(y)$ 与 $y = f(x)$ 具有同一图形. 但将 $x = f^{-1}(y)$ 中 x, y 对换，变为 $y = f^{-1}(x)$ 后，$y = f^{-1}(x)$ 的图形与 $y = f(x)$ 的图形就关于直线 $y = x$ 对称了.

设函数 $f(x), x \in I$，且定义域 I 关于原点对称，即当 $x \in I$ 时，则有 $(-x) \in I$. 若对任意的 $x \in I$，有

$$f(-x) = -f(x) \tag{1.5}$$

则称 $f(x)$ 在 I 上是**奇函数**；若对任意的 $x \in I$，有

$$f(-x) = f(x) \tag{1.6}$$

则称 $f(x)$ 在 I 上是**偶函数**.

奇函数的图形关于原点对称，偶函数的图形关于 y 轴对称.

例 1.8 容易验证 $y = x^3, y = \sin x, y = x^2\sin x$，以及 $y = \mathrm{sgn}x$ 是奇函数，而 $y = x^2, y = \cos x, y = x^3\sin x$，以及 $y = |x|$ 是偶函数. □

若 $f(x)$ 不满足条件(1.5)也不满足(1.6)，则 $f(x)$ 既不是奇函数也不是偶函数. 例如

$$y = \mathrm{e}^x, \quad y = \ln x, \quad y = x^2 + \sin x$$

既不是奇函数也不是偶函数.

设函数 $f(x), x \in I$（I 为无限区间）. 若存在正常数 T，使得对任意的 $x \in I$，及 $(x \pm T) \in I$，满足

$$f(x + T) = f(x) \tag{1.7}$$

则称 $f(x)$ 在 I 上是**周期函数**，常数 T 称为 $f(x)$ 的**周期**. 当 T 是满足条件(1.7)的最小正数时(如果存在的话)，则称 T 为 $f(x)$ 的**最小正周期**，通常所说周期函数的周期是指它的最小正周期. 但不是所有的周期函数都有最小正周期，例如常值函数 $f(x) = C$（常数）以任何正实数为周期，但没有最小正周期.

例 1.9 设 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数，验证 $f(\omega x)$（ω 正

数）是以$\frac{T}{\omega}$为周期的周期函数.

验证 由题设 $f(x)$，$x \in I$，对任意的 $x \in I$ 有 $f(x+T) = f(x)$. 在 $f(\omega x)$ 中以$\left(x+\frac{T}{\omega}\right) \in I$ 替换 x，有

$$f\left[\omega\left(x+\frac{T}{\omega}\right)\right] = f(\omega x + T) = f(\omega x)$$

由定义，$f(\omega x)$ 是以$\frac{T}{\omega}$为周期的周期函数.

例如 $f(x) = \sin 3x$ 的周期为$\frac{2\pi}{3}$，$f(x) = \sin\frac{x}{3}$ 的周期为 $\frac{2\pi}{1/3} = 6\pi$. □

例 1.10 一正圆锥，其顶角为 2θ，且内接于半径为 a 的球内，试将该圆锥体的体积表示为其半顶角 θ 的函数.

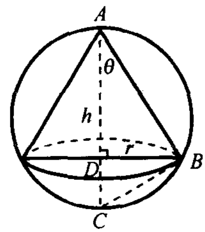


图 1-1

解 设所求圆锥的高为 h，底半径为 r，于是体积为

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

如图 1-1，AC 为球的直径，即 $AC = 2a$. 在三角形 ABC 中，$\angle B$ 为直角. 于是

$$AB = 2a\cos\theta$$

又由 $AC \perp DB$，于是

$$r = AB\sin\theta = 2a\cos\theta\sin\theta$$

$$h = AB\cos\theta = 2a\cos^2\theta$$

故得

$$V = \frac{1}{3}\pi(2a\cos\theta\sin\theta)^2 \cdot 2a\cos^2\theta$$

$$= \frac{8\pi a^3}{3}\sin^2\theta\cos^4\theta, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$ □

例 1.11 某厂家有某种货物 n 吨，每吨定价 a 元. 若销售量在 $m(m<n)$ 吨以内时，按原价出售；若超过 m 吨，则超过部分按原价的

9 折出售,试求销售收入与销售量之间的函数关系.

解 设销售量为 x 吨,销售收入为 p 元,则

当 $0 \leqslant x \leqslant m$ 时, $p = ax$;

当 $m < x \leqslant n$ 时, $p = am + a \times 0.9(x - m)$.

故所求函数关系可用分段函数表示为

$$p = \begin{cases} ax, & 0 \leqslant x \leqslant m \\ a[m + 0.9(x - m)], & m < x \leqslant n \end{cases}$$ □

三、练习题

1. 单项选择题(在 A,B,C,D 四个选项中,只有一项是正确的,试将正确的那项的代号填入括号内)

(1) 函数 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{4 - x^2}, & |x| \leqslant 2 \\ \sqrt{x^2 - 4}, & 2 < |x| < 3 \end{cases}$ 的定义域是(　　).

A. $[-2,3]$　　B. $(-2,3)$

C. $[-3,3)$　　D. $(-3,3)$

(2) 设 $f(x - 1) = x^2 + 3$,则 $f(x_0 + h) = $(　　)

A. $(x_0 + h)^2 + 3$　　B. $(x_0 + h) - 3$

C. $(x_0 + h)^2 - 3$　　D. $(x_0 + h)^2 + 2(x_0 + h) + 4$

(3) 已知 $f(x) = 1 + \ln 2x, g(x) = 1 + \sqrt{x}$,则 $f[g(x)]$ 是(　　)

A. $1 + \ln 2(1 + \sqrt{x})$　　B. $\ln(2\sqrt{x} + 1)$

C. $1 + \ln(2\sqrt{x} + 1)$　　D. $\ln 2(\sqrt{x} + 1)$

(4) 下列各对函数相等的是(　　)

A. $f(x) = 1$ 与 $g(x) = \cos^2 x + \sin^2 x$

B. $f(x) = 1$ 与 $g(x) = \dfrac{x}{x}$

C. $f(x)=2\ln x$ 与 $g(x)=\ln x^2$

D. $f(x)=x$ 与 $g(x)=e^{\ln x}$

(5) 将函数 $f(x)=1-|x-1|$ 用分段函数表示是(　　)

A. $f(x)=\begin{cases}2-x, & x\geqslant 0\\ x, & x<0\end{cases}$

B. $f(x)=\begin{cases}2-x, & x\geqslant 1\\ x, & x<1\end{cases}$

C. $f(x)=\begin{cases}2-x, & x\geqslant 0\\ 2+x, & x<0\end{cases}$

D. $f(x)=\begin{cases}2-x, & x\geqslant 1\\ 2+x, & x<1\end{cases}$

2. 填空题

(1) $f(x)=\dfrac{\arcsin x}{\ln(1-x)}$ 的定义域是__________.

(2) 设 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,则 $f[f(x)]$ 是__________.

(3) 设 $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$,由于 $f(-x)=$ ____,故 $y=f(x)$ 的图形关于_____对称.

(4) 设 $f(x)=4x+1,\varphi(x)=x^2$,则满足 $f[\varphi(x)]=\varphi[f(x)]$ 的所有 x 的值是__________.

(5) 函数 $y=f(x)=2-2^{x+1}$ 的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 是__________.

(6) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$,则 $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=$ _____,$f(a)=$ _____,$f(b+1)=$ _____.

3. 求函数的定义域

(1) $f(x)=\dfrac{1}{1-x}+\sqrt{4-x^2}$

(2) $f(x)=\lg(x-4)+\sqrt{x^2-9}$