某些气体动力学问题和水力学问题的比拟

A. B. 别洛娃

科学出版社

某些氣體動力學問題和水力學問題的比擬

A. B. БЕЛОВА 著

吳 望 一 譯

科 學 出 版 社

1 9 5 6 年 6 月

某些氣體動力學問題和
水力學問題的比擬

著者　A. B. БЕЛОВА
翻譯者　吳望一
出版者　科學出版社
北京東皇城根甲42號
北京市書刊出版業營業許可證出字第061號
印刷者　上海中科藝文聯合印刷廠
總經售　新華書店

1956年6月第一版　書號：0474　印張：1 2/9
1956年6月第一次印刷　開本：787×1092 1/18
(滬)0001—4,305　字數：17,000

定價：(11)0.26元

目　　錄

引　　言

1912 年，在莫斯科工程協會的會議上，茹可夫斯基在他自己的報告“狹窄渠道中重液體的運動和管道中高速氣體運動之間的比擬”中，第一次指出了氣體動力學和水力學的比擬．其後，在 1917 年，茹可夫斯基在他給莫斯科高等技術學校高年級學生所作的兩次講演中，又闡述了這種比擬．這兩次講演的筆記在 1922 年被整理成爲論文發表，論文的題目是氣體動力學和水力學的比擬；以後又在 1925 年由中央空氣流體動力學研究所以專著形式出版．

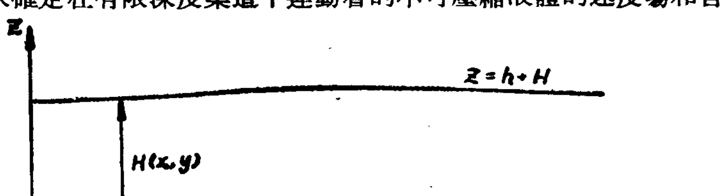
1938 年，赫里斯奇阿諾維契在其著作“河渠中的不定常運動”[1] 中，指出了明渠中的液體運動和氣體運動之間的比擬是存在的．

普萊斯威克在 1938 年發表了題爲“氣體動力學的方法在具有自由面的水流中的應用”[2] 的文章．在這篇文章裏，他應用了解氣體動力學問題的方法去解明渠中液體運動的平面問題，這裏他考慮了激流，並且和超聲速氣流的情形相類似地，作出了橢圓和特徵線網．

在這方面的著作還有卡爾曼關於曲線形明渠中液體運動問題的文章[3] 以及著名的李亞布辛斯基關於比擬問題的文章[4]．蘇維埃學者在水力學方面的很多工作都是以應用氣體動力學方法到水力學中去作爲基礎的（Мелещенко，Нумеров，Журавлев 等等．可參看 Журавлев 論文中的索引）*)．

I. 二 維 水 力 學

設要求確定在有限深度渠道中運動着的不可壓縮液體的速度場和自由面的形



*) Журавлев, Д.А.Н. СССР. 1955г. т.102, N. 5.

狀. 爲了普遍起見,我們暫時假定渠道的底是曲線形的. 我們將要考慮下列的定常運動,即底的形狀和液體運動變化得如此的緩慢,以致流體質點在垂直方向上的加速度可以忽略不計.

設 $z=h(x, y)$是渠底的方程, $H(x, y)$是渠道中液流的高度,於是 $z=h+H$ 是液體自由面的方程.

§1-1 運動的微分方程

現在我們寫出在定常運動情形下不可壓縮液體的流體動力學方程組(這裏的質量力是重力):

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y \frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}=-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x},$$

$$v_x \frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y \frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z \frac{\partial v_y}{\partial z}=-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y},$$

$$\frac{d v_z}{d t}=-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}-g,$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0.$$

我們將假定,水平方向的速度與 z 無關(亦即在同一截面的不同高度處,水平方向的速度是一樣的):

$$v_x=v_x(x, y), \quad v_y=v_y(x, y).$$

於是前兩個方程中的第三項就沒有了. 此外,由於運動是緩變的,所以 $\frac{d v_z}{d t} \ll g$,因而第三個方程中的 $\frac{d v_z}{d t}$ 可以略去(亦即認爲 $\frac{d v_z}{d t} \approx 0$). 這樣,我們就得到了下列微分方程組:

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y \frac{\partial v_x}{\partial y}=-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \tag{1-1}$$

$$v_x \frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y \frac{\partial v_y}{\partial y}=-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \tag{1-2}$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}+g=0, \tag{1-3}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0. \tag{1-4}$$

由方程(3),得

$$p = -\rho g z + f(x, y),$$

其中 $f(x, y)$ 是 x, y 的任意函數. 我們根據液體表面 $z = h + H$ 上的壓力應該等於大氣壓力的條件來定出 $f(x, y)$.

$$p_0 = -\rho g(h + H) + f(x, y),$$

於是

$$p = p_0 + \rho g(h + H - z). \tag{1-5}$$

把(1-5)式代入(1-1),(1-2)兩式,即得

$$\left.\begin{aligned} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= -g \frac{\partial H}{\partial x} - g \frac{\partial h}{\partial x}, \\ v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} &= -g \frac{\partial H}{\partial y} - g \frac{\partial h}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \tag{1-6}$$

現在我們把連續性方程變換一下. 因(1-4)式中的前兩項只和 x, y 有關而和 z 無關,於是對 z 積分這個方程後,即得

$$v_z = -z\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) + F(x, y). \tag{1-7}$$

液體的速度應該和渠底相切, 底面的方程是 $z - h(x, y) = 0$, 因此條件 $v_n = 0$ (n 是底面的法線)給出下列速度分量之間的關係:

$$v_z = v_x \frac{\partial h}{\partial x} + v_y \frac{\partial h}{\partial y}. \tag{1-8}$$

將(1-8)式代入方程(1-7)中,並令 $z = h(x, y)$,我們就可以把 $F(x, y)$確定出來:

$$v_x \frac{\partial h}{\partial x} + v_y \frac{\partial h}{\partial y} = -h\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) + F(x, y),$$

由此

$$v_z = -z\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) + \frac{\partial (h v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (h v_y)}{\partial y}. \tag{1-9}$$

對於由(1-9)式確定出來的任意一個 v_z, 連續性方程都是滿足的.

液體的速度也應該和自由面相切. 自由面的方程是 $z = h + H$. 因此爲了使速度和自由面相切,當 $z = h + H$ 時應該滿足下列等式:

$$v_z = v_x \frac{\partial}{\partial x}(h+H) + v_y \frac{\partial}{\partial y}(h+H). \tag{1-10}$$

等式(1-9)對於任何 z 都是正確的. 將(1-9)式代入(1-10)式,並在(1-9)式中令 $z = h + H$,得

$$-(h+H)\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial x}(hv_x) + \frac{\partial}{\partial y}(hv_y) =$$

$$= v_x \frac{\partial}{\partial x}(h+H) + v_y \frac{\partial}{\partial y}(h+H),$$

化簡後得

$$\frac{\partial}{\partial x}(Hv_x) + \frac{\partial}{\partial y}(Hv_y) = 0, \tag{1-11}$$

這個方程可以看作是二維運動的連續性方程. 對於運動的性質作了以上的假定之後,渠道中液體的定常運動方程組具有下列形式:

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -g\frac{\partial H}{\partial x} - g\frac{\partial h}{\partial x},$$

$$v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -g\frac{\partial H}{\partial y} - g\frac{\partial h}{\partial y},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(Hv_x) + \frac{\partial}{\partial y}(Hv_y) = 0.$$

從這個方程組就可以確定 v_x, v_y 和 H.

§1-2 和氣體運動方程之間的比擬

現在我們寫出等熵 $\left(\frac{p}{\rho^\kappa} = C = \text{const}\right)$ 平面定常氣體運動的方程組,並且從氣體運動方程中消去 $p(p = C\rho^\kappa)$:

$$\left.\begin{aligned}
&v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = -C\kappa\rho^{\kappa-2}\frac{\partial \rho}{\partial x},\\
&v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = -C\kappa\rho^{\kappa-2}\frac{\partial \rho}{\partial y},\\
&v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{1-12}$$

二維水力學的方程組是

$$\left.\begin{aligned}
v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}&=-g\left(\frac{\partial H}{\partial x}+\frac{\partial h}{\partial x}\right),\\
v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}&=-g\left(\frac{\partial H}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial y}\right),\\
v_x\frac{\partial H}{\partial x}+v_y\frac{\partial H}{\partial y}+H\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)&=0.
\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{-}13)$$

比較氣體運動方程組和液體運動方程組，我們可以看出：如果令 $\rho=H$，$\kappa=2$，$2C=g$，則方程組(1-12)和(1-13)的差別只是後者多包含了 $\dfrac{\partial h}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial h}{\partial y}$ 的項；如果令 $h=\text{const}$，則兩個方程組將完全一樣．這樣一來，具有自由面的液體沿水平底的運動和絕熱指數 $\kappa=2$、並在整個空間中等熵的平面定常氣體運動，都受同一個微分方程組的支配． 方程組(1-13)在 $h=0$ 時有所謂伯努利積分，伯努利積分中的常數對於整個流動說來都是一樣的． 對於附着在表面上的質點，伯努利積分可以寫成 $v^2+2gH=v_1^2+2gH_1$．我們知道，氣體運動方程組(1-12)有橢圓型的也有雙曲型的，這要看氣流的速度如何而定．如果 $v<a$，則方程(1-12)是橢圓型的；如果 $v>a$，則方程(1-12)是雙曲型的．這裏 a 是小擾動在氣體中的傳播速度(聲速)，它等於 $\sqrt{\dfrac{\kappa p}{\rho}}$．對於具有自由面的液體運動，$c$ 起着 a 的作用．c 可以形式地求之，為此作變換 $\kappa=2$，$\rho\sim H$，$p=C\rho^\kappa\sim CH^2$，$C\sim\dfrac{g}{2}$，$\dfrac{\kappa p}{\rho}=\dfrac{2\cdot\dfrac{g}{2}\cdot H^2}{H}$，於是 $c=\sqrt{gH}$．c 在具有自由表面的液體運動中，起着和氣體運動中的聲速 a 相同的作用．c 是液流中表面長波的傳播速度．

如果 $v>\sqrt{gH}$，則方程組 (1-13) 是雙曲型的，v 處處大於 c 的液流稱為激流．

如果 $v<\sqrt{gH}$，則方程組(1-13)是橢圓型的，它對應於安流．

這樣，安流就類似於氣體的亞聲速運動，激流就類似於氣體的超聲速運動．因此，對於我們所考慮的具有自由表面的液流，可以應用現有的所有解氣流問題的方法．

特別地，對於速度 $v<c$ 的安流，可以應用所有現有的解亞聲速氣體運動問題的方法．

對於激流可以應用解超聲速氣體運動問題的方法，特別是可以有效地應用特

徵線的方法（在普萊斯威克的文章中就是用的這個方法）. 現在我們就來研究激流. 此時方程組(1-13)是雙曲型的,並且具有實的特徵線.

§1-3 水力學方程的特徵線

設 $y = y(x)$是特徵線.

我們藉助於關係式 $\dfrac{d}{dx} = \dfrac{\partial}{\partial x} + y' \dfrac{\partial}{\partial y}$（沿特徵線的全微商是已知的）, 從方程組中消去對 x 的偏導數,於是得到由三個方程組成的包含三個未知偏導數 $\dfrac{\partial v_x}{\partial y}$, $\dfrac{\partial v_y}{\partial y}$, $\dfrac{\partial H}{\partial y}$ 的方程組. 如果 $y = y(x)$是特徵線,則方程組的基本行列式等於零. 令行列式等於零, 即得 y' 的三個使這個行列式等於零的值. y' 的這些值給出特徵線的斜率:

$$y'_1 = \frac{v_x v_y + \sqrt{gH}\sqrt{v^2 - gH}}{v_x^2 - gH}, \qquad \text{第一族特徵線}$$

$$y'_2 = \frac{v_x v_y - \sqrt{gH}\sqrt{v^2 - gH}}{v_x^2 - gH}, \qquad \text{第二族特徵線}$$

$$y'_3 = \frac{v_y}{v_x}, \qquad \text{第三族特徵線}$$

將 y'_3 代入方程組的方程內,即得沿第三族特徵線全微分之間的關係. 寫出微分形式下的這個關係,即有

$$v_x dv_x + v_y dv_y + g dH = 0;$$

積分之,得

$$\frac{v^2}{2} + gH = \text{const.} \qquad \text{在第三族特徵線上}$$

我們令其中一列已由自由項替代的行列式等於零, 然後先後用 y'_1, y'_2 代替行列式中的 y', 即得第一､二兩族特徵線上的關係式:

$$v_x dv_y - v_y dv_x + \sqrt{\frac{v^2}{gH} - 1}\; g dH = 0, \qquad \text{沿第一族特徵線}$$

$$v_x dv_y - v_y dv_x - \sqrt{\frac{v^2}{gH} - 1}\; g dH = 0. \qquad \text{沿第二族特徵線}$$

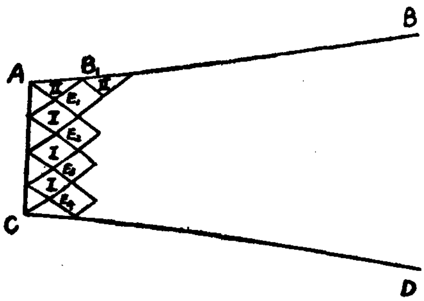
第一､二兩族特徵線位於速度矢量(與第三族特徵線相切)的兩側,並且和速度矢量交成相等的傾角 α, $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{gH}}{v}$.

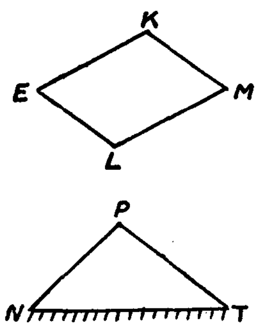
1. 設在一定的邊界條件下,我們從方程組(1-13)中找到了未知函數 v_x, v_y, H. 於是將它們代入特徵線斜率表達式中的右邊部分,即得作爲 x, y 的已知函數的 y'. 這樣我們實際上一定能作出這些特徵線.

2. 相反地,設用某種方法作出了特徵線網並且確定了特徵線上的 v_x, v_y, H, 那麽因爲特徵線連續地蓋滿了整個流動平面(x, y),所以由此我們一定能定出 v_x, v_y, H 在整個流動平面上的值.

利用特徵線及其上的關係式,我們可以像在超聲速問題中做過的那樣用圖解法來解决水力學的問題.

例: 設在變寬度渠道的某一截面 AC 上,已知速度的分佈和高度的分佈,要求出液體在渠道中的運動. 這個問題的解法和固壁間氣體流動問題的解法相類似.





在 AC 上取一串點,通過這些點作不同族的特徵線元素,我們求出特徵線交點 $E_1, E_2, E_3, \cdots\cdots$ 上的流動元. 以下的作圖法和下述兩個運算有關.

(1) 在兩條特徵線 EK 和 KL 上給定流動元,要求求出 M 點上的流動元; M 點是從 K 點和 L 點出發的不同族特徵線的交點.

(2) 從固壁上一點 N 出發的特徵線段 NP 上給定流動元, 要求求出 T 點上的流動元; T 點是固壁和從 P 點出發的另一族特徵線的交點.

依次完成這兩個運算,我們可以用特徵線網逐漸蓋滿整個區域並且可以求出網角上的流動元.

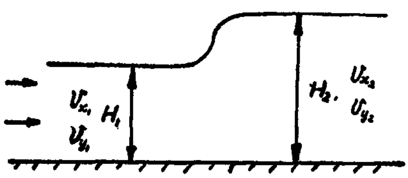
§1-4 水躍及水躍上的條件

所謂水躍就是指水面急劇升高的現象. 水面的這種急劇升高發生在液流中不很長的一個地段上. 液體中的水躍現象和氣體中的激波現象是類似的. 和考慮氣體運動問題時一樣,我們假定,水躍時流動元的改變是在通過某個曲面時發生的.

大家都知道,在水躍現象發生時有顯著的能量損失($E = H + \dfrac{v^2}{2g}$ 稱爲對於液體單位重量而言的質點的能量).

爲了確定水躍上的條件,需要利用(1)質量守恆定律,(2)動量定律.

(1) 液體質量在 t_1 時位於間斷前的區域內,而在 t_2 時全部位於間斷後的區域內. 我們取平行四邊形作爲液體小柱體的底,這個平行四邊形的一邊平行於間斷線並等於 Δl. 我們用 v_n 表示速度在間斷面法線上的投影.



t_1 時刻液體的體積等於

$$H_1 \Delta l v_{n_1}(t_2 - t_1);$$

t_2 時刻液體的體積等於

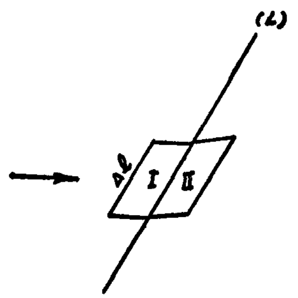
$$H_2 \Delta l v_{n_2}(t_2 - t_1).$$

令此兩表達式相等,即得

$$H_1 \Delta l v_{n_1}(t_2 - t_1) = H_2 \Delta l v_{n_2}(t_2 - t_1),$$

由此

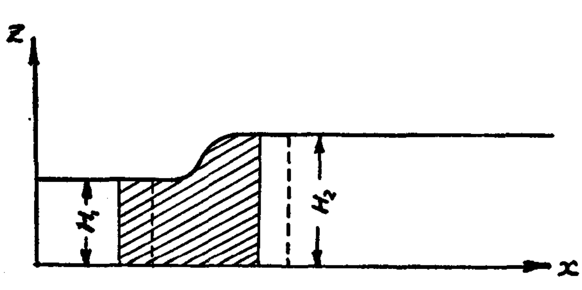
$$H_1 v_{n_1} = H_2 v_{n_2}. \qquad (1\text{-}14)$$

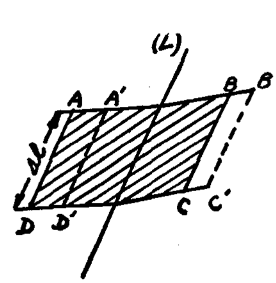


這是定常運動時對於跳躍的質量守恆定律. 如果運動是不定常運動,則液體的質點相對於曲線 AB(跳躍)以速度 $v_n - N = \theta$ 移動着,此時質量守恆定律應寫成下列形式:

$$H_1 \theta_1 = H_2 \theta_2. \qquad (1\text{-}15)$$

(2) 現在我們寫出動量定律.





設在 t_1 時刻質量所佔據的位置是 1, 亦即體積 $ABCD$; 而在 t_2 時刻所佔據的位置是 2,亦即體積 $A'B'C'D'$. $t_2 = t_1 + \Delta t$. 動量的改變等於

$$\Delta\mathbf{K} = \mathbf{K}_{t_2} - \mathbf{K}_{t_1} = \mathbf{K}_{BB'C'C} - \mathbf{K}_{AA'D'D} =$$
$$= \Delta l \cdot v_{n_2} \cdot \Delta t \cdot H_2 \cdot \rho \cdot \mathbf{v}_2 - \Delta l \cdot v_{n_1} \cdot \Delta t \cdot H_1 \cdot \rho \cdot \mathbf{v}_1.$$

因爲

$$H_1 v_{n_1} = H_2 v_{n_2},$$

所以

$$\Delta\mathbf{K} = \Delta l \cdot \Delta t \cdot v_n \cdot H\rho[\mathbf{v}]^{*)}.$$

現在我們計算 Δt 時間內作用在運動着的體積上的衝量. 如果用 P 表示作用在高爲 H、截面積等於 1 的柱體上的壓力,則衝量等於

$$\Delta\mathbf{I} = -\Delta l \cdot P_2\mathbf{n}\Delta t + \Delta l \cdot P_1\mathbf{n}\Delta t = -\Delta l\Delta t\mathbf{n}[P].$$

令動量等於衝量,即得

$$Hv_n\rho[\mathbf{v}] = -\mathbf{n}[P]. \qquad (1\text{-}16)$$

現在我們用液體高度來表出 p,我們有

$$p = p_0 + \rho g(H - z).$$

我們認爲: z 是從底面計算起的; p_0 可以不去管它,因爲我們考慮的是封閉曲面,而 $\oiint p_0 ds = 0$. 因此我們將取下列的量作爲 P:

$$P = \int_0^H g\rho(H - z)dz = \rho g\left(Hz - \frac{z^2}{2}\right)\Big|_0^H = \frac{1}{2}\rho g H^2.$$

將 P 代入表示動量定律的關係式中,即得

$$Hv_n[\mathbf{v}] = -\frac{g}{2}\mathbf{n}[H^2], \qquad (1\text{-}17)$$

和等式(1-14)

$$[Hv_n] = 0$$

聯在一起,我們即得水躍上的全部條件(所有這些條件可以形式地從氣體的相應條件中得到).

如果認爲 H_1, v_{x_1}, v_{y_1} 是已知的,那麼知道了強間斷線的方向後,我們便可以從水躍上的條件中求出 H_2, v_{x_2}, v_{y_2}. 現在我們首先用 H_1 和間斷前的流動元來表出 H_2.

以 $\mathbf{n}$ 來點乘(1-17)式,得

---

*) 差數 $a_2 - a_1$ [其中 a_2 是間斷(跳躍)後的函數值, a_1 是間斷前的函數值]我們稱爲函數 a 在間斷面上的跳躍,並和氣體動力學中一樣用 $[a]$ 表示之, $a_2 - a_1 = [a]$.

$$Hv_n(v_{n_2} - v_{n_1}) = \frac{g}{2}(H_1^2 - H_2^2). \tag{1-18}$$

為了從(1-18)式中消去 v_{n_2}，我們利用(1-14)式

$$H_2v_{n_2} - H_1v_{n_1} = 0,$$

$$Hv_n = H_1v_{n_1} = H_2v_{n_2}. \tag{1-19}$$

(1-18)式可以改寫成這樣:

$$H_2v_{n_2}^2 - H_1v_{n_1}^2 = \frac{g}{2}(H_1^2 - H_2^2).$$

從(1-14)式得

$$H_2v_{n_2}^2 = \frac{H_1^2v_{n_1}^2}{H_2},$$

由此

$$\frac{H_1^2v_{n_1}^2}{H_2} - H_1v_{n_1}^2 = \frac{g}{2}(H_1^2 - H_2^2)$$

或

$$H_1v_{n_1}^2\left(\frac{H_1 - H_2}{H_2}\right) = \frac{g}{2}(H_1 - H_2)(H_1 + H_2),$$

$$H_1v_{n_1}^2 = \frac{g}{2}(H_1H_2 + H_2^2),$$

$$H_2 = -\frac{H_1}{2} \underset{(-)}{+} H_1\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2}{gH_1}v_{n_1}^2} = H_1\left(\sqrt{\frac{1}{4} + 2\left(\frac{v_{n_1}}{c_1}\right)^2} - \frac{1}{2}\right), \tag{1-20}$$

$$c_1 = \sqrt{gH_1}.$$

H_2 是高度，所以不可能是負的.

如果 $H_2 = H_1$，則$\frac{1}{4} + 2\left(\frac{v_{n_1}}{c_1}\right)^2 = \frac{9}{4}$，$\left(\frac{v_{n_1}}{c_1}\right)^2 = 1$. 於是，如果速度在法線上的投影 v_n 等於"聲速" c 的話，則沒有間斷. 大家知道，$c = \sqrt{gH}$ 是長波在有限深度渠道中的傳播速度，對於液體的運動只能發生升高的跳躍，而不可能發生降低的跳躍，亦即

$$H_2 \geqslant H_1.$$

升高的跳躍($H_2 > H_1$)只是當 $\left|\frac{v_{n_1}}{c_1}\right| > 1$ 時才有可能，也就是說，只有在激流中才有可能.

把(1-17)式寫成在坐標軸上的投影形式,並且對 v_{x_2}, v_{y_2} 解這些表達式,得

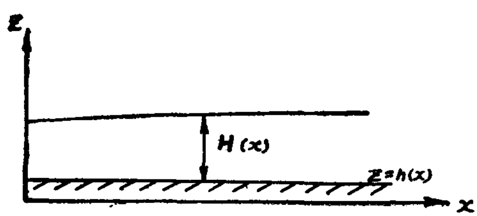
$$\left.\begin{aligned} v_{x_2} &= v_{x_1} - \frac{g}{2}\frac{\alpha}{H_1 v_{n_1}}[H^2], \\ v_{y_2} &= v_{y_1} - \frac{g}{2}\frac{\beta}{H_1 v_{n_1}}[H^2]. \end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}21)$$

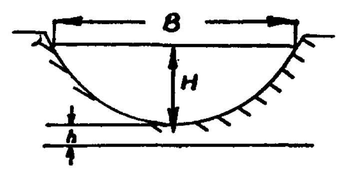
其中 $\alpha = \cos(n, x)$, $\beta = \cos(n, y)$. (1-21)式的右邊部分是已知的,因為 v_{x_1}, v_{y_1}, H_1, v_{n_1} 是已知的;而$[H^2]$也是已知的,因為從(1-20)式可知 H_2. 如果考慮到$[H]$永遠大於零($[H]>0$]),那麼就有$[v]<0$ [從公式(1-17)可知],亦即,只可能有減速跳躍. 這樣,有了(1-20)式和(1-21)式,我們就有可能用 H_1, v_{x_1}, v_{y_1} 來求出 H_2, v_{x_2} 和 v_{y_2}.

借助於水躍可以實現從激流到安流的過渡. 升高的跳躍是在激流繞障礙物以及其他情形時發生的.

II. 一 維 水 力 學

現在我們來考慮液體在渠道中的一維不定常運動. 我們認為運動的基本方向是 x 軸的方向.





令 $z = h(x)$是渠底的方程, $z = h + H$ 是液體自由面的方程; 這裏 $H = H(x, t)$,亦即液體的深度隨着時間和渠道的長度而改變.

§2-1 微分方程

我們從不可壓縮流體的基本方程組出發:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},$$

$$\frac{dv_z}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

現在我們假定：

1）v_x 和 y, z 無關，$v_x = v_x(x, t)$；

2）和運動基本方向相垂直的加速度 $\frac{dv_y}{dt}$, $\frac{dv_z}{dt}$ 很小，因此它們可以忽略不計.

於是我們就忽略了加速度，但不忽略速度.

因爲 $\frac{dv_z}{dt} \approx 0$，所以根據方程組中的第三個方程，有

$$p = -\rho g z + f(x, y, t).$$

根據第二個方程 $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$，由此推知 f 與 y 無關，於是

$$p = -\rho g z + f(x, t). \tag{2-1}$$

在液體的自由面上，即在 $z = h + H$ 時，

$$p = p_0. \tag{2-2}$$

由此

$$p = p_0 + \rho g(H + h - z). \tag{2-3}$$

第一個方程的形狀將是：

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = -g \frac{\partial H}{\partial x} - g \frac{\partial h}{\partial x}. \tag{2-4}$$

現在我們考慮連續性方程

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \tag{2-5}$$

對渠道橫截面的整個面積積分(2-5)式，

$$\iint_F \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) dy dz = 0$$

因爲 $v_x = v_x(x, t)$ 不依賴於 y 和 z，所以

$$\iint_F \frac{\partial v_x}{\partial x} dy dz = \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot F, \tag{2-6}$$

這裏 $F = F(x, t)$. 其次，

$$\iint_F \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) dy dz = \iint_F \operatorname{div} \mathbf{u}\, dy dz,$$

其中 $\mathbf{u}$ 是和 x 軸垂直的平面上的速度. 其所以有横向速度，是因爲渠道的横截面