高等学校教材

概率论与数理统计

Gailülun yu Shuli Tongji

◎主编 周国利 况 山

◎主审 顾 悦 曹素元

重庆大学出版社

高等学校教材

概率论与数理统计

主 编 周国利 况 山
主 审 顾 悦 曹素元

重庆大学出版社

内 容 提 要

本书内容包括概率论、统计推断两部分，内容紧密联系实际，例题丰富多样，便于自学。各章有一定数量的习题，书后有答案或提示；综合练习中选用部分硕士研究生入学试题，以供考研学生参考，并附有 SAS/STAT 程序库使用简介和常用统计数表。

本书可作为高等院校各专业的教材使用，也可供工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/周国利，况山主编.—重庆：重庆大学出版社，2004.3
ISBN 7-5624-3067-5

Ⅰ.概… Ⅱ.①周…②况… Ⅲ.①概率论②数理统计 Ⅳ.O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 007815 号

概率论与数理统计

主 编 周国利 况 山
主 审 顾 悦 曹素元
责任编辑：曾令维 李定群 版式设计：曾令维
责任校对：任卓惠 责任印制：张立全
*
重庆大学出版社出版发行
出版人：张鸽盛
社址：重庆市沙坪坝正街 174 号重庆大学(A 区)内
邮编：400030
电话：(023) 65102378 65105781
传真：(023) 65103686 65105565
网址：http://www.cqup.com.cn
邮箱：fxk@cqup.com.cn (市场营销部)
全国新华书店经销
重庆铜梁正兴印务有限公司印刷
*
开本：787×960 1/16 印张：14 字数：282 千
2004 年 3 月第 1 版 2004 年 3 月第 1 次印刷
印数：1—7 000
ISBN 7-5624-3067-5/O·223 定价：19.50 元

前言

随着我国高等学校发展形势需要以及学习用计算机解决工作中各种实际问题已成为各行业知识更新的必要环节，在近几年教学经验的基础上作者编撰了《概率论与数理统计》教程。

本书的指导思想是：低起点、重应用。前者是指尽量避免某些抽象的数学推理和繁琐的公式演绎，力求做到通俗易懂，深入浅出。重应用是着重内容的实用性、兼顾理论体系。在题材选择和叙述重点上都把实用性放在较侧重的地位。有助于提高读者分析问题和解决问题的能力。

本书还介绍了统计计算的流行的数学软件——SAS，利用该软件可以很容易地实现各种算法。在编写过程中，顾悦教授、曹素元教授提出了许多宝贵意见，并给予了极大的帮助，在此向他们表示衷心致谢。

限于编者水平，本书有不少缺陷，诚恳希望读者、专家批评指正。

周国利　况　山

2004 年 2 月

目录

第 1 章　随机事件及其概率 …… 1
1.1　随机事件 …… 1
1.1.1　随机试验 …… 1
1.1.2　样本空间 …… 2
1.1.3　随机事件 …… 2
1.1.4　随机事件的关系及其运算 …… 2
1.2　随机事件的概率 …… 4
1.2.1　概率的统计意义 …… 4
1.2.2　概率的公理化定义 …… 5
1.2.3　概率的性质 …… 5
1.2.4　等可能概型(古典概型) …… 7
1.3　条件概率与事件的独立性 …… 9
1.3.1　条件概率 …… 9
1.3.2　事件的独立性 …… 10
1.3.3　独立性在可靠性问题中的应用 …… 11
1.4　全概率公式和贝叶斯公式 …… 12
1.4.1　全概率公式 …… 12
1.4.2　贝叶斯公式及应用 …… 13
习题 1 …… 14
综合练习 1 …… 16
第 2 章　随机变量及概率分布 …… 17
2.1　随机变量 …… 17
2.2　离散型随机变量及分布律 …… 18
2.3　随机变量的分布函数 …… 19
2.4　几种重要的离散型随机变量的概率分布 …… 21
2.5　连续型随机变量及其概率密度 …… 24
2.6　几种重要的连续型随机变量的分布 …… 27

2.7 随机变量的函数分布 …… 33
习题 2 …… 35
综合练习 2 …… 38
第 3 章 多维随机变量及其分布 …… 39
3.1 二维随机变量的联合分布 …… 39
3.2 二维随机变量的边缘分布 …… 44
3.2.1 边缘分布函数 …… 44
3.2.2 离散型二维随机变量的边缘分布 …… 45
3.2.3 连续型二维随机变量的边缘分布 …… 46
3.3 随机变量的独立性 …… 48
3.4 二维随机变量的函数分布 …… 50
习题 3 …… 52
综合练习 3 …… 54
第 4 章 随机变量的数字特征 …… 55
4.1 数学期望 …… 55
4.1.1 一般概念定义 …… 55
4.1.2 随机变量函数的数学期望 …… 57
4.1.3 数学期望的性质 …… 59
4.2 方差及性质 …… 60
4.2.1 方差定义 …… 60
4.2.2 方差的性质 …… 62
4.3 常见分布的期望及方差 …… 64
4.4 协方差、相关系数及矩 …… 68
习题 4 …… 70
综合练习 4 …… 73
第 5 章 极限定理 …… 75
5.1 大数定律 …… 75
5.2 中心极限定理 …… 76
习题 5 …… 79
综合练习 5 …… 79
第 6 章 数理统计的基本概念 …… 80
6.1 总体与样本 …… 80
6.2 抽样分布 …… 82
6.2.1 标准正态分布 …… 82
6.2.2 χ^2 分布 …… 83
6.2.3 t 分布 …… 84

6.2.4 F分布 …… 85
6.3 几个重要统计量的分布 …… 86
习题6 …… 88
综合练习6 …… 89
第7章 参数估计 …… 90
7.1 参数的点估计 …… 90
7.1.1 矩估计法 …… 90
7.1.2 极大似然估计法 …… 92
7.1.3 估计量优良性的评定标准 …… 95
7.2 参数的区间估计 …… 97
7.2.1 正态总体均值的区间估计 …… 97
7.2.2 正态总体方差的区间估计 …… 99
7.2.3 两正态总体均值差的区间估计 …… 100
7.2.4 两正态总体方差比的区间估计 …… 103
7.2.5 单侧置信区间 …… 104
习题7 …… 105
综合练习7 …… 106
第8章 假设检验 …… 108
8.1 基本概念 …… 108
8.2 正态总体均值的假设检验 …… 109
8.3 正态总体方差的假设检验 …… 112
8.4 两正态总体期望差的假设检验 …… 115
8.5 两正态总体方差比的假设检验 …… 117
8.6 两种类型的错误 …… 119
8.7 总体分布的假设检验 …… 120
习题8 …… 122
第9章 方差分析及回归分析 …… 124
9.1 单因素试验的方差分析 …… 124
9.2 双因素试验的方差分析 …… 129
9.2.1 无交互作用的方差分析 …… 130
9.2.2 有交互作用的方差分析 …… 135
9.3 一元线性回归 …… 140
9.4 多元线性回归 …… 150
9.5 非线性回归的处理 …… 151
习题9 …… 154

附录 A　SAS/STAT 程序库使用简介 …………………… 157
附录 B　常用统计表 ………………………………………… 165
附表 1　标准正态分布表 …………………………………… 165
附表 2　泊松分布表 ………………………………………… 167
附表 3　χ^2 分布表 …………………………………… 170
附表 4　t 分布表 ………………………………………… 174
附表 5　F 分布表 ………………………………………… 176
附表 6　几种常用的概率分布 ……………………………… 189
答案 ……………………………………………………………… 191
参考文献 ………………………………………………………… 213

第 1 章 随机事件及其概率

世界上发生的现象是多种多样的，从概率的观点考虑可分为两类：一类为确定性现象，它指在一定条件下必然会发生或必然不发生的现象。例如，上抛一枚硬币必然会落地；另一类为随机现象。例如：上抛一枚硬币落在平面上，究竟是正面向上还是反面向上，上抛硬币前是无法断言的。随机现象有两个特点：①在一次观察中，现象可能发生，也可能不发生，即结果呈现不确定性；②在大量重复观察中，其结果具有统计规律性。概率论是研究随机现象统计规律性的一门数学学科。

1.1 随 机 事 件

随机事件是概率论研究的对象，它是随机试验所出现的结果。

1.1.1 随机试验

具有以下特点的试验称为随机试验：

①相同条件下可重复进行；

②试验的结果不止一个，但能预先明确试验的所有可能结果；

③每次试验前，不知哪一种结果会出现。

随机试验一般用字母 E 表示。

例 1.1 下列试验都是随机试验：

E_1：掷一硬币观察其正反面。

E_2：连掷一硬币 3 次，观察正面 H、反面 T 出现的次数。

E_3：从一批电子产品中，任取一只，测其寿命。

E_4：记录对某电视节目评比的短消息次数。

1.1.2 样本空间

随机试验 E 所有可能的结果组成的集合称为 E 的样本空间,用 S 表示。

例 1.2 给出例 1.1 各随机试验的样本空间。

$E_1: S=\{H,T\}$

$E_2: S=\{(HHH),(HHT),(HTH),(HTT),(THH),(THT),(TTH),(TTT)\}$

$E_3: S=\{t \mid t\geqslant 0\}$

$E_4: S=\{0,1,2,3\cdots\}$

样本空间中每一种可能的结果称为样本点,也称为基本事件,一般用 $\{e\}$ 表示。

1.1.3 随机事件

若干基本事件的集合或样本空间 S 的子集称为随机事件,一般用大写字母 A,B,C 等表示,随机事件简称事件。

例 1.3 抛一颗骰子,观察出现的点数,则样本空间 $S=\{1,2,3,4,5,6\}$,其基本事件有 6 个,分别为 $\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\}$。若 A 表示点数大于 4 的事件,则是一个随机事件且 $A=\{5,6\}$。

1.1.4 随机事件的关系及其运算

(1)事件间的关系

如图 1.1 所示。

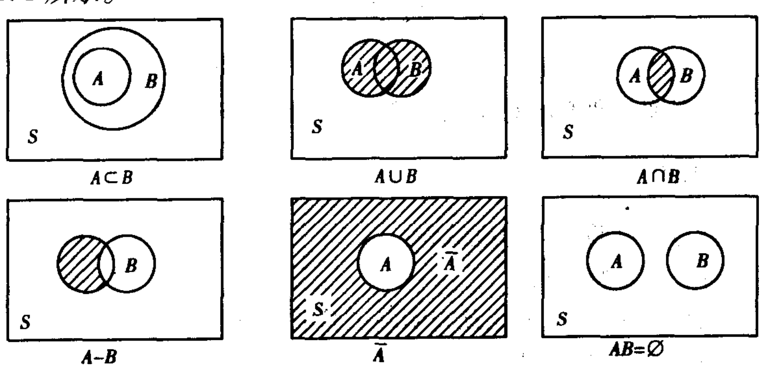

图 1.1

1)事件的包含与相等:若事件 A 发生必然导致事件 B 发生,称 A 被 B 包含,记为 $A\subset B$;又若 $B\subset A$,则称 A,B 是相等事件,记为 $A=B$。

2)和事件:或事件 A 发生,或事件 B 发生的事件称为 A、B 的和(并)事件,记为 $A\cup B$,即表示 A、B 至少有一个事件发生。

n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和记为$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$,表示 n 个事件至少有一个事件发生。

3)积(交)事件:事件 A、B 同时发生的事件称为 A、B 的积(交)事件,记为 AB 或 $A\cap B$,n 个事件的积事件记为$\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$,表示 n 个事件 A_i 同时发生。

4)差事件:事件 A 发生而事件 B 不发生的事件称为事件 A 与 B 的差事件,记为 $A-B$。

5)互不相容(互斥)事件:若 A、B 不能同时发生,即 $AB=\varnothing$(空事件),称 A,B 为互不相容事件。

6)相互对立事件:若 $A\cup B=S$,且 $AB=\varnothing$,称 A、B 是相互对立事件或互逆事件,记为 $A=\overline{B}$,$B=\overline{A}$。

故有　$A\cup\overline{A}=S$　　$A\overline{A}=\overline{A}A=\varnothing$　　$\overline{A}=S-A$

且有 $A-B=A\overline{B}$　　$B-A=\overline{A}B$

7)完备事件组:若 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,两两互不相容,即 $A_iA_j=\varnothing$,$i\neq j$,且 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=S$,则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 构成一个完备事件组或称为样本空间的一个划分。

(2)事件的运算满足:

①交换律:$A\cup B=B\cup A$,$AB=BA$;

②结合律:$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)=A\cup B\cup C$;

$(AB)C=A(BC)=ABC$;

③分配律:$(A\cup B)\cap C=AC\cup BC$,

$(AB)\cup C=(A\cup C)(B\cup C)$,

④德·摩根定律:$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}$ 表示 A、B 都不发生。

$\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$ 表示 A、B 不能同时发生,但可单独发生,即 A、B 至少有一个不发生。

例 1.4　设事件 $A_i(i=1,2,3)$分别表示第 i 次取得合格品,用事件表示:

(1)3 次都取得合格品;

(2)至少 1 次取得合格品;

(3)恰有 2 次取得合格品;

(4)事件 $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3\cup\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$ 表示什么?

解　(1)表示第 1、2、3 次同时取得合格品,即 $A_1A_2A_3$

(2)表示或第 1 次或第 2 次或第 3 次取得合格品,即 $A_1\cup A_2\cup A_3$ 或表示为:

$A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3\cup A_1A_2\overline{A}_3\cup A_1\overline{A}_2A_3\cup\overline{A}_1A_2A_3\cup A_1A_2A_3$

(3)表示第 1、2 次取得合格品且第 3 次取得不合格品 $A_1A_2\overline{A}_3$;或 1、3 次取得合格品且第 2 次取得不合格品 $A_1\overline{A}_2A_3$;或 2、3 次取得合格品且第 1 次取得不合格品 $\overline{A}_1A_2A_3$,由和事件即可表示为

$$A_1A_2\overline{A_3} \cup A_1\overline{A_2}A_3 \cup \overline{A_1}A_2A_3$$

(4)$A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3} \cup \overline{A_1}A_2\overline{A_3} \cup \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$ 表示恰有一次取得合格品事件,$\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$ 表示 3 次都未取得合格品事件,故

$A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3} \cup \overline{A_1}A_2\overline{A_3} \cup \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3 \cup \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$ 表示最多一次取得合格品事件。

例 1.5 掷 1 颗骰子,观察其点数:

(1)用事件 A 表示"出现奇数点",事件 B 表示"点数不超过 4",事件 C 表示"大于 2 的偶数点"。用集合表示下列事件:$A\cup B, A\cup B\cup \overline{C}, AB, A-B, ABC$;

(2)对事件 A,B,验证德·摩根定律。

解 (1)样本空间 $S=\{1,2,3,4,5,6\}$,$A=\{1,3,5\}$

$B=\{1,2,3,4\}$,$C=\{4,6\}$,则

$A\cup B=\{1,2,3,4,5\}$,$\overline{C}=\{1,2,3,5\}$

$A\cup B\cup \overline{C}=\{1,2,3,4,5\}$,$AB=\{1,3\}$

$A-B=A\overline{B}=\{5\}$,$ABC=\varnothing$

(2)由(1)可知$\overline{A\cup B}=\{6\}$,$\overline{A}\,\overline{B}=\{2,4,6\}\cap\{5,6\}=\{6\}$

故有$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}$

又$\overline{AB}=\{2,4,5,6\}$,$\overline{A}\cup\overline{B}=\{2,4,6\}\cup\{5,6\}=\{2,4,5,6\}$

故有

$$\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$$

1.2 随机事件的概率

在随机试验中,随机事件是否发生是很重要的,但更重要的是事件发生的可能性的大小。例如,为防洪的需要,要确定防洪坝的高度,就要知道河水流域每年最大洪水达到某一高度这一事件发生的可能性大小。这个数的大小称为事件发生的概率,简言之,事件的概率就是事件发生的可能性大小的数量描述。

1.2.1 概率的统计意义

设在随机试验 E 中进行 n 次重复试验,若事件 A 出现了 n_A 次,则比值$f_n(A)=\frac{n_A}{n}$称为事件 A 发生的频率。频率的一般性质如下:

1)$0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$;

2)$f_n(S)=1$;

3)若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两互不相容的事件,则

$$f_n(\bigcup_{i=1}^{k} A_i) = \sum_{i=1}^{k} f_n(A_i)。\tag{1.1}$$

在随机试验中，当试验次数 n 逐渐增大时，频率 $f_n(A)$ 会趋于稳定，即逐渐稳定于某一常数。这种"频率的稳定性"即为统计规律性，该数 p 可为事件 A 发生的概率，当 n 很大时，$f_n(A)\approx p$，用其表示事件 A 发生可能性的大小是合适的，也可将频率视为概率的统计意义。

1.2.2　概率的公理化定义

设随机试验 E，样本空间为 S，对于 E 中的事件 A 赋予一个实数 $P(A)$，如果满足：

1) $0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

2) $P(S)=1$；

3) 对任何两两不相容事件 $A_i(i=1,2,\cdots)$ 有

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \tag{1.2}$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 发生的概率。

1.2.3　概率的性质

1) $P(\varnothing)=0$；

2) 对于任一事件 A 及对立事件 $\bar{A}$，其概率有

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) \qquad P(\bar{A}) = 1 - P(A); \tag{1.3}$$

3) 若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，两两互不相容，则

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i); \tag{1.4}$$

4)（加法公式）对于任意两事件 A,B，有

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(AB); \tag{1.5}$$

5) 设 A,B 是两个事件，若 $A\subset B$，则有

$$\begin{gathered} P(B-A) = P(\bar{A}B) = P(B) - P(A), \\ P(B) \geqslant P(A)。 \end{gathered} \tag{1.6}$$

证明　仅证 2)，4)

2) 由 $A\cup\bar{A}=S$　　$A\bar{A}=\varnothing$　　又 $P(S)=1$

则
$$P(A\cup\bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

即
$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

该性质常用于事件至少或至多发生的概率，一般可转化为求其对立事件 $\bar{A}$ 发生的概率。

4) $A\cup B = A\cup B\bar{A}$　且 $A(B\bar{A})=\varnothing$

则 $P(A\cup B) = P(A) + P(B\bar{A})$

又 $B = AB \cup B\bar{A}$　且$(AB)(B\bar{A}) = \varnothing$
则 $P(B) = P(AB) + P(B\bar{A})$
即 $P(B\bar{A}) = P(B) - P(AB)$
代入有 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

①加法公式证明的基本思想是将一个事件分解成两个或两个以上的互不相容的事件的和事件,这种方法常用于求一类事件的概率。

②加法公式可以推广到多个事件的情况。例如 A_1, A_2, A_3 为任意三个事件,则有 $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - P(A_2A_3) + P(A_1A_2A_3)$　(1.7)
一般,对于任意 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$,可用归纳法证得

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_iA_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_iA_jA_k) + \cdots + (-1)^n P(A_1A_2 \cdots A_n) \tag{1.8}$$

例 1.6　设 A, B 是两个随机事件,$P(A) = 0.3, P(B) = 0.25$
$P(AB) = 0.1$,求:
(1)$P(A \cup B)$;　(2)$P(A - B), P(B - A)$;
(3)$P(\bar{A}\bar{B})$;　(4)$P(A - B) \cup (B - A)$。

解　(1)$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.3 + 0.25 - 0.1 = 0.45$

(2) $P(A - B) = P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB) = 0.2$
　$P(B - A) = P(\bar{A}B) = P(B) - P(AB) = 0.15$

(3)$P(\bar{A}\bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.45 = 0.55$

(4) $P((A - B) \cup (B - A)) = P(A\bar{B} \cup \bar{A}B)$
$= P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B) = 0.2 + 0.15 = 0.35$

例 1.7　设A, B, C是三个事件,$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{5}, P(AC) = P(BC) = 0$,
$P(AB) = \frac{1}{6}$,求 A, B, C 都不发生的概率。

解　先求 A, B, C 至少有一个事件发生的概率。
由　$ABC \subset AC$,　又　$P(AC) = 0$　故　$P(ABC) = 0$
则有　$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$

$$= \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{13}{30}$$

A, B, C 都不发生的概率为

$$P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) = P(\overline{A \cup B \cup C}) = 1 - P(A \cup B \cup C) = 1 - \frac{13}{30} = \frac{17}{30}$$

1.2.4　等可能概型(古典概型)

在概率论发展的初期,曾把具有下面两个简单性质的随机现象作为主要对象:

1) 试验的样本空间的元素只有有限个,即 $S=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$;

2) 每个基本事件发生的可能性相等,即 $P(e_1)=P(e_2)=\cdots=P(e_n)=\frac{1}{n}$。

一般地,把这类随机试验的数学模型称为等可能概型,即古典概型。在该概型中,对随机试验 E,若样本空间的基本事件总数为 n,事件 A 所包含的基本事件数为 k,则事件 A 发生的概率为

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{A\text{ 所包含的基本事件数}}{\text{样本空间的基本事件总数}} \tag{1.9}$$

这是古典概型概率的定义,同时也是事件 A 的概率计算公式。

例 1.8　设有 10 件产品,其中 7 件正品,3 件次品,现从中任取 3 件,求下列事件的概率。

(1)$A=\{$没有次品$\}$;　　(2)$B=\{$只有 1 件次品$\}$;

(3)$C=\{$最多 1 件次品$\}$;(4)$D=\{$至少 1 件次品$\}$。

解　由于取产品无顺序,故用组合 $n=C_{10}^3=\frac{10\times9\times8}{1\times2\times3}=120$

(1)$k_A=C_7^3=35$　　$P(A)=\frac{k_A}{n}=\frac{35}{120}=\frac{7}{24}$

(2)$k_B=C_3^1C_7^2=63$　　$P(B)=\frac{k_B}{n}=\frac{63}{120}=\frac{21}{40}$

(3)$k_C=k_A+k_B=98$　　$P(C)=\frac{k_C}{n}=\frac{98}{120}=\frac{49}{60}$

(4)$k_D=C_3^1C_7^2+C_3^2C_7^1+C_3^3C_7^0=85$　　$P(D)=\frac{85}{120}=\frac{17}{24}$

或由 $D=\overline{A}$,　$P(D)=P(\overline{A})=1-P(A)=\frac{17}{24}$

例 1.9　仍设有 10 件产品,其中 7 件正品,3 件次品,现从中任取两次,每次任取一件,考虑两种取产品方式,

1)放回抽样(即第一次取后放回去抽第二次);

2)不放回抽样(即第一次取后不放回去抽第二次);就二种情况,求取到两件是合格品的概率。

解　(1)设该事件为 A

放回抽样:$n=C_{10}^1C_{10}^1=100$　　$k_A=C_7^1C_7^1=49$

$$P(A)=\frac{k_A}{n}=\frac{49}{100}$$

(2)设该事件为 B

不放回抽样:$n=C_{10}^1C_9^1=90$　　$k_A=C_7^1C_6^1=42$

$$P(B)=\frac{k_B}{n}=\frac{42}{90}=\frac{7}{15}$$

例 1.10　将 m 只球随机放入 M 个盒子中,$M\geqslant m$,求每一个盒子至少有一只球的概率(盒子的容量不限)。

解　由每一只球都可以放入 M 个盒子中的任何一个盒子,故样本空间所含基本事件总数 $n=M\times M\times\cdots\times M=M^m$,而每一个盒子中至少放一只球共有 $k=M(M-1)\cdots[M-(m-1)]$,故所求的概率为

$$P=\frac{M(M-1)\cdots(M-m+1)}{M^m}=\frac{A_M^m}{M^m}$$

其中,A_M^m 是从 M 个元素中取 m 个元素的排列数。

有许多问题与本例具有相同的数学模型。例如,1 年按 365 天计算,现有 m 个人聚会($m\leqslant 365$),则至少有两人生日同一天的概率为

$$P(A)=1-P(\bar{A})=1-\frac{365\times 364\times\cdots\times(365-m+1)}{365^m}$$

经计算可得下述结果:

m	20	23	30	40	50	64	100
P	0.411	0.507	0.706	0.891	0.970	0.997	0.999 999 7

在随机试验的班级中,若仅有 70 人以上,则"至少有两人生日相同"这一事件几乎总会出现。

例 1.11　设有 m 件产品,其中有 k 件次品,从中任取 n 件,求其中恰有 $i(i\leqslant k)$ 件次品的概率。

解　从 m 件产品中取 n 件所有可能取法共 C_m^n 种,因在 k 件次品中取 i 件所有可能取法有 C_k^i 种,又在 $m-k$ 件正品中取 $n-i$ 件正品所有可能取法有 C_{m-k}^{n-i}种,故 m 件产品中抽取 n 件,其中恰有 i 件次品取法共有 $C_k^iC_{m-k}^{n-i}$种。

所求概率

$$P=\frac{C_k^iC_{m-k}^{n-i}}{C_m^n}$$

该式是所谓超几何分布的概率分布,它在产品质量检验中有着广泛的应用。

1.3　条件概率与事件的独立性

1.3.1　条件概率

(1)条件概率是概率论中一个重要而实用的概念

首先举例说明。

例1.12　5张彩票中有3张会中奖,甲、乙二人先后各抽取一张,以A,B分别表示甲、乙中奖事件,则

(1)甲中奖的概率$P(A)=\dfrac{3}{5}$

(2)甲,乙都中奖的概率$P(AB)=\dfrac{3\times2}{5\times4}=\dfrac{3}{10}$

(3)乙中奖的概率,由$B=AB\cup\bar{A}B$,又$(AB)(\bar{A}B)=\varnothing$,

$$P(B)=P(AB)+P(\bar{A}B)=\frac{3\times2}{5\times4}+\frac{2\times3}{5\times4}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$$

(4)甲中奖的条件下,乙也中奖的概率(记为$P(B|A)$)$P(B|A)=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$可见在一般情况下,$P(B)\neq P(B|A)$,但

$$P(B|A)=\frac{1}{2}=\frac{5}{10}=\frac{3/10}{3/5}=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

这个结论具有普遍性,从而可定义条件概率如下:

定义:设A,B为二事件,且$P(A)>0$,称

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}\tag{1.10}$$

为事件A发生的条件下事件B发生的条件概率。同样,若$P(B)>0$称

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}\tag{1.11}$$

为事件B发生的条件下事件A发生的条件概率。

条件概率与概率具有相同的性质:

1)对任一事件B,有$0\leqslant P(B|A)\leqslant1$;

2)$P(S|A)=1$;

3)$B_1,B_2,\cdots$是两两互不相容的事件,则有$P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(B_i\mid A)\right)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}P(B_i\mid A)$;

4)对任意事件B_1,B_2有