数学奥林匹克

主编 单墫

初中版

初三分册

北京大学出版社

数学奥林匹克

（初中版）

初三分册

单 墫 主编

北 京 大 学 出 版 社

数学奥林匹克（初中版）

初三分册

单 壿 主编

责任编辑：王明舟

*

北京大学出版社出版

（北京大学校内）

北京大学印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

787×1092毫米　32开本　9.875印张　200千字

1991年6月第一版　1991年6月第一次印刷

印数：00001—31,000册

ISBN 7-301-01515-1/G·85

定价：4.50元

序

哪位少年没有凌云壮志？哪位家长不曾望子成龙？

要将理想化为现实，必须打好基础，循序渐进。

好的读物正是通往理想的桥梁。

北京大学出版社热心青少年的智力开发，出版了数学奥林匹克系列图书。这一套初中版，是为初中年级写的，它有以下特点：

1. **趣**。书中图文并茂，文字生动活泼，饶有趣味；图画更有助于增强数学的直觉，提高学习兴趣。

2. **浅**。内容少而精。每讲侧重一两个方法，不过深、过多、过难，坚持“宁肯少些，但要好些”的方针，并且配合教材，易教易学。

3. **多练习**。“学数学的最好方法就是做数学”，书中有大量练习，所学的知识可以得到消化、巩固。练习均有答案，对于学生自学或家长辅导均极方便。

初一分册由曹鸿德先生等人编写；

初二分册由魏有德先生等人编写；

初三分册由熊斌先生等人编写。

胡大同先生审阅了初稿并做了修改、润色工作。参加本套图书编写工作的同志都是富有经验的教育家，对数学奥林匹克，尤有精湛的研究。我们希望这一套精心设计的读物，将会成为广大少年儿童的良师益友，教师和家长的得力助手。

单　壿

1991年3月

目　录

第一讲　指数与对数

指数与对数是初中代数的重要内容，也是学习指数函数与对数函数的基础。掌握指数和对数的概念，熟练掌握指数与对数之间的内在联系，这不仅对解决涉及到指数和对数的数学题颇有益，而且对于提高学生的解题能力亦十分有益。本讲仅就初中代数中的有关指数与对数的计算、证明、常用对数等问题作些介绍。

1. 指数与对数的计算问题

指数与对数的计算是最基本的问题，要求能熟练地进行指数式与对数式的互换，掌握指数和对数的运算法则。

例1　已知$a^{2x}=\sqrt{2}+1(a>0,a\neq1)$，试求$\dfrac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^{x}+a^{-x}}$的值。

解　因为$a^{3x}+a^{-3x}=(a^{x}+a^{-x})(a^{2x}-a^{x}a^{-x}+a^{-2x})$，所以

$$\frac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^{x}+a^{-x}}=a^{2x}-1+a^{-2x}$$

$$=(\sqrt{2}+1)-1+\frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

$$=2\sqrt{2}-1.$$

例2　若a,b同号，且$a^2-2ab-9b^2=0$，求

$$\lg(a^2+ab-6b^2)-\lg(a^2+4ab+15b^2)$$

的值。

分析　先由已知可以求出 a 与 b 的关系，然后再代入欲求的代数式中。

解　由 $a^2-2ab-9b^2=0$，得 $a=(1\pm\sqrt{10})b$。因 a 与 b 同号，所以 $a=(1+\sqrt{10})b$。因此

$$\lg(a^2+ab-6b^2)-\lg(a^2+4ab+15b^2)$$

$$=\lg\frac{(1+\sqrt{10})^2b^2+(1+\sqrt{10})b^2-6b^2}{(1+\sqrt{10})^2b^2+4(1+\sqrt{10})b^2+15b^2}$$

$$=\lg\frac{2+\sqrt{10}}{2(5+\sqrt{10})}=\lg\frac{1}{\sqrt{10}}=-\frac{1}{2}.$$

例3　若 $\log_8 a+\log_4 b^2=5$，$\log_8 b+\log_4 a^2=7$，试求 ab 的值。

解　由题意知

$$\frac{1}{3}\log_2 a+\log_2 b=5, \qquad ①$$

$$\frac{1}{3}\log_2 b+\log_2 a=7. \qquad ②$$

①与②相加，得

$$\frac{1}{3}\log_2 ab+\log_2 ab=12,$$

即
$$\log_2 ab=9.$$

所以
$$ab=2^9=512.$$

说明　上面用了对数的一个性质：$\log_{a^m}b^n=\frac{n}{m}\log_a b$。

这一性质在后面还会用到。

例4 已知 $\log_{18}9=a$，$18^b=5$，求 $\log_{36}45$。

分析　解这类问题的基本方法是：将条件和所求式中的底数和真数都分解为质数的乘积，利用对数的换底公式和运算法则将它们分别表示为质数的常用对数，从条件中解出各个质数的常用对数代入所求式便可得到结果。

解　因为 $a=\log_{18}9=\dfrac{\lg 9}{\lg 18}=\dfrac{2\lg 3}{\lg 2+2\lg 3}$，所以

$$a\lg 2+(2a-2)\lg 3=0. \qquad ①$$

又因为 $18^b=5$，所以 $b=\log_{18}5=\dfrac{\lg 5}{\lg 18}=\dfrac{1-\lg 2}{\lg 2+2\lg 3}$，即

$$(b+1)\lg 2+2b\lg 3-1=0. \qquad ②$$

从①及②解得

$$\lg 2=\frac{2a-2}{2a-2b-2},\qquad \lg 3=\frac{-a}{2a-2b-2}.$$

所以

$$\log_{36}45=\frac{1+2\lg 3-\lg 2}{2\lg 2+2\lg 3}=\frac{a+b}{2-a}.$$

说明　上述解法虽有一般性，但使用起来有时较繁琐。如果能根据题目的特点灵活地选取对数的底数，解起来可能简单些。下面用18为底数一试。

$$\log_{36}45=\frac{\log_{18}45}{\log_{18}36}=\frac{\log_{18}9+\log_{18}5}{\log_{18}9+2\log_{18}2}$$

$$=\frac{a+b}{a+2\log_{18}2}.$$

因为 $$a=\log_{18}9=\log_{18}\frac{18}{2}=1-\log_{18}2,$$

所以 $$\log_{18}2=1-a.$$

于是 $$\log_{36}45=\frac{a+b}{a+2(1-a)}=\frac{a+b}{2-a}.$$

例5 求满足 $x\geqslant1$，$y\geqslant1$，$z\geqslant1$，$xyz=10$，且

$$x^{\lg x}\cdot y^{\lg y}\cdot z^{\lg z}\geqslant10$$

的 x,y,z 的值。

解 对式 $x^{\lg x}\cdot y^{\lg y}\cdot z^{\lg z}\geqslant10$ 的两边取常用对数，整理得

$$\lg^2x+\lg^2y+\lg^2z\geqslant1.$$

而

$$\begin{aligned}\lg^2x+\lg^2y+\lg^2z&=(\lg x+\lg y+\lg z)^2\\&\quad-2(\lg x\lg y+\lg y\lg z+\lg z\lg x)\\&=[\lg(xyz)]^2-2(\lg x\lg y+\lg y\lg z+\lg z\lg x)\\&=1-2(\lg x\lg y+\lg y\lg z+\lg z\lg x)\geqslant1.\end{aligned}$$

所以

$$\lg x\lg y+\lg y\lg z+\lg z\lg x\leqslant0.$$

因 x,y,z 均 $\geqslant1$，故 $\lg x,\lg y,\lg z$ 均 $\geqslant0$。所以仅当 $\lg y=\lg z=0$ 或 $\lg x=\lg z=0$ 或 $\lg x=\lg y=0$ 时成立，即 $x=10$，$y=z=1$ 或 $y=10$，$x=z=1$ 或 $z=10$，$x=y=1$。

说明 当指数式的底数和指数均出现字母时，常常采用对该式取对数的方法转换成指数上不含字母的式子。

例6 设 p,q 满足 $\log_9 p=\log_{12} q=\log_{16}(p+q)$，求$\dfrac{q}{p}$。

解 令

$$\log_9 p=\log_{12} q=\log_{16}(p+q)=t.$$

则
$$9^t=p,\quad 12^t=q,\quad 16^t=p+q.$$

所以
$$9^t+12^t=16^t,$$

$$1+\left(\frac{12}{9}\right)^t=\left(\frac{16}{9}\right)^t.$$

因为$\dfrac{q}{p}=\left(\dfrac{12}{9}\right)^t=\left(\dfrac{4}{3}\right)^t$，所以$\left(\dfrac{16}{9}\right)^t=\left(\dfrac{4}{3}\right)^{2t}=\left(\dfrac{q}{p}\right)^2$。于是

$$\left(\frac{q}{p}\right)^2-\left(\frac{q}{p}\right)-1=0.$$

解得
$$\frac{q}{p}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

由题意知$p\geqslant 0$，$q\geqslant 0$，所以，$\dfrac{p}{q}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$。

2. 证明问题

证明是培养逻辑思维能力的一种重要手段，有关指数和对数的证明问题是初中代数证明的一个非常好的教材，在数学竞赛中也会经常遇到，必须给予重视。

例7 已知 $a^x b^y c^z=a^y b^z c^x=a^z b^x c^y=1\,(a,b,c>1)$，求证：

$$x+y+z=0.$$

证 先对已知式两边取对数，使指数上不含字母。记 $\lg a=A,\lg b=B,\lg c=C$。因 $a,b,c>1$，所以 $A,B,C>0$。由题设有

$$\lg(a^x b^y c^z)=\lg(a^y b^z c^x)=\lg(a^z b^x c^y)=0,$$

即

$$Ax+By+Cz=0,$$
$$Bx+Cy+Az=0,$$
$$Cx+Ay+Bz=0.$$

将上面三式相加，得

$$(A+B+C)(x+y+z)=0.$$

因为 $A+B+C>0$，所以 $x+y+z=0$。

例8 已知

$$\frac{x(y+z-x)}{\log_a x}=\frac{y(z+x-y)}{\log_a y}=\frac{z(x+y-z)}{\log_a z},$$

求证：$y^z z^y=z^x x^z=x^y y^x$。

证 设已知等式中的比值为 $\frac{1}{k}$，则

$$\log_a x=kx(y+z-x),$$
$$\log_a y=ky(z+x-y),$$
$$\log_a z=kz(x+y-z).$$

由此得

$$\begin{aligned}\log_a y^z z^y&=z\log_a y+y\log_a z\\&=kyz(z+x-y)+kyz(x+y-z)\\&=2kxyz.\end{aligned}$$

类似地，可得

$$\log_a z^x x^z=2kxyz,$$
$$\log_a x^y y^x=2kxyz.$$

所以

$$\log_a y^z z^y=\log_a z^x x^z=\log_a x^y y^x,$$

即 $$y^z z^y=z^x x^z=x^y y^x.$$

说明 本题欲证的是一个关于幂的连等式，而已知等式只涉及对数，不涉及幂，因而先证明相应对数之间的连等式，再转移到幂的连等式，这是一种常用的技巧。

例9 对于正整数 $a,b,c(a\leqslant b\leqslant c)$ 和实数 x,y,z,w，若

$$a^x=b^y=c^z=70^w,\quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{w},$$

求证：$a+b=c$。

证 由 $a^x=b^y=c^z=70^w$，得

$$a^{\frac{1}{w}}=70^{\frac{1}{x}},\quad b^{\frac{1}{w}}=70^{\frac{1}{y}},\quad c^{\frac{1}{w}}=70^{\frac{1}{z}}.$$

所以

$$(abc)^{\frac{1}{w}}=70^{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)},$$

$$abc=70.$$

因为 x,y,z,w 均不等于0，从 $a^x=b^y=c^z=70^w\neq 1$ 知 a,b,c 均不为1。又$70=2\times5\times7$，而2,5,7为质数，所以$70=2\times5\times7$是分解因数的唯一方法。由于 $abc=70$，$a\leqslant b\leqslant c$，所以

$$a=2,\ b=5,\ c=7,$$

$$a+b=c.$$

例10 已知 $A=6\lg p+\lg q$，其中 p,q 为质数，且满足 $q-p=29$，求证：$3<A<4$。

证 从 p,q 为质数且 $q-p=29$ 可知：p 与 q 必为一奇一偶，而既是偶数又是质数的数只有2，故 $p=2$，$q=31$。

$$\begin{aligned}A&=6\lg p+\lg q=6\lg 2+\lg 31\\&=\lg 2^6\cdot 31=\lg 1984.\end{aligned}$$

因为 $$1000<1984<10000,$$

所以 $$\lg 1000<\lg 1984<\lg 10000,$$

即 $$3<A<4.$$

例11 证明不等式(不查表)

$$\sin 1<\log_3\sqrt{7}.$$

证 因为$\sin 1<\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}<\frac{7}{8}$，又

$$2187=3^7<7^4=2401,$$

所以 $\log_3 3^7<\log_3 7^4$，即$\frac{7}{8}<\log_3\sqrt{7}$。于是 $\sin 1<\log_3\sqrt{7}$。

3. 常用对数问题

现在讨论有关常用对数特殊的计算问题，主要是关于首数和尾数的问题。

例11 若47^{100}是168位数，问 47^{17} 是几位数？

解 因为 47^{100} 是168位数，所以

$$167\leqslant \lg 47^{100}=100\lg 47<168,$$

$$1.67\leqslant \lg 47<1.68,$$

$$28.39\leqslant 17\lg 47<28.56.$$

故 $\lg 47^{17}$ 的首数是28，47^{17} 是29位数。

例12 已知 $0.301029<\lg 2<0.301030$,

$$0.477120<\lg 3<0.477121,$$

求 2000^{1989} 的首位数字。

分析 为了求大于 1 的整数M的首位数字$a(1\leqslant a\leqslant 9)$，则先确定它的位数 n，然后由

$$a\cdot 10^{n-1}\leqslant M<(a+1)\cdot 10^{n-1},$$

即 $(n-1)+\lg a \leqslant \lg M < (n-1)+\lg(a+1)$

定出 a 的值。

解 $\lg 2000^{1989}=1989(3+\lg 2)$。因为

$$0.301029<\lg 2<0.301030,$$

所以

$$6565.746681<\lg 2000^{1989}<6565.748670.$$

因此 2000^{1989} 是6566位数。又

$$0.746681>1-0.301030>1-\lg 2=\lg 5,$$

$$0.748670<0.301029+0.477120<\lg 2+\lg 3=\lg 6,$$

所以

$$6565+\lg 5<\lg 2000^{1989}<6565+\lg 6.$$

故2000^{1989}的首位数字是 5 。

例13 证明$(\sqrt{65}-8)^{100}$的 小数表示式中第一个有效数字前至少有121个零($\lg 2=0.3010$)。

证 因为

$$0<\sqrt{65}-8=\frac{1}{\sqrt{65}+8}<\frac{1}{8+8}=\frac{1}{16},$$

所以 $$0<(\sqrt{65}-8)^{100}<16^{-100}.$$

$$\begin{aligned}\lg(\sqrt{65}-8)^{100}<\lg 16^{-100}&=-100\times 4\lg 2\\&=-400\times 0.3010\\&=-120.4=\overline{121}.6,\end{aligned}$$

因此，$(\sqrt{65}-8)^{100}$的 小数表示式中第一个有效数字前面至少有121个零。

例14 已知 x 和 y 都是正整数，它们的常用对数的尾数之和等于 1 ，x^2y 的常用对数的首数是 3 ，求 x,y 的 值。

解 令

$$\lg x = a + m,\ \lg y = b + n.$$

由x,y是正整数，知首数a,b都是非负整数。尾数m,n满足$0 \leqslant m < 1$，$0 \leqslant n < 1$，由题设$m + n = 1$，故m,n都是正的纯小数，所以

$$\begin{aligned}\lg(x^2y) &= 2\lg x + \lg y = 2a + 2m + b + n \\ &= (2a + b + 1) + m.\end{aligned}$$

因$0 < m < 1$，故$2a + b + 1$是$\lg(x^2y)$的首数，因而$2a + b + 1 = 3$，即$2a + b = 2$。所以，只能有$a = 0$，$b = 2$，或$a = 1$，$b = 0$。下面分别讨论之。

（1）若$a = 0$，$b = 2$，由$\lg xy = a + b + m + n = 3$，得$xy = 1000$。此时$x$是一位数，$y$是三位数，所以有四组解：

$$\begin{cases}x = 2,\\ y = 500;\end{cases}\quad \begin{cases}x = 4,\\ y = 250;\end{cases}\quad \begin{cases}x = 5,\\ y = 200;\end{cases}\quad \begin{cases}x = 8,\\ y = 125.\end{cases}$$

（2）若$a = 1$，$b = 0$，则$\lg xy = 2$，$xy = 100$，由于x是二位数，y是一位数，这时有三组解：

$$\begin{cases}x = 20,\\ y = 5;\end{cases}\quad \begin{cases}x = 25,\\ y = 4;\end{cases}\quad \begin{cases}x = 50,\\ y = 2.\end{cases}$$

4. 杂题

这部分讨论几个与指数、对数有关的综合问题。

例15 已知x,y,z是正数，且$3^x = 4^y = 6^z$。

（1）求满足$2x = py$的p的值。

（2）求与满足（1）的p最接近的整数。

（3）证明：$\frac{1}{2y}=\frac{1}{z}-\frac{1}{x}$。

解 （1）由$3^x=4^y$，得

$$x=\log_3 4^y=y\log_3 4,\quad 2x=(2\log_3 4)y.$$

所以
$$p=\log_3 16.$$

（2）因 $\log_3 9<\log_3 16<\log_3 27$，所以$2<p<3$。又因为

$$3-\log_3 16=\log_3\frac{27}{16},\quad \log_3 16-2=\log_3\frac{16}{9},$$

而$\frac{27}{16}<\frac{16}{9}$，所以

$$\log_3\frac{27}{16}<\log_3\frac{16}{9}.$$

故$3-p<p-2$，即与p最接近的整数是3。

（3）由题设等式可得

$$3^{\frac{1}{2y}}=2^{\frac{1}{x}},\qquad 6^{\frac{1}{2y}}=2^{\frac{1}{z}},$$

所以
$$2^{\frac{1}{2y}}=2^{\frac{1}{z}-\frac{1}{x}},$$

即
$$\frac{1}{2y}=\frac{1}{z}-\frac{1}{x}.$$

说明　若$k\leqslant p<k+1$，找与p最接近的整数时，只须比较$k+1-p$与$p-k$的大小。

例16　已知$\lg x$，$\lg\frac{100}{x}$的首数分别是a和b，当x取遍所有正数时，$3a^2-4b^2$的最大值是多少？

解 设$\lg x=a+m,\lg\dfrac{100}{x}=b+n(0\leqslant m,n<1)$，则

$$a+b+m+n=\lg x+\lg\frac{100}{x}=2.$$

故$m+n$是整数．由于$0\leqslant m+n<2$，所以，$m+n$等于0或1．

(1) 若$m+n=0$，则$a+b=2$．于是

$$3a^2-4b^2=3a^2-4(2-a)^2=-(a-8)^2+48,$$

所以，当$a=8$时，$3a^2-4b^2$有最大值48，此时$x=10^8$．

(2) 若$m+n=1$，则$a+b=1$，于是

$$3a^2-4b^2=3a^2-4(1-a)^2=-(a-4)^2+12,$$

故当$a=4$时，$3a^2-4b^2$有最大值12，此时$10^4\leqslant x<10^5$．

综上所述，当$x=10^8$时，$3a^2-4b^2$有最大值48．

例17 已知m,n,k为自然数，且$n\geqslant3$，求证：以2为底数2^m+k+1的对数不等于$n+\log_2k$．

证 欲证$\log_2(2^m+k+1)\neq n+\log_2k$，只需证

$$2^m+k+1\neq2^n\cdot k,$$

即

$$2^m+1\neq k(2^n-1).$$

所以只要证明2^m+1不能被2^n-1整除即可．

当$m=n$时，$\dfrac{2^m+1}{2^n-1}=1+\dfrac{2}{2^n-1}$，故

$$2^n-1\nmid 2^m+1.$$

当$m<n$时，$\dfrac{2^m+1}{2^n-1}\leqslant\dfrac{2^{n-1}+1}{2^{n-1}+1+2^{n-1}-2}<\dfrac{2^{n-1}+1}{2^{n-1}+1}=1$，

所以