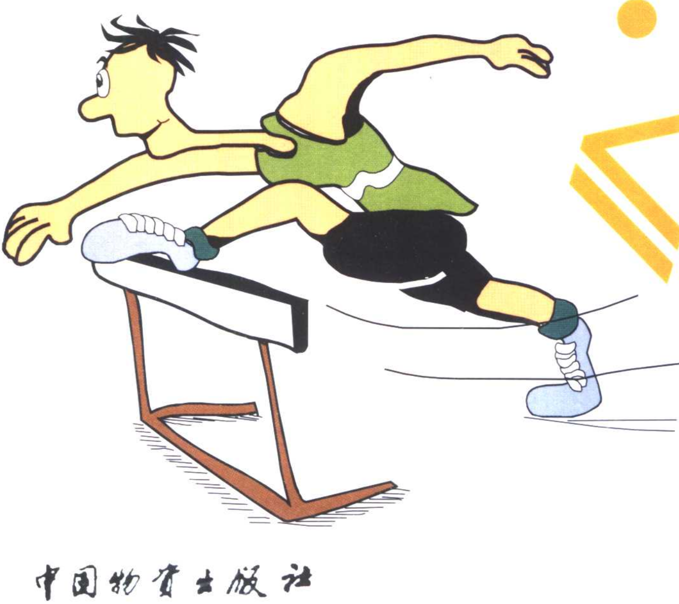
奥林匹克数学 普及讲座丛书（之三）

丛书主编 周春荔

初中数学竞赛中的数论初步

彭 林 李贤军 周春荔 编著



中国物资出版社

周春荔主编　奥林匹克数学普及讲座丛书(之三)

初中数学竞赛中的数论初步

彭林　李贤军　周春荔编著

中国物资出版社

图书在版编目(CIP)数据

初中数学竞赛中的数论初步/彭林等编著. —北京：中国物资出版社，2004.8

(奥林匹克数学普及讲座丛书：3)

ISBN 7－5047－2201－4

Ⅰ.初…　Ⅱ.周…　Ⅲ.代数课—初中—教学参考资料 Ⅳ.G634.663

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 070196 号

责任编辑　黑俊贵
责任印制　方鹏远
责任校对　王　莉

中国物资出版社出版发行
网址：http://www.chph.cn
社址：北京市西城区月坛北街 25 号
电话：(010)68589540　邮编：100834
全国新华书店经销
北京才智印刷厂印刷

开本：850×1168mm　1/32　印张：7.375　字数：158 千字
2004 年 8 月第 1 版　2004 年 8 月第 1 次印刷
书号：ISBN 7－5047－2201－4/G·0461
印数：0001—8000 册
定价：12.00 元

内 容 提 要

本册内容是对初中学生整数知识的自然延拓与扩充，内容包括整数与整除、整除知识的深化、余数问题、不定方程初步。通过对初中数学竞赛的整数问题的分类讲解与练习，夯实基础知识、发展逻辑思维能力，领悟数学思想，培养创新意识。内容由浅入深，按知识系统讲解逐步提高。适于自学初等数论的初步知识，各章配有精选的练习题和解答，供练习选用。既可做学生学习奥林匹数学的教材，又可做培训教练员的参考书。

序 言

2002年暑期，在从西安返京的列车上，遇到了中国物资出版社的副编审黑俊贵女士。我们谈到了数学奥林匹克，她很感兴趣。诚挚地写本数学奥林匹克的书在该社出版，为数学爱好者提供一份“营养套餐”。

回到北京，写书的事一直没有排上日程。后来，经过一催再促，才抽空草拟了个编写提纲。直到2003年春，才着手本套书的写作。

专门以十几岁的中学生为对象的现代意义下的数学竞赛，人们公认为起源于匈牙利。匈牙利的数学竞赛自1894年起至今已有百余年历史，每次竞赛出3道题，限4小时完成，允许使用参考书。试题别具风格，常常有高等数学背景，却用初等数学知识就可以解答。

匈牙利的数学竞赛造就了一批数学大师或科学巨匠。被称为匈牙利现代数学之父的费叶尔(1880—59)，著名力学家，现代航天事业的奠基人冯·卡门(1881—33)，著名的组合数学家寇尼希(1884—44)，群上测度与积分论的创始人哈尔(1885—1933)，泛函分析的奠基者之一黎斯(1880—1956)，著名分析学家舍贵(1895—)，拉多(1895—1965)等，都是早期的数学竞赛优胜者。这些事例表明，数学竞赛是发现和造就人才的一个重要途径。

1934年苏联列宁格勒大学主办了中学生数学奥林匹克，首次把数学考试与“奥林匹克”联系起来；1935年又由莫斯科大学主办

了中学生数学奥林匹克,受到广大师生的热烈欢迎。以后不少苏联的加盟共和国也相继举办数学奥林匹克。1961年开始举办全俄数学奥林匹克,1967年举办全苏数学奥林匹克。人们发现,前苏联基础教育阶段的高水平的数学教育与数学奥林匹克存在着一定的联系。20世纪中叶,世界出现了一个举办中学生数学竞赛的热潮。这个世界性的中学生数学奥林匹克热潮与新数学运动大体同时起步,但新数运动早已偃旗息鼓,而数学竞赛则正如火如荼。

世界各国的中学生数学竞赛活动的开展为国际数学奥林匹克(International Mathematical Olympiad)的产生创造了条件,而国际数学奥林匹克(IMO)的产生与发展又推动了各地区、各国数学竞赛的发展。第一届国际数学奥林匹克(IMO)于1959年7月在罗马尼亚古都布拉索(位于布加勒斯特西北约200公里)拉开帷幕,这是数学竞赛跨越国界的创举。至今除1980年因故未举办外,到2003年已经举办了44届。1990年在北京举办第31届IMO时,已发展到54个国家或地区(308人),此后又逐年陆续增加到80多个队,约500人的规模。如今IMO已经成为国际上一项最有影响的学科竞赛,同时也是公认的水平最高的中学生数学竞赛。

1980年国际数学教育委员会决定成立IMO分委员会(1981年正式成立),负责安排每年活动的组织者。从第22届IMO开始,IMO更走向成熟。IMO的运作已经制度化、规范化,选手的水平也大大提高。随着数学竞赛的发展,已逐渐形成一门特殊的数学学科——竞赛数学。数学奥林匹克的兴旺发展,影响了其他学科竞赛的发展,如物理、化学、生物、信息等国际奥林匹克相继兴起,国际学科竞赛已经成为一股促进学科教育发展的世界性潮流。

在2002年世界数学家大会期间及会后,不少人提出了一个十分有意思的话题:参加过历届国际数学奥林匹克的选手中有没有人拿到过菲尔兹奖?巧得很,2002年7月国际数学奥林匹克(香港)委员会主席岑嘉评教授为此专门撰文,我们仅摘录了IMO的优胜者后来获得菲尔兹奖的人的名字。

姓 名	国 籍	参加 IMO 时间	获奖时间
Gregory Margulis	俄罗斯	1959 年银牌	1978 年菲尔兹奖
Valdimir Drinfeld	乌克兰	1969 年金牌	1990 年菲尔兹奖
Jean – Ghristoophe Yoccoz	法国	1974 年金牌	1994 年菲尔兹奖
Richard Borcherds	英国	1977 年金牌 1978 年银牌	1998 年菲尔兹奖
Timothy Gowers	英国	1981 年金牌	1998 年菲尔兹奖
Laurant Lafforgue	法国	1985 年金牌	2002 年菲尔兹奖

我国的中学生数学竞赛活动是与 20 世界 50 年代向苏联学习分不开的。

1946 年华罗庚应邀访苏三个月，看到苏联大学中有很多学生学数学，例如，格鲁吉亚的一个大学的 2000 多学生中就有 600 多个学生学数学。华罗庚问："你们这么多数学学生，将来毕业后，有些什么出路呢?"友人答的很妙："头脑受过数学训练的人，你担心他们会没有出路吗?"大数学家维诺格拉朵夫也说："数学是科学之母，一个国家如果数学不发达，其他都谈不上。"华罗庚听了柯尔幕哥洛夫与阿历山德罗夫为参赛中学师生的两次讲演。这样两位著名数学家，利用星期天休假给十五六岁的学生作讲演，那种诲人不倦，传播数学给一般人民的精神使华罗庚深受感动。除教室中席无虚座外，窗口上也挤满了人，其间还有白发苍苍的老年中学教师，他们是专程来听这些著名学者的讲演而求进步的。这些在华罗庚心中"埋藏了在中国倡办数学竞赛活动及数学普及活动的种子。"

1956 年，在华罗庚、苏步青、江泽涵等我国老一辈数学家的倡导下，由中国数学理事会发起，经高等教育部和教育部同意，我国举行了首次中学生数学竞赛，这次只在北京、天津、上海、武汉试办。待取得经验后，再逐步推广。据不完全统计，除 1959 年、1961 年中断外，1964 年前每年都有一些城市举办数学竞赛。这一时期，我国数学竞赛的势头良好，竞赛方式，试题难度，选手水平都与国

际持平。从 1965 年起到 1977 年,我国的数学竞赛因文革而中断了 13 年。这一时期的数学竞赛优胜者在文革后不少显露头角,正如王元院士在《数学竞赛之我见》中指出的:"要用事实说明数学竞赛活动的成就。例如,仅仅'文革'前的几次低层次数学竞赛中,已有一些竞赛优胜者成才了。如上海的汪嘉冈、陈志华,北京的唐守文、石赫,他们现在已经是国内的著名中年数学家,有的已获博士导师资格。他们在文革中都被耽误了 10 年,否则完全会有更大成就。"

中国数学竞赛的国内成熟期是在 1978 年以后。1978 年粉碎了四人帮后迎来了科学的春天,4 月中旬,国务院批准全国举办数学竞赛,组织北京、上海、天津、陕西、安徽、四川、辽宁、广东 8 省市举办中学生数学竞赛,由方毅副总理任竞赛委员会主任,由中科院副院长中国数学会理事长华罗庚教授任竞赛委员会副主任,4 月 25 日召开了竞赛委员会第一次会议,确定了命题原则、竞赛方法、和推荐优秀学生免试进入大学的办法。全国有 20 万在校生参加。参加决赛的青少年,年龄最大的 19 岁,最小的 14 岁。多数是高中生,但也有少数的初中生。除上述 8 个省市之外,1978 年福建省,福州市,山西省等也组织了数学竞赛。

邓小平同志肯定了这次竞赛,方毅同志批示说:"这是发现人才,出人才的好方法之一,今后拟继续坚持下去。"由于 1979 年全国出现了竞赛过热形势,1980 年全国停办数学竞赛。教育部和各省的教育行政部门不再组办数学竞赛,我国的中学生数学竞赛转为民办。1981 年由中国数学会普及工作委员会,北京数学会发起全国高中数学联合竞赛,25 个省市参加,1982 年由上海组办,28 省市参加。以后各省市轮流组办,由中国数学会普及工作委员会进行调节,至今都采取这个模式。1984 年开始,举办全国初中数学联赛,也是采取上述模式。从 1991 年开始,中国数学会普及工作委员会举办小学生数学奥林匹克。

敬爱的华罗庚教授于 1985 年 6 月 12 日在出访日本讲学时因

心脏病突发而逝世,享年75岁。为了弘扬华罗庚教授的爱国主义精神,学习华老勤奋学习、献身科学的优秀品质,激发广大中小学生学习数学的兴趣,开发智力,普及数学科学,于1986年由中国少年报社、中国优选法统筹法与经济数学研究会、中国数学会、中央电视台、中国科协青少部共同举办了首届“华罗庚金杯”少年数学邀请赛。当时的胡耀邦总书记亲为“华罗庚金杯”题字。参赛学生是小学高年级和初一学生,每两年举办一届。自2003年第9届起,改为每年一届。

自1990年开始,“双法”学会数学教育委员会举办“希望杯”全国数学邀请赛。对象是初一、初二、高一、高二共四个年级。前中国数学奥委会主席王寿仁教授说:全国初中、高中数学联赛和全国希望杯数学邀请赛,好比我的左右手,缺一个都不好,我都支持。从2002年又有了小学希望杯数学邀请赛,也很受学生欢迎。

从1985年派观察员和两名学生参加IMO以来,我国参加IMO的准备工作由中国数学会的中国数学奥林匹克委员会领导。先由各省市的全国高中数学联赛优胜者参加全国数学冬令营(也叫《中国数学奥林匹克》),从中选出20余名学生进国家集训队,集训队由高校教师进行培训,经过三个月后,通过考试评估由教练组投票表决选出参加IMO的6名选手,再经过一个月的培训,于每年7月出国参加IMO比赛。从1988年至2003年的17次IMO,我国取得10次团体总分第一名,共获金牌71枚,占我国参赛选手的69.6%,我国的选手在IMO比赛中的优异成绩标志着我国数学教育的优异水平。

如今,奥林匹克数学教育的作用已被多数国民所公认。激发青少年学习数学的兴趣,有助于早期智力开发,有助于发现和培养人才。数学竞赛推动了数学知识的普及,促进数学教师知识水平的提高,是数学改革的试验田。因此奥林匹克数学教育是较高层次的基础教育,开发智力的素质教育,生动活泼的课外教育,现代数学的普及教育。理应大家更好地培育它、研究它和发展它!

随着人类进入21世纪,我国的数学奥林匹克又有新的发展。2001年在古城西安举办了首届中国西部数学奥林匹克;此外,2002年在珠海举办了首届中国女子数学奥林匹克(CGMO),我国的数学竞赛活动正在21世纪的改革浪潮中与时俱进地向前发展!

数学是一门基础课。义务教育新课标的推行为数学爱好者提供了时间与空间,可以充分地发展自己的数学爱好,更好地提高数学能力。为此,初中阶段必须较系统地打好数学的基础。不但要学好代数,还要学好平面几何与数论初步,领悟数学的思想方法。本套丛书就是为此目的做的一种尝试,分为《初中数学竞赛中的代数问题》、《初中数学竞赛中的平面几何》、《初中数学竞赛中的数论初步》、《初中数学竞赛中的思维方法》四册。希望与广大初中生能在学习实践中切磋学好数学的体验,共同探索一条能使多数人具备较高的数学素养的学习途径。

首都师范大学数学系　周春荔

目　录

第1章　整　除

在日常生活中，我们会遇到许多有趣而又耐人寻味的问题：

某同学到文具店买了七个一角二分钱的本子、五个六分钱的铅笔和三个活页夹子．售货员收了他三元钱，并找还三角七分钱．这个同学马上对售货员说："您的账算错了！"你能知道他为什么这样快就知道"算错了账"吗？

排练团体操时，要求队伍变成10行、15行、18行、24行时，队形都能成为矩形．问最少需要多少人参加团体操的排练？

同学们，你能不能回答这样的问题呢？

让我们还是从数的整除性的基础知识谈起．

§1.1　十进制整数

在小学数学中，我们主要学习的是整数的运算，不知同学们想过没有，整数是怎样表示的？"逢十进一"是什么意思？

我们通常接触到整数都是十进制的整数．十进制记数法就是采取逢十进一的法则进行记数的方法．例如，1995就是由1个一千，9个一百，9个十和1个五组成的，因此1995这个数可以写成

$$1995=1\times1000+9\times100+9\times10+5.$$

想一想

对于任意一个 $n+1$ 位的正整数怎样用这种形式表示？

为了表达方便，我们经常把用字母表示数字的多位数，在这个多位数上面加一横线，以避免和乘法混淆，例如，$\overline{37a56}$就表示一个五位数．

例 1 证明:形如$\overline{abcabc}$的六位数总能被 7、11、13 整除.

证明:将已知的六位数写成十进制表达形式,得

$$\begin{aligned}\overline{abcabc} &= a\times10^5+b\times10^4+c\times10^3+a\times10^2+b\times10+c\\&=a\times(10^5+10^2)+b\times(10^4+10)+c\times(10^3+1)\\&=a\times100100+b\times10010+c\times1001\\&=1001\times(100a+10b+c)\\&=7\times11\times13(100a+10b+c).\end{aligned}$$

∴$\overline{abcabc}$总能被 7,11,13 整除.

例 2 已知$\overline{abcd}$是一个四位数,且$\overline{abcd}-\overline{dcba}=\square999$,问"□"代表几?

解:将$\overline{abcd}$及$\overline{dcba}$用十进制表示出来,并求差,得$\overline{abcd}-\overline{dcba}=9(111a+10b-10c-111d)$.

可见,两数之差为 9 的倍数,从而□999 也应是 9 的倍数,故□+9+9+9 也是 9 的倍数,得"□"代表 9 或 0,由题意知 0 舍去. 所以□代表 9.

例 3 试证明:当$\overline{abc}$是 37 的倍数时,$\overline{bca}$也是 37 的倍数.

证明:∵$\overline{abc}=100a+10b+c$,$\overline{bca}=100b+10c+a$,

$$\begin{aligned}\therefore\overline{bca}&=10(100a+10b+c)-999a\\&=10\times\overline{abc}-27\times37a.\end{aligned}$$

故当$\overline{abc}$是 37 的倍数时,$\overline{bca}$也一定是 37 的倍数.

练一练

试证明:当$\overline{bca}$是 37 的倍数时,$\overline{cab}$也是 37 的倍数.

例 4 有一种室内游戏,魔术师要求某参赛者想好一个三位数$\overline{abc}$,然后,魔术师再要求他记下五个数$\overline{acb}$、$\overline{bac}$、$\overline{bca}$、$\overline{cab}$、$\overline{cba}$,并把这五个数加起来求出和 N,只要讲出 N 的大小,魔术师就能说出原数$\overline{abc}$是什么. 如果 $N=3194$,请你确定$\overline{abc}$.

解:由题意,得

$$\overline{acb}+\overline{bac}+\overline{bca}+\overline{cab}+\overline{cba}=3194.$$

两边加上$\overline{abc}$,得

$222(a+b+c)=3194+\overline{abc}$,

$\therefore$　$222(a+b+c)=222\times14+86+\overline{abc}$.

$\therefore$　$\overline{abc}+86$ 是 222 的倍数，且 $a+b+c>14$.

设$\overline{abc}+86=222n$，考虑到$\overline{abc}$是三位数，依次取 $n=1,2,3,4$，分别得出$\overline{abc}$的可能值为 136,358,802，结合 $a+b+c>14$，知$\overline{abc}=358$.

练一练

一个三位数的各位数字互不相同，把它的各位上的数字任意交换位置，又可得到五个三位数，若这六个三位数的和等于 2220，那么在所有满足条件的三位数中，最小的三位数是多少？

答案：127.

例 5　有一个若干位的正整数，它的前两位数字相同，且它与它的反序数（$\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}$ 与 $\overline{a_0a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n}$互为反序数，其中 $a_0\neq0$，$a_n\neq0$）之和为 10879，求原数．

分析：首先需要确定原数是几位数，若原数是五位数，则它最小是$\overline{11\times\times\times}$，已大于 10879，与已知条件不符；若原数是三位数，则原数与它的反序数之和最大是 $2\times999=1998$，还小于 10879，亦与已知条件不符，故原数必为四位数．

解：由已知可推得原数为四位数，又根据它的前两位数字相同，可设原数为$\overline{aabc}$，其中 $a\geqslant1$，$c\geqslant1$，则它的反序数为$\overline{cbaa}$. 由题意，得

$\overline{aabc}+\overline{cbaa}=10879$,

$\therefore$　$(10^3a+10^2a+10b+c)+(10^3c+10^2b+10a+a)=10879$,

$\therefore$　$1001(a+c)+110(a+b)=10879$,　①

比较①式两边的末位数，得

$a+c=9$.　②

将②代入①，得　$a+b=17$.

$\because$　$a=17-b\geqslant17-9=8$，且 $c\geqslant1$,

$\therefore$　只有 $a=8$.

分别代入①②,得　$c=1,b=9$.

故原数为 8891.

例 6　一个正整数 N 的各位数不全相等,如果将 N 的各位数字重新排列,必可得到一个最大数和一个最小数,若最大数与最小数的差正好等于原来的数 N,则称 N 为"拷贝数",试求所有的三位"拷贝数".

解:设 N 为所求的三位"拷贝数",它的各位数字分别为 a,b,c(a,b,c,不全相等),将其数码重新排列后,连同原数共得到 6 个三位数:$\overline{abc}$,$\overline{acb}$,$\overline{bac}$,$\overline{bca}$,$\overline{cab}$,$\overline{cba}$. 设其中最大数为$\overline{abc}$,则最小数为$\overline{cba}$,根据"拷贝数"的定义,得

$$\begin{aligned}N &= \overline{abc} - \overline{cba} \\ &= (100a + 10b + c) - (100a + 10b + a) \\ &= 99(a - c).\end{aligned}$$

0 可知 N 为 99 的整数倍,这样的三位数可能是 198,297,396,495,594,693,792,891,990. 这 9 个数中,只有 $954-459=495$.

故 495 是唯一的三位"拷贝数".

练一练

卡片上写有一个三位数(个位数字不是零),将这个三位数的个位数字与百位数字对调,记这两个三位数的差(大数减小数)为 m,且 m 也是一个三位数. 又将 m 的个位数字与百位数字对调后的三位数记为 n,则 $m+n$ 等于多少?

答案:1089.

例 7　甲、乙、丙 3 个人的年龄满足下列 4 个条件:

(1)甲的年龄是一个两位数;

(2)把甲的年龄的两位数字对调就是乙的年龄;

(3)甲的年龄与乙的年龄的差的$\frac{1}{3}$就是丙的年龄;

(4)乙的年龄是丙的年龄的 15 倍.

分析：本题可根据条件(1)设出甲的年龄，再由(2)、(3)两个条件把乙和丙的年龄用甲的年龄的代数式表示出来，然后由条件(4)列出方程．

解：由条件(1)，设甲的年龄为$\overline{ab}(a>b\geqslant 1)$由(2)知乙的年龄为$\overline{ba}$，由(3)知丙的年龄为$\frac{1}{3}(\overline{ab}-\overline{ba})$．根据条件(4)，得

$$\overline{ba}=15\times\frac{1}{3}(\overline{ab}-\overline{ba})$$

即　$5\times\overline{ab}=6\times\overline{ba}$，

∴　$5(10a+b)=6(10b+a)$，

∴　$4a=5b$.

∴　a 是 5 的倍数，b 是 4 的倍数．

∵　$a>b\geqslant 1$，

∴　只有 $a=5$，$b=4$.

故甲、乙、丙的年龄分别是 54，45，3.

例 8　某人驾使汽车从甲地出发到乙地需 1 小时，继续行驶 1 小时 45 分到达丙地．汽车速度一定，甲、乙两地路程是$\overline{ab}$千米，乙、丙两地路程是$\overline{ba}$千米，现在知道从甲地经乙地到丙地的路程不少于 100 千米，试问从甲到乙地的路程是多少千米？

解：速度一定，路程与时间成正比知

$$\frac{\overline{ab}}{\overline{ba}}=\frac{1}{1\frac{3}{4}},$$

∴　$7\,\overline{ab}=4\,\overline{ba}$，

∴　$7(10a+b)=4(10b+a)$，∴　$b=2a$.

又　$\overline{ab}+\overline{ba}=(10a+b)+(10b+a)$

$=11(a+b)$

$=11(a+2a)$

$=33a\geqslant 100$，

∴　$a\geqslant 4$.