中学数学奥林匹克丛书

代数恒等变形

ZHONGXUESHUXUE AOLINPIKECONGSHU

主　编：梅向明
副主编：张君达

北京师范学院出版社

中学数学奥林匹克丛书

代数恒等变形

主编　梅向明　　副主编　张君达
作者　乔家瑞　陈娴　董士奎

北京师范学院出版社
1988年·北京

主编：梅向明

副主编：张君达

编委：（以姓氏笔划为序）

何裕新 张君达 周春荔

赵大悌 唐大昌 梅向明

中学数学奥林匹克丛书

代数恒等变形

主编：梅向明　　副主编：张君达

作者：乔家瑞 陈娴 董士奎

•

北京师范学院出版社出版

（北京阜成门外花园村）

新华书店首都发行所发行

国防科工委印刷厂印刷

•

开本：787×1092　1/32　印张：6.75字数：146千

1988年12月北京第1版　1988年12月北京第1次印刷

印数：00，001—13，000 册

ISBN7—81014—175—9/G·165

定价：2.00 元

前　言

在浩瀚的数学史册之中，记载着人们由于企图解一些数学难题而使基础理论得到突破性发展的光辉业绩。无论是无理数的引入，非欧几何的诞生，还是群论的发展等，都毋庸置疑地证明了这一点。反过来，基础理论的发展又为数学家们提出了诱人兴趣的难题。

奥林匹克运动起源于古希腊(公元前776年)，这是力量、灵活与美的竞赛。“数学是思维的体操”，解数学难题的竞赛同样被称为数学奥林匹克。

1959年，罗马尼亚向东欧七国提议举办第一届“国际数学竞赛”，简称 IMO (International Mathematical Olympiad)，以后每一年举行一次，参加的国家逐渐增多。这便是沿袭至今的“国际中学生数学奥林匹克”。

1956年在我国北京，上海等地开始举办省、市一级的高中数学竞赛，1978年开始举行全国性高中数学竞赛；1983年开始举行全国性初中数学竞赛，以后每年举行一次。同时，我国中学生还参加了其他国家举办的一些中学生数学的通讯比赛。

多年的数学竞赛实践证明，广泛与深入地开展中、小学的数学课外活动，科学与合理地举办各级数学竞赛是促进数学教育的发展，提高我国青少年数学素质的一个积极因素。

面临高难度的国际中学生数学竞赛，为使我国中学生在IMO中能跻身于世界数学强国之列，我们尤为突出地感到亟须研究与探讨IMO选手的培训方式、教材以及相应的教

育手段。

1985年4月北京数学会创办了北京数学奥林匹克学校，三年来，在全体教师和工作人员的努力下，在教育部门与家长的大力支持下，北京数学奥林匹克学校为提高青少年的数学素质，培养数学优秀人才作出了一定的贡献。学校的学生在“华罗庚金杯”少年数学邀请赛，高、初中全国数学联赛以及IMO中取得了一定的成绩。

然而，这仅仅是开始！当我们踏上攀登数学奥林匹克高峰的征途时，我国的中学生以及他们的教练员将肩负着光荣而艰巨的任务。

为进一步探讨数学业余学校的教材建设问题，在对三届学生施教实验的基础上，我们编写了《中学数学奥林匹克丛书》。希望《丛书》能为数学业余学校提供选读教材，能为老师与家长辅导学生提供参考资料，能成为中学生课余数学学习的良师益友。

由于我们水平有限，教学实践经验又不很充足，这套《丛书》一定会有很多欠缺之处，希望各省、市数学奥林匹克教练员和学生们以及广大的专家、读者批评指正。

梅向明　张君达

1988年2月2日

目 录

第一章　因式分解

因式分解是中学数学的重要基础知识，是解方程及代数式以及三角式变形中的有力工具．同时，因式分解的方法灵活多变，技巧性很强．

§1　拆项和添项

拆项是将代数式中的某项拆成两项或几项的代数和的一种恒等变形，添项是特殊的拆项，即把零拆成两个相反项的和．由于多项式乘法中有时需要合并同类项，而因式分解是整式乘法的逆运算，所以在因式分解时，当直接分组分解难以进行时，通过适当的拆项或添项，造成使用提公因式或公式法进行分组分解的范式．

例1　分解因式　$x^3+9x^2+26x+24$．

分析：原式不缺项，所以使用拆项分组分解．按每组各项系数对应成比例的原则分为三组，每组两项．把二次项 $9x^2$ 和一次项 $26x$ 分别拆为两项，使三组系数比为：$1:2=7:14=12:24$．

解　原式$=(x^3+2x^2)+(7x^2+14x)+(12x+24)$

$$=x^2(x+2)+7x(x+2)+12(x+2)$$

$$=(x+2)(x+3)(x+4).$$

例2 分解因式 $bc(b+c)+ca(c-a)-ab(a+b)$。

分析：注意到 $(b+c)-(a+b)=c-a$，所以用添项分组分解，即添加“$0=b-b$”。

解 原式 $=bc(b+c)+ca[(b+c)-(a+b)]-ab(a+b)$

$$=c(b+c)(b+a)-a(a+b)(c+b)$$

$$=(a+b)(b+c)(c-a)。$$

例3 计算 $\underbrace{99\cdots9}_{n个}\times\underbrace{99\cdots9}_{n个}+\underbrace{199\cdots9}_{n个}$。

分析：将$\underbrace{199\cdots9}_{n个}$拆成$\underbrace{100\cdots0}_{n个}+\underbrace{99\cdots9}_{n个}$或拆成$2\times\underbrace{99\cdots9}_{n个}+1$。

解法一 原式 $=\underbrace{99\cdots9}_{n个}\times\underbrace{99\cdots9}_{n个}+\underbrace{99\cdots9}_{n个}+10^n$

$$=\underbrace{99\cdots9}_{n个}(\underbrace{99\cdots9}_{n个}+1)+10^n$$

$$=10^n(\underbrace{99\cdots9}_{n个}+1)$$

$$=10^n\times10^n$$

$$=10^{2n}。$$

解法二 原式 $=\underbrace{99\cdots9}_{n个}{}^2+2\times\underbrace{99\cdots9}_{n个}+1$

$$=(\underbrace{99\cdots9}_{n个}+1)^2$$

$$=(10^n)^2$$

$$=10^{2n}。$$

例4 分解因式 $a^3+b^3+c^3-3abc$。

分析：原式中出现a^3+b^3，可考虑用公式$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$，故添加$3ab(a+b)$，$-3ab(a+b)$两项，

使a^3+b^3化成$(a+b)^3$与c^3相加，得到因式$a+b+c$，再继续分解。

解 原式$=a^3+b^3+3ab(a+b)+c^3-3ab(a+b)-3abc$

$$=(a+b)^3+c^3-3ab(a+b+c)$$

$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc).$$

说明：$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$可看作一个常用公式，利用这个公式可直接分解因式。如

分解因式 $x^3-8y^3-z^3-6xyz$.

解 原式$=x^3+(-2y)^3+(-z)^3-3x(-2y)(-z)$

$$=(x-2y-z)(x^2+4y^2+z^2+2xy+xz-2yz).$$

若把上面公式反过来，得到

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)=a^3+b^3+c^3-3abc.$$

显然$a+b+c=0$时，$a^3+b^3+c^3-3abc=0$，于是得到

当$a+b+c=0$时，$a^3+b^3+c^3=3abc$。如

分解因式 $(x-y)^3+(y-x-2)^3+8$.

解 由于$(x-y)+(y-x-2)+2=0$,

所以

$$(x-y)^3+(y-x-2)^3+8$$

$$=3(x-y)(y-x-2)\cdot 2$$

$$=6(x-y)(y-x-2).$$

例5 求证 $2222^{5555}+5555^{2222}$能被7整除。

分析：要证明原式被7整除，即说明其式有7的因数。由于$2222=317\times7+3$，$5555=793\times7+4$。所以

$$7\mid(2222+4),\ 7\mid(5555-4).$$

或　$7\mid(2222-3)$，　$7\mid(5555+3)$。

因此添加$4^{5555}-4^{5555}+4^{2222}-4^{2222}$或添加$3^{5555}-3^{5555}+3^{2222}-3^{2222}$。而$5555^{2222}$是偶次幂，故$5555^{2222}+3^{2222}$得不出$5555+3$的因子，只能选用添加前者。

证明　$2222^{5555}+5555^{2222}$

$$
\begin{aligned}
&=(2222^{5555}+4^{5555})+(5555^{2222}-4^{2222})\\
&\qquad -(4^{5555}-4^{2222})\\
&=(2222+4)M+(5555-4)N-4^{2222}(4^{3333}-1)\\
&=7\times318M+7\times793N-4^{2222}(64^{1111}-1)\\
&=7(318M+793N-4^{2222}\times9P)。
\end{aligned}
$$

其中　$M=2222^{5554}-2222^{5553}\times4+\cdots-2222\times4^{5553}+4^{5554}$，

$N=5555^{2221}+5555^{2220}\times4+\cdots+4^{2221}$，

$P=64^{1110}+64^{1109}+\cdots+1$。

说明：本题应用了公式

$$
\begin{aligned}
&x^n-y^n\\
&=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\cdots+y^{n-1}),
\end{aligned}
$$

其中n为自然数；

$$
\begin{aligned}
&x^n+y^n\\
&=(x+y)(x^{n-1}-x^{n-2}y+\cdots-xy^{n-2}+y^{n-1}),
\end{aligned}
$$

其中n为正奇数。

练　习　一

1． 分解因式：

（1）　x^5+x+1；

（2）　$a^3b-ab^3+a^2+b^2+1$。

2. $x^2y-y^2z+z^2x-x^2z+y^2x+z^2y-2xyz$因式分解后的结果是：

(A) $(y-z)(x+y)(x-z)$；

(B) $(y-z)(x-y)(x+z)$；

(C) $(y+z)(x-y)(x+z)$；

(D) $(y+z)(x+y)(x-z)$.

3. 把1112222分解成两个连续的正整数的乘积，其中较大的那个正整数因数是多少？

§2 配 方 法

配方法通常是指$a^2\pm2ab+b^2=(a\pm b)^2$中左端缺少某些项需要配上缺项，使它成为一个完全平方的方法．配方主要有两种表现形式：配中项$2ab$，或配一个平方项b^2（或a^2）．配中项时要根据a^2、b^2找出a、b，决定$2ab$．配平方项b^2时．则要从a^2、$2ab$的具体表现形式中分析出a、b，添上b^2．在应用配方法分解因式时，常把多项式配成A^2-B^2的形式，使多项式分解成$(A+B)\cdot(A-B)$的形式．

例1 分解因式 $(m^2-1)(n^2-1)+4mn$.

分析：将$(m^2-1)(n^2-1)$展开得$(m^2n^2+1)-(n^2+m^2)$，把m^2n^2+1与n^2+m^2均配成完全平方，从而构成平方差形式，

解 原式$=(m^2n^2+2mn+1)-(n^2-2mn+m^2)$

$=(mn+1)^2-(n-m)^2$

$=(mn+1+n-m)(mn+1-n+m)$.

例2 试将$2^{1982}+1$分成均不小于10000的两个自然数的

乘积。

分析：因为$2^{1982}+1=(2^{991})^2+1$，故用配方法配中项。

解 $2^{1982}+1=(2^{1982}+2\cdot2^{991}+1)-2\cdot2^{991}$

$$=(2^{991}+1)^2-2^{992}$$

$$=(2^{991}+2^{496}+1)(2^{991}-2^{496}+1).$$

易知这两个因数均不小于10000。

例3 化简$\dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$.

分析：注意挖掘隐蔽条件.因为$2\sqrt{6}=2\sqrt{2}\sqrt{3}$，所以将$2\sqrt{6}$配成$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2$就成为解决问题的关键，比用分母有理化简便。

解 原式$=\dfrac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-5}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

$$=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$$

$$=\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}.$$

例4 若a为自然数，则a^4-3a^2+9是质数还是合数？给出你的证明。

分析：想法将所述表达式分解因式。

解 $a^4-3a^2+9=(a^4+6a^2+9)-9a^2$

$$=(a^2-3a+3)(a^2+3a+3)$$

当$a=1$时，有$a^4-3a^2+9=7$为一质数；

当$a=2$时，有$a^4-3a^2+9=13$为一质数；

当 $a>2$ 时，有 $a^2-3a+3=a(a-3)+3>1$， $a^2+3a+3>1$。

由于a^4-3a^2+9可分成为两个大于 1 的 自 然 数的积，所以为一合数。

故当$a=1$或2时，a^4-3a^2+9是一质数。

当$a>2$时，a^4-3a^2+9是一合数。

练 习 二

1. 分解因式：$(1+y)^2-2x^2(1-y^2)+x^4(1-y)^2$。
2. 分解因式：$2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4$。
3. 分解因式：$a^2+(a+1)^2+(a^2+a)^2$。

§3 换 元 法

换元法就是在一个比较复杂的式子中，根 据 式 子 的特征，引进适当的中间变量，从而将这个式子的结构简单化，使问题易于解决。

在某些多项式的因式分解过程中，换元法起着重要的桥梁作用。

例1 分解因式 $(x^2+x+1)(x^2+x+2)-12$。

分析：若将此式 展 开，一定繁琐。注 意到(x^2+x+1)与(x^2+x+2)的平 均数为$x^2+x+\frac{3}{2}$，故设$y=x^2+x+\frac{3}{2}$。

解 设 $y=\dfrac{(x^2+x+1)+(x^2+x+2)}{2}$

$$=x^2+x+\frac{3}{2},$$

$$原式=\left(y+\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)-12$$

$$=y^2-\frac{1}{4}-12$$

$$=y^2-\frac{49}{4}$$

$$=\left(y+\frac{7}{2}\right)\left(y-\frac{7}{2}\right)$$

$$=(x^2+x+5)(x^2+x-2)$$

$$=(x^2+x+5)(x+2)(x-1).$$

亦可设x^2+x或x^2+x+1等为y均可。

说明：（1）换元法的根据在于同一个数可以有各种不同的表现形式，可以根据需要去改变其形状，而使用换元法的关键在于能够抓住算式的特征，从而引进适当的中间变量。

（2）本题通过换元，使x的四次多项式转化为y的二次多项式。一般地，通过换元可使原式降次、整式化（去分母）、有理化（去根号）等，化难为易，使解题途径看得更清楚。

例2 分解因式 $2x^4-x^3-6x^2-x+2$.

分析：本题中按x的降幂排列时，各系数及常数项成前后对称，即与首末两项“等距离”的项系数相等，这种式子称为相反式。可先提取x^2，然后再作代换$y=x+\dfrac{1}{x}$.

解 设$x+\frac{1}{x}=y$，则

$$原式=x^2\left(2x^2-x-6-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)$$

$$=x^2\left[2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)-6\right]$$

$$=x^2(2y^2-y-10)$$

$$=x^2(2y-5)(y+2)$$

$$=(2x-1)(x-2)(x+1)^2.$$

例3 分解因式 $(xy-1)^2+(x+y-2)(x+y-2xy)$。

分析：可把xy与$x+y$分别看作一个字母，所以设$x+y=m$，$xy=n$。

解 设$x+y=m$，$xy=n$。 则

$$原式=(n-1)^2+(m-2)(m-2n)$$

$$=(n-1)^2+m^2-2m-2mn+4n$$

$$=(n+1)^2-2m(n+1)+m^2$$

$$=(n+1-m)^2$$

$$=(xy+1-x-y)^2$$

$$=(x-1)^2(y-1)^2.$$

例4 试证四个连续自然数的积与1的和必为一整数的平方。

证明 设这四个数为n，$n+1$，$n+2$，$n+3$（n为自然数），那么

$$n(n+1)(n+2)(n+3)+1$$

$$=(n^2+3n)(n^2+3n+2)+1,$$

设$y=\dfrac{(n^2+3n)+(n^2+3n+2)}{2}$

$=n^2+3n+1$,

原式$=(y-1)(y+1)+1$

$=y^2-1+1$

$=y^2$

$=(n^2+3n+1)^2$.

练 习 三

1. 分解因式：$(x^2-5x+4)(x^2-x-2)-72$.

2. 分解 因式：$x^4+x^3+2\dfrac{1}{4}x^2+x+1$.

3. 将$5^{1985}-1$分解为三个整数之积，每一个都大于5^{100}.

§4 待定系数法

待定系数法的特点是先假定一个含有待定系数的恒等式，然后根据多项式的恒等性质列出几个含有待确定系数的方程（组），解这个方程（组），求出待定系数，或者从方程组中消去这些待定系数，求出原来那些已知系数间所存在的关系，从而把问题解决。

这里所根据的恒等式性质有两条：

1. 若 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n\equiv b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_{n-1}x+b_n$，则$a_0=b_0$，$a_1=b_1$，$\cdots$，$a_n=b_n$.