北京文登学校辅导系列

高等数学解题方法和技巧

陈文灯 吴振奎 黄惠青 编著

中国财政经济出版社

北京文登学校辅导系列

高等数学解题方法和技巧

陈文灯　吴振奎　黄惠青　编著

中国财政经济出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学解题方法和技巧/陈文灯、吴振奎、黄惠青编著.北京：中国财政经济出版社，2004.5
（北京文登学校辅导系列）
ISBN 7－5005－5602－0

Ⅰ.高…　Ⅱ.①陈…②吴…③黄…　Ⅲ.高等数学－研究生－入学考试－解题　Ⅳ.013－44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 024455 号

北京文登学校辅导系列
高等数学解题方法和技巧
陈文灯　吴振奎　黄惠青　编著
中国财政经济出版社出版发行
URL：http：//www.cfeph.com.cn
E-mail：cfeph@drc.gov.cn

社址：北京海淀区阜成路甲 28 号　邮政编码：100036
发行处电话：88190406　财经书店电话：64033436
北京外文印刷厂印刷　各地新华书店经销
787×1092 毫米　16 开　32.75 印张　811 000 字
2004 年 6 月第 1 版　2004 年 6 月北京第 1 次印刷
定价：50.00 元
ISBN 7－5005－5602－0/G·0087
（图书出现印装问题，本社负责调换）

前　　言

高等数学是大学理工科及经济管理类专业的重要基础课，是培养学生形象思维、抽象思维、创造性思维的重要园地。由于概念、定理、公式繁多，综合性较强，许多同学都觉得它难学，有的同学甚至由此产生了厌学情绪。我们曾用自己的教学经验帮助过身边学习困难的同学，他们都感到受益匪浅。为使更多学习困难的同学受益，也使学习好的同学更优秀，我们归纳、总结近 40 年的教学经验和多年来考研辅导体会，编著了这本《高等数学解题方法和技巧》。相信它的出版会对不同层次的学生学习高等数学均有所裨益。

本书具有以下特点：

(1)广泛使用表格法，使有关内容、解题方法和技巧一目了然。

(2)从浩瀚的题海中归纳、总结出的题型解法，对同学们解题具有很大的指导作用。

(3)用系列专题分析对教材的重点、难点进行了诠释，对同学们掌握这方面知识起到事半功倍的效果。

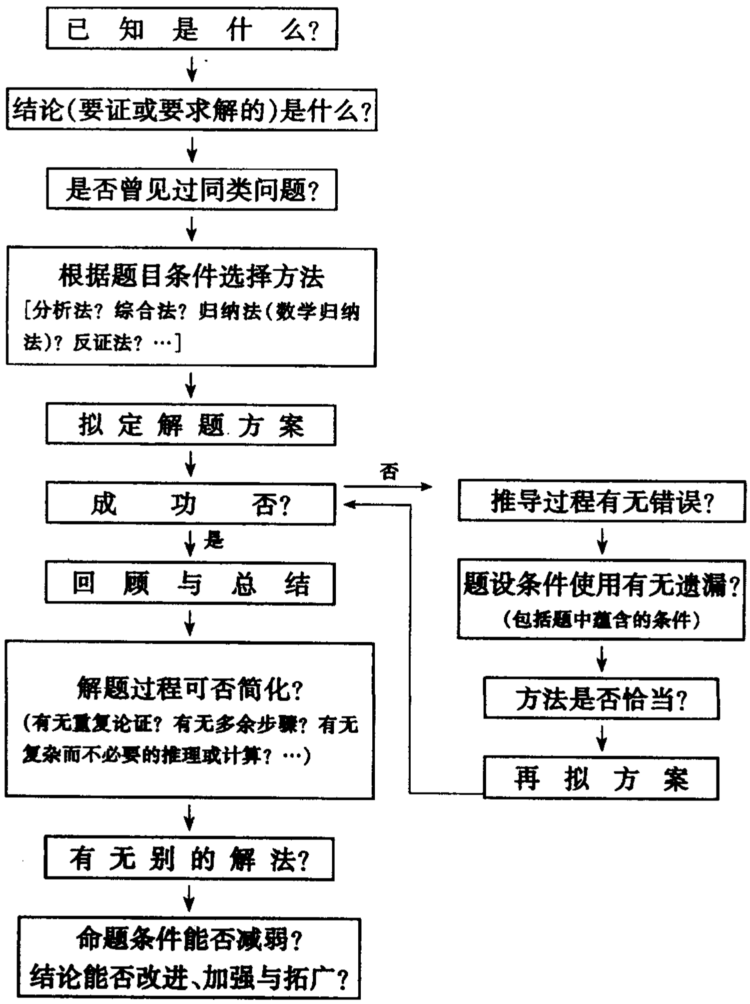
本书是针对考研、参加数学竞赛的同学撰写的，对在读的本科生、专科生以及数学教师同仁也具有很高的参考价值。

由于时间仓促，作者水平有限，错误和不当之处在所难免，敬请读者批评指正。

作　　者

于 2004 年 5 月

解题步骤的一个框图



已 知 是 什 么?
结论(要证或要求解的)是什么?
是否曾见过同类问题?
根据题目条件选择方法
[分析法? 综合法? 归纳法(数学归纳法)? 反证法? …]
拟 定 解 题 方 案
成 功 否?
否
推导过程有无错误?
题设条件使用有无遗漏?
(包括题中蕴含的条件)
方法是否恰当?
再 拟 方 案
是
回 顾 与 总 结
解题过程可否简化?
(有无重复论证? 有无多余步骤? 有无复杂而不必要的推理或计算? …)
有 无 别 的 解 法?
命题条件能否减弱?
结论能否改进、加强与拓广?

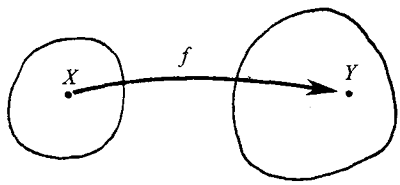
目 录

第一章 函数、极限、连续

一、函数表达式、定义域及某些特性问题的解法

函数是高等数学中的一个重要概念.它是这样定义的：

已知 X,Y 是两个集合，若对 X 中的每一元素 x，通过法则（映射）f，在集合 Y 中有唯一元素 y 和它对应，则称 f 为定义在 X 上的一个**函数**，记 $y=f(x)$.



x 又称自变量，y 又称因变量，变量也称为**元**.

X 称为函数**定义域**，$Y=\{y \mid y=f(x), x\in X\}$ 称为函数的**值域**.

又若 Y 中每一个 y，在 X 中均有唯一的 x 与之对应，这个以 y 为自变量的新函数称为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**，记作 $x=f^{-1}(y)$. 习惯上记作 $y=f^{-1}(x)$.

函数按其内容或性质可分为：

函数
- 按内容
  - 初等函数
    - 代数函数
      - 有理函数
      - 无理函数
    - 超越函数
  - 高等函数
- 按表达式
  - 显函数（含参数式）
  - 隐函数
- 按变元个数
  - 一元函数
  - 多元函数
- 按性质
  - 奇、偶函数
  - 周期函数
  - 齐次函数
  - ……
- ……

函数 $y=f[\varphi(x)]$ 是由 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成，则称其为**复合函数**（u 称为中间变量）.

（一）函数解析式及其定义域求法

1. 函数解析式(表达式)的求法

函数的解析式一般可分为显式、隐式和参数式三种(见下表)：

函数种类	定　　义	表　示　方　式
显　函　数	已解出因变量为自变量的解析表达式所表示的函数	$y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$
隐　函　数	用方程表示自变量与因变量间关系的函数	$F(x_1,x_2,\cdots,x_n,y)=0$
参变量函数	用参变量所表示的函数	$\begin{cases}x_i=\varphi_i(t),\\ y_i=\psi_i(t)\end{cases}\quad i=1,2,\cdots,n$

人们说的所谓“函数解析表达式”往往是指显式而言，它的求法多是依据题设中的条件. 下面来看几个例子：

例 1 设 $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x^2}}$，试求 $f[f(x)]$.

解：$f[f(x)]=\sqrt{\sqrt{x+\sqrt{x^2}}+\sqrt{\left(\sqrt{x+\sqrt{x^2}}\right)^2}}=\sqrt{2\sqrt{x+\sqrt{x^2}}}=\sqrt{2f(x)}$.

它的一般形式为：

$$f\{f[f\cdots f(x)]\}=\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\cdots\sqrt{2f(x)}}}}=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}}[f(x)]^{\frac{1}{2^{n-1}}}.$$

例 2 设 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$，试求 $f\{f(f[f(x)])\}$ 和 $f\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)$ $(x\neq0$ 且 $x\neq1)$.

解：由 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}$，有 $\dfrac{1}{f(x)}=1-\dfrac{1}{x}$，

则 $\quad f[f(x)]=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{f(x)}}=\dfrac{1}{1-\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}=x$，

故 $\quad f(f[f(x)])=f(x)$，

从而 $\quad f\{f(f[f(x)])\}=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{f(x)}}=x$.

而 $\quad f\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)=f\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x}-1}=1-x\quad(x\neq0$ 且 $x\neq1)$.

注：由解题过程不难发现：$\underbrace{f(f(\cdots f(x)))}_{k\text{重}}=\begin{cases}f(x), & k\text{ 为奇数；}\\ x, & k\text{ 为偶数.}\end{cases}$

严格的证明还要用数学归纳法去完成.

例 3 设 $f_1(x)=f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，又 $f_n(x)=f[f_{n-1}(x)]$ $(n\geqslant2)$，试求 $f_n(x)$.

解：由 $f_1(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，　故　$f_2(x)=f[f_1(x)]=\dfrac{f_1(x)}{\sqrt{1+f_1{}^2(x)}}=\dfrac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$，

依次类推　$f_{n-1}(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+(n-1)x^2}}$，　则

$$f_n(x)=f[f_{n-1}(x)]=\frac{f_{n-1}(x)}{\sqrt{1+f_{n-1}{}^2(x)}}=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}.$$

例 4　若 $f(n)=1-n\ (n\in Z)$，且对每个 n 有 $f[f(n)]=n$，且 $f[f(n+2)+2]=n$，同时 $f(0)=1$. 试证 $f(n)$唯一.

证：由 $f(n)=1-n$，则 $f[f(n)]=f(1-n)=1-(1-n)=n$，

又 $f[f(n+2)+2]=f[(-n-1)+2]=f(1-n)=n$，且 $f(0)=1$.

又 $f\{f[f(n+2)+2]\}=f[f(n)]$，

从而 $f(n+2)+2=f(n)$，即 $f(n+2)=f(n)-2$.

归纳地有 $f(n)=\begin{cases} f(0)-n, & n\text{ 为偶数} \\ f(1)+1-n, & n\text{ 为奇数} \end{cases}$

又 $f(0)=1$，从而 $f(1)=0$，即 $f(n)=n$.

由上面几例可以看出：这类问题的实质是“复合”.

下面再来两个例子：

例 5　设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1, \\ 0, & |x|>1;\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\leqslant 1, \\ 2, & |x|>1.\end{cases}$ 求 $f[g(x)]$.

解：由题设知：当$|x|<1$ 时，　$f[g(x)]=f(2-x^2)=0$；

当$|x|=1$ 时，　$f[g(x)]=f(1)=1$；

当$|x|>1$ 时，　$f[g(x)]=f(2)=0$.

综上　$f[g(x)]=\begin{cases}0, & |x|\neq 1, \\ 1, & |x|=1.\end{cases}$

例 6　设 $f(x)=\begin{cases}1, & x>0, \\ 0, & x\leqslant 0;\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}x-1, & x\geqslant 1, \\ 1-x, & x<1.\end{cases}$ 求 $g[f(x)]$.

解：设 $u=f(x)$，$v=g(x)$，由题设有

$$g[f(x)]=g(u)=\begin{cases}u-1, & u\geqslant 1, \\ 1-u, & u<1.\end{cases}$$

但　$x>0$ 时，$u=1$；$x\leqslant 0$ 时，$u=0$.

故　$g[f(x)]=\begin{cases}0, & x>0; \\ 1, & x\leqslant 0.\end{cases}$

注：实际上 $g[f(x)]=1-f(x)$，这只须注意到：

$$1-f(x)=\begin{cases}1-1, & x>0 \\ 1-0, & x\leqslant 0\end{cases}=\begin{cases}0, & x>0 \\ 1, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

例 7　若 $z=\sqrt{y}+f(\sqrt[3]{x}-1)$，且已知当 $y=1$ 时，有 $z=x$. 求 $f(x)$及 z 的解析表达式.

解：由设 $y=1$ 时 $z=x$，代入题设等式有：$x-1=f(\sqrt[3]{x}-1)$.

令 $\sqrt[3]{x}-1=t$,则 $x=(1+t)^3$,代入上式有:

$$f(t)=(1+t)^3-1=t^3+3t^2+3t.$$

故 $f(x)=x^3+3x^2+3x,\quad z=\sqrt{y}+x-1.$

下面的例子还涉及了函数的求导问题①:

例 8 已知 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$,求 $f[f'(x)]$.

解:由 $f'(x)=\left(\dfrac{1}{1+x}\right)'=-\dfrac{1}{(1+x)^2}$,

则 $f[f'(x)]=\dfrac{1}{1+f'(x)}=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{(1+x)^2}}=\dfrac{(1+x)^2}{(1+x)^2-1}.$

例 9 若 $f(x)$在$(0,+\infty)$上连续,又对任意 $x>0$ 有 $f(x^2)=f(x)$,且 $f(3)=5$.求 $f(x)$.

解:当 $x>0$ 时,$f(x)=f(\sqrt{x})=f(x^{\frac{1}{4}})=\cdots=f(x^{\frac{1}{2^n}})$,

则 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f(x^{\frac{1}{2^n}})=f(\lim\limits_{n\to\infty}x^{\frac{1}{2^n}})=f(1)$,

即 $f(x)\equiv\text{const}$(常数).

又 $f(3)=5$,故 $f(x)=f(1)=f(3)=5$.

最后看一个二元函数的例子:

例 10 若 $f\left(x+y,\dfrac{y}{x}\right)=x^2-y^2$,求 $f(x,y)$.

解:设 $x+y=u,\ \dfrac{y}{x}=v$, 解得 $x=\dfrac{u}{1+v},\ y=\dfrac{uv}{1+v}$.

故 $f(u,v)=\left(\dfrac{u}{1+v}\right)^2-\left(\dfrac{uv}{1+v}\right)^2=\dfrac{(1-v)u^2}{1+v}$, 即 $f(x,y)=\dfrac{x^2(1-y)}{1+y}$.

还有一批函数解析式的求法可见后面的“微分方程”一章内容.

这儿我们想指出一点:并非所有函数均可用解析式表达,有的函数只能用语言文字描述,比如:

• 符号函数:$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0;\\ 0, & x=0;\\ -1, & x<0,\end{cases}$

• 迪黎赫莱(Dirichlet)函数 $y=D(x)$②: $y=D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 是有理数时};\\ 0, & x\text{ 是无理数时}.\end{cases}$

• 黎曼(Riemann)函数 $y=R(x)$: $y=R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & \text{当 } x=\dfrac{m}{n}\text{ 时}, m,n\text{ 互质}, n\geqslant 1;\\ 0, & \text{当 } x\text{ 为无理数时}.\end{cases}$

---

① 鉴于本书的特点即是将问题综合叙述,因而有些时候例子中涉及的内容会将通常教程章节或内容顺序稍打乱,这些以后不再一一说明.

② Dirichlet 函数可写成极限形式表达式:$\lim\limits_{m\to\infty}\{\lim\limits_{n\to\infty}[\cos(m!\pi x)]^n\}$.

• 高斯(Gauss)函数 $y=[x]$表示不超过 x 的最大整数;……等等.

2. 函数定义域问题的解法

确定某些简单的、具体的函数定义域问题并不困难,只须注意下面几点:

(1)分式函数,分母不为零;

(2)偶次根式下的代数式不能为负;

(3)对数的底数大于零且不为1;真数大于零;

(4)反三角函数 $\sin^{-1}f(x),\cos^{-1}f(x)$中的 $f(x)$满足:$|f(x)|\leqslant 1$.

对于抽象函数的定义域问题,要依据函数定义及题设条件.

例 1　求 $z=\sin^{-1}(x-y^2)+\ln[\ln(10-x^2-4y^2)]$的定义域.

解:由反三角函数及对数函数的性质有:

$$|x-y^2|\leqslant 1 \quad 及 \quad 10-x^2-4y^2>1.$$

即题设函数的定义域是:椭圆$\frac{x^3}{3^2}+\frac{4y^2}{3^2}=1$与抛物线 $x=y^2+1$ 及 $x=y^2-1$ 所围成的区域:

$$\begin{cases}\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{(3/2)^2}<1,\\ y^2-1\leqslant x\leqslant y^2+1.\end{cases}$$

例 2　设 $f(x)=\frac{1}{\ln(3-x)}+\sqrt{49-x^2}$,求 $f(x)$的定义域.

解:由题设应有 $3-x>0$, $3-x\neq 1$(即 $\ln(3-x)\neq 0$)和 $49-x^2\geqslant 0$,

故　$f(x)$的定义域为　$-7\leqslant x<2$, $2<x<3$.

上面是一些简单函数问题,下面是关于复合函数的:

例 3　设 $f(x)$的定义域为$[0,1]$,试求(1)$f(x^2)$;(2)$f(\sin 2x)$的定义域.

解:(1)令 $x^2=u$,则 $f(x^2)=f(u)$,其定义域为　$0\leqslant u\leqslant 1$,

即　$0\leqslant x^2\leqslant 1$,　有　$-1\leqslant x\leqslant 1$.

故　$f(x^2)$的定义域为$[-1,1]$.

(2)令 $\sin 2x=u$,则 $f(\sin 2x)=f(u)$.由题设 $0\leqslant u\leqslant 1$　即　$0\leqslant \sin 2x\leqslant 1$,

故　$f(\sin 2x)$的定义域为$[n\pi,\frac{1}{2}(2n+1)\pi]$($n$ 为整数).

例 4　设 $f(x)$的定义域为$[0,1]$,试求 $f(x+a)+f(x-a)$的定义域($a>0$).

解:令 $x+a=u, x-a=v$,　则 $f(x+a)+f(x-a)=f(u)+f(v)$,由题设有

$$0\leqslant u\leqslant 1 \quad 即 \quad 0\leqslant x+a\leqslant 1, \quad 得 \quad -a\leqslant x\leqslant 1-a;$$

$$0\leqslant v\leqslant 1 \quad 即 \quad 0\leqslant x-a\leqslant 1, \quad 得 \quad a\leqslant x\leqslant 1+a.$$

故　若 $0<a\leqslant\frac{1}{2}$,则所求定义域为$[a,1-a]$;若 $a>\frac{1}{2}$,其定义域不存在.

(二) 函数某些特性的讨论方法

1. 函数奇偶性的讨论方法

函数的奇偶性对于某些运算(如积分、求和、…)来讲是十分重要的.

判断函数的奇、偶性只须依据定义:

若 $f(-x)=f(x)$,则 $f(x)$称为偶函数;

若 $f(-x)=-f(x)$,则 $f(x)$称为奇函数;

应该强调一点:并非所有函数都有奇偶性.

例 1 试证定义在$(-l,l)$内的任何函数 $f(x)$均可表为奇函数与偶函数之和的形式,且表示式唯一.

证:令 $H(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$, $G(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$,易验证 $H(x)$, $G(x)$分别为定义在$(-l,l)$上的偶函数和奇函数.

则 $f(x)=H(x)+G(x)$. (*)

下证唯一性.若还有偶函数 $H_1(x)$和奇函数 $G_1(x)$使 $f(x)=H_1(x)+G_1(x)$,则由式(*)有

$$H(x)-H_1(x)=G_1(x)-G(x),$$

用 $-x$ 代入上式有 $H(x)-H_1(x)=G(x)-G_1(x)$,

故 $G(x)=G_1(x)$, $H(x)=H_1(x)$.即表法唯一.

下面的问题还涉及到了函数的导数.

例 2 设 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有连续导数,则 $f(x)$为偶函数$\Longleftrightarrow f'(x)$是奇函数.

证:必要性

设 $f(x)$为偶函数,即 $f(-x)=f(x)$.

则 $$f'(-x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-x+\Delta x)-f(-x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f[-(x-\Delta x)]-f(x)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}-\frac{f(x-\Delta x)-f(x)}{-\Delta x}=-f'(x),$$

即 $f'(x)$为奇函数.

充分性

设 $f'(x)$为奇函数,即 $f'(-x)=-f'(x)$.又 $f(x)=\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t+f(0)$,

且 $\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t=-\int_0^x f'(-t)\mathrm{d}t=\int_0^x f'(-t)\mathrm{d}(-t)=\int_0^{-x}f'(u)\mathrm{d}u$

故 $f(x)=f(-x)$,即 $f(x)$是偶函数.

注:反过来,若 $f'(x)$为偶函数,则 $f(x)$不一定是奇函数,例如:$f(x)=x^3+1$ 不是奇函数,而$f'(x)$是偶函数.

这时还须加上 $f(0)=0$ 的条件,即若 $f'(x)$为偶函数,且 $f(0)=0$ 时,则 $f(x)$是奇函数.

请注意,若 $f(x)$为偶函数,则无须加 $f(0)=0$ 的条件(为什么?)

类似地我们还可以有:

若 $f(x)$是可积的奇函数,则 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是偶函数,更一般地我们有:

例 3 若 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续,且 $F(x)=\int_0^x(x-2t)f(t)\mathrm{d}t$,试证:如果$f(x)$是

偶函数，则 $F(x)$ 也是偶函数．

证：设 $f(x)$ 为偶函数，则 $f(-x)=f(x)$．令 $u=-t$，则

$$F(-x)=\int_0^{-x}(-x-2t)f(t)\mathrm{d}t=\int_0^{x}(-x+2u)f(-u)\mathrm{d}(-u)$$

$$=\int_0^{x}(x-2u)f(u)\mathrm{d}u=\int_0^{x}(x-2t)f(t)\mathrm{d}t=F(x),$$

即　$F(x)$ 也是偶函数．

2．函数周期性的讨论法

对于函数 $f(x)$，若存在非零常数 T 使 $f(x+T)=f(x)$ 对其定义域内任何 x 均成立，则称 $f(x)$ 为**周期函数**．T 称为该函数的**周期**．

若 T 是 $f(x)$ 的一个周期，则 nT（n 是整数）也是 $f(x)$ 的周期．

三角函数是常见的周期函数．

常数 C 作为自变量 x 的函数时，它是周期函数，且任意不为 0 的实数均为其周期．

连续的周期函数，若它不是常数，则它有最小的正周期．

$\sin x$ 和 $\cos x$ 的最小正周期是 2π；$\tan x$ 和 $\cot x$ 的最小正周期是 π．

讨论函数的周期性问题，一般是根据周期函数的定义考虑．下面来看例子：

例 1　试证 Dirichlet 函数是周期函数，且任意不为 0 的有理数均为其周期．

证：设 $T\neq 0$ 且为有理数，若 x 是有理数时，$x+T$ 仍为有理数；若 x 是无理数时，$x+T$ 仍为无理数，故

$$f(x+T)=\left.\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数时}\\ 0, & x\text{ 有无理数时}\end{cases}\right\}=f(x).$$

注：从上例可以看出：周期函数不一定存在最小的正周期．

例 2　求 $f(x)=x-[x]$ 的最小正周期．

解：设 $x=n+r(0\leqslant r<1$，n 为整数)，T 为任意整数，则由

$$f(x+T)=f(n+T+r)=n+T+r-[n+T+r]=n+T+r-(T+[n+r])$$

$$=n+r-[n+r]=f(x),$$

故　任何整数均为其周期，则最小正周期 $T=1$．

下面是讨论周期函数的例子：

例 3　设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是奇函数，$f(1)=a$，且对任何 x 值均有 $f(x+2)-f(x)=f(2)$．问 a 为何值时，$f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数？

解：欲使 $f(x)$ 是以 2 为周期函数，由 $f(x+2)-f(x)=f(2)$，只须使 $f(2)=0$ 即可．

令 x 分别为 -1，可得　$f(1)-f(-1)=f(2)$，　又 $f(-1)=-f(1)$，

故　$f(2)=2f(1)=2a$，　这样只须令　$2a=0$．

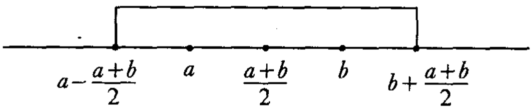
即 $a=0$ 时 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数．

例 4　若函数 $f(x)(-\infty<x<+\infty)$ 的图形关于两条直线 $x=a$ 和 $x=b$ 都对称 $(b>a)$，则 $f(x)$ 为周期函数．

解：由题设函数的对称性可有

$$\begin{cases} f(a+x)=f(a-x), & (1) \\ f(b+x)=f(b-x). & (2) \end{cases}$$

故函数在 a,b 中点$\dfrac{a+b}{2}$处的值等于点 $a-\dfrac{b-a}{2}$和 $b+\dfrac{b-a}{2}$处的函数值.



故若 $f(x)$为周期函数,则其周期应为 $b+\dfrac{b-a}{2}-\left(a-\dfrac{b-a}{2}\right)=2(b-a)$.注意到

$$\begin{aligned} & f[x+2(b-a)]=f[b+(x+b-2a)] \\ &=f[b-(x+b-2a)] && [由(2)] \\ &=f(2a-x)=f[a+(a-x)] && [由(1)] \\ &=f[a-(a-x)]=f(x) \end{aligned}$$

即　$f(x)$是以 $2(b-a)$为周期的周期函数.

下面的例子中涉及到积分概念:

例 5　若 $f(x)$是以 l 为周期的周期函数且可积,则 $\int_a^{a+l}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^l f(x)\mathrm{d}x$,这里 a 为任意实数.

证: 由定积分可加性有

$$\int_a^{a+l}f(x)\mathrm{d}x=\int_a^0 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^l f(x)\mathrm{d}x+\int_l^{a+l}f(x)\mathrm{d}x,$$

令　$x=t+l$,由 $f(t+l)=f(t)$,则

$$\int_l^{a+l}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^a f(t+l)\mathrm{d}t=\int_0^a f(t)\mathrm{d}t=-\int_a^0 f(x)\mathrm{d}x,$$

故　$\displaystyle\int_l^{a+l}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^l f(x)\mathrm{d}x$.

证明函数不是周期函数一般有两种方法:一是反证法,一是分析法.请看:

例 6　试证函数 $f(x)=\sin x-x^2$ 不是周期函数.

证: 若不然,今设 $T\neq 0$ 且使　$\sin(x+T)-(x+T)^2=\sin x+x^2$,

即　$2\sin\dfrac{T}{2}\cdot\cos\left(x+\dfrac{T}{2}\right)-2Tx-T^2=0.$　　(*)

将上式两边对 x 求导两次有　$-2\sin\dfrac{T}{2}\cdot\cos\left(x+\dfrac{T}{2}\right)=0$,

由 x 的任意性,$\cos\left(x+\dfrac{T}{2}\right)\neq 0$,故有 $\sin\dfrac{T}{2}=0$,将此代入(*)有　$-2Tx-T^2=0$,

故 $T=0$,与前设矛盾! 从而 $\sin x-x^2$ 不是周期函数.

例 7　试证 $f(x)=\sin x^2$ 不是周期函数.

证: 考虑 $\sin x^2=0$ 即 $f(x)$的零点分布:　$x^2=k\pi$,$x=\sqrt{k\pi}$ $(k=0,1,2,\cdots)$.注意到

$$\sqrt{(k+1)\pi}-\sqrt{k\pi}=\frac{\pi}{\sqrt{(k+1)\pi}+\sqrt{k\pi}},$$

它随 k 的增大而变小,即 $f(x)$的零点随 k 的增大越来越密,这是不可能的.因为周期函数的

零点分布也是以周期形式出现的.

3. 函数单调性的讨论方法

函数随自变量变化而单调变化的性质称为函数的单调性,具体定义如下表:

若 $f(x)$ 在 X 上有定义,又 $x_1,x_2\in X$ 且 $x_1<x_2$	$f(x_1)<f(x_2)$	$f(x)$ 在 X 上严格单增函数
	$f(x_1)>f(x_2)$	$f(x)$ 在 X 上严格单减函数
	$f(x_1)\leqslant f(x_2)$	$f(x)$ 在 X 上递增(不减)函数
	$f(x_1)\geqslant f(x_2)$	$f(x)$ 在 X 上递减(不增)函数

关于函数单调性的讨论可以用不等式考虑,然而更多的则是利用函数导数的性质.关于这方面内容,我们后文再来叙及.

4. 函数有界性问题的讨论方法

若函数 $y=f(x)$ 定义在 X 上,如果存在常数 $M>0$,使对任意 $x\in X$,均有 $|f(x)|\leqslant M$,则称 $f(x)$ 在 X 上有界.

这类问题我们后文再行讨论.

二、求各类极限的方法

极限概念是数学分析中最基本又是最重要的概念.

求极限问题一般有两类:一类是数(序)列的极限,一类是函数的极限.它们的求法很多,总的原则是:先化简(通项)、再求值.下面我们分别谈谈这些方法.

(一) 数(序)列极限的求法

数(序)列极限的求法大致有下面几种:

(1)依据数列极限的定义;

(2)依据数列极限存在的定理、法则;

(3)依据数列本身的变形;

(4)利用某些公式;

(5)利用数列的递推关系;

(6)利用数列极限与函数极限存在的关系;

(7)利用定积分运算;

(8)利用级数的敛散条件;

(9)利用 Stolz 定理及相应的结论;

(10)利用中值定理.

下面我们举些例子来说明:

1. 依据数列极限的定义

对于实数(序)列 $\{a_n\}$ 来说,若存在实数 A 使得:任给 $\varepsilon>0$ 存在 N,使 $n\geqslant N$ 时

$|a_n - A| < \varepsilon$，则称$\{a_n\}$收敛，且称 A 为$\{a_n\}$的（当 $n \to +\infty$时）极限，记为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$.

依据这个定义，可以验证某些数列极限问题.

例 1　若数列$\{x_n\}$满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - x_{n-2}) = 0$，试证 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}(x_n - x_{n-1}) = 0$.

证：由设 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - x_{n-2}) = 0$，即任给$\dfrac{\varepsilon}{2}>0$，存在 $N>2$，使 $n\geqslant N$ 时有$|x_n - x_{n-2}| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

对充分大的 P 可有

$$|x_{N+P} - x_{N+(P-1)}| = |x_{N+P} - x_{N+P-2} - x_{N+P-1}| \leqslant |x_{N+P} - x_{N+P-2}| + |x_{N+P-2} - x_{N+P-1}|$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + |x_{N+P-1} - x_{N+P-2}| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + |x_{N+P-1} - x_{N+P-3}| + |x_{N+P-3} - x_{N+P-2}|$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + |x_{N+P-2} - x_{N+P-3}| \leqslant \cdots \leqslant P\cdot\frac{\varepsilon}{2} + |x_{N+P-P} - x_{N+P-P-1}|$$

$$= P\cdot\frac{\varepsilon}{2} + |x_N - x_{N-1}|,$$

选 P 使$P+N>\dfrac{2|x_N - x_{N-1}|}{\varepsilon}$，　则　$\left|\dfrac{x_{N+P} - x_{N+P-1}}{N+P}\right| \leqslant \dfrac{P}{N+P}\cdot\dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{|x_N - x_{N-1}|}{N+P} < \varepsilon$.

故　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}(x_n - x_{n-1}) = 0$.

例 2　若$\{a_n\}$，$\{b_n\}$为两个递增正数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 存在. 又对 a_n 的每一固定项总有b_n 的项大于它；同样对于 b_n 的每一固定项总有a_n 的项大于它. 试证明：$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

证：设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. 今用反证法. 若 $a<b$，由极限定义：

对于 $b-a>0$，存在 $N>0$ 使 $n\geqslant N$ 时有：$|b_n - b| < b - a$.

因 b_n 递增，即当 $n\geqslant N$ 时有$b_n > a$.

又 a_n 亦为递增正数列，对于任何自然数 m 均有$a_m < a$，这样 $a_m < a < b_n$，此与题设矛盾. 故 $a<b$ 不真，从而 $a\geqslant b$.

类似地可证 $b\geqslant a$. 故 $a=b$.

例 3　若序列$\{x_n\}$对一切 m 和 n 均有 $0\leqslant x_{m+n}\leqslant x_m + x_n$. 试证$\left\{\dfrac{x_n}{n}\right\}$收敛.

证：由题设知 $0\leqslant x_n\leqslant nx_1$ 即 $0\leqslant\dfrac{x_n}{n}\leqslant x_1$，$n\geqslant1$，即$\left\{\dfrac{x_n}{n}\right\}$有界. 设 α 为其下确界，今证 α 即为其极限.

任给 $\varepsilon>0$，存在 m 使 $\alpha\leqslant\dfrac{x_m}{m}<\alpha+\dfrac{\varepsilon}{2}$，又对任一自然数 n 可表为$n=mq+r$，这里 $0\leqslant r<m$.

由题设　$x_n = x_{mq+r} \leqslant qx_m + x_r$.

故　$\dfrac{x_n}{n} \leqslant \dfrac{qx_m + x_r}{qm+r} = \dfrac{x_m}{m}\cdot\dfrac{qm}{qm+r} + \dfrac{x_r}{n}$，当 n 充分大时可有

$$-\frac{\varepsilon}{2} + \alpha \leqslant \frac{x_n}{n} < \left(\alpha + \frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{qm}{qm+r} + \frac{x_r}{n} \leqslant \alpha + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{x_r}{n},$$

因 $0\leqslant r\leqslant m-1$，在上式令 $n\to\infty$，则有　$\alpha - \dfrac{\varepsilon}{2} \leqslant \dfrac{x_n}{n} \leqslant \alpha + \dfrac{\varepsilon}{2}$，