21

西安工业学院“十五”规划教材

工程数学基础

主编 李选民

西北工业大学出版社

西安工业学院“十五”规划教材

工程数学基础

主　编　李选民

编　者　李选民　张明平

张宇萍　窦　龙

西北工业大学出版社

【内 容 简 介】 本书是在我国高校从精英教育向大众教育的重大转变的形势下，针对普通院校一般学生的实际水平和教学最基本要求所编写的.

本书内容分为上、下两篇，上篇为线性代数与线性规划；下篇为概率论与数理统计．上篇的主要内容有行列式、矩阵、向量组的线性相关性、线性方程组、相似矩阵、二次型及线性规划的基本概念、单纯形方法等；下篇的主要内容有随机事件及概率、随机变量及分布、随机变量的数字特征、样本及抽样分布、参数估计与假设检验等．每章均附有习题，供学生练习．

本书可作为普通高校经济管理专业以及高职高专、成人教育类非数学专业的工程数学或管理数学教材，也可供对该课程要求较低的工科类学生使用．书中带“＊”的内容可根据教学的不同要求，灵活选择．

图书在版编目(CIP)数据

工程数学基础/李选民主编. —西安：西北工业大学出版社，2004.9
ISBN 7-5612-1815-X

Ⅰ. 工… Ⅱ. 李… Ⅲ. 工程数学-高等学校-教材 Ⅳ. TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 073768 号

出版发行：西北工业大学出版社
通信地址：西安市友谊西路 127 号　邮编：710072
电　　话：(029) 88493844
网　　址：www.nwpup.com
印 刷 者：陕西向阳印务有限公司
开　　本：787 mm×1 092 mm　1/16
印　　张：19.5
字　　数：474 千字
版　　次：2004 年 9 月第 1 版　2004 年 9 月第 1 次印刷
印　　数：1～4 000 册
定　　价：24.00 元

序

我国高等教育正在由精英教育向大众化教育转变，在办学形式、学校定位、人才培养模式和人才培养标准各方面出现了多样化发展趋势．特别是“九五”期间，国家加大了人才培养模式的改革力度，积极推进面向21世纪教学内容课程体系的改革，调整了专业目录，拓宽了专业口径，重组课程体系．作为教学内容改革成果重要体现形式的教材既是体现教学内容、教学方法和传播知识的有形载体和基本工具，同时又是深化教育教学改革、全面推进素质教育、培养创新人才的重要保证．因此，要满足不同类型、不同层次人才培养的需要，体现高校各自的办学特色，教材体系和内容也必然向多层次、多样化发展．

西安工业学院作为一所非重点院校，正在努力从教学型向教学研究型大学发展．目前基本完成了从以工为主的单科性学院向多科性大学的转变，初步形成了大规模办学的本科专业框架和“以工为主，理工文商相结合，突出制造技术”的办学特色．学校在坚持“在层次结构上，以本科教育为主；在学科内涵上，以突出特色为主；在教学内容上，以夯实基础为主；在教学效果上，以培养能力为主”的教学工作原则的基础上将人才培养目标确定为具备“扎实的理论基础；宽厚的专业基础；娴熟的动手能力；适应竞争的综合素质”．

教材作为教学的重要载体就是要将学校的办学宗旨、培养模式、质量标准等信息传递给学生，要培养出具有本校特色的教育产品，就必须把教材建设目标、学校办学目标和人才培养目标统一起来．此次出版的公共基础课和技术基础课系列教材既体现了西安工业学院“十五”期间全面系统地推进教学改革的优秀成果，又为学科和专业发展奠定了坚实的基础．该系列教材从体系到内容都充分体现了学校的定位和办学特色．我们衷心希望它能对广大读者在夯实基础、强化素质、提高能力方面起到积极作用．

西安工业学院

教材工作委员会

2004年7月

前 言

线性代数与线性规划、概率论与数理统计是高等院校理工科及文科经济管理专业的重要的基础课程.为适应我国高等教育在近几年大量扩招后普通院校一般学生的实际水平和教学最基本要求,我们在多年讲授上述课程的基础上,编写了这本《工程数学基础》.

在编写本书时,作者遵循"拓宽基础,强化能力,立足应用"与"必需、够用为度"的原则,注意了着重讲清基本概念、基本理论和基本方法.在引入概念时,不吝用大量文字引入实际问题,以其为背景直观地给予说明;对部分定理,不过分强调严格抽象的理论推导,而代之以例证;在内容的表达方式上,不像对数学系学生的要求那么严格,而是将数学语言在某些地方"通俗化";在例题的选择上,淡化解题技巧的训练,而是通过较多的基本且典型的例题培养学生的基本能力;在结构体系上尽量做到由浅入深,循序渐进,利于学生对基本概念、基本理论的掌握,同时也利于学生自学.

本书可作为普通高校经济管理类专业的管理数学教材,也可供对工程数学要求较低的工科类学生使用,还可作为高职高专、成人教育类非数学专业的相关课程教材.书中带"*"号的内容和习题,可根据专业的不同需要与学时安排略去不讲,供学有余力的学生自学.

本书由李选民主编,杨力教授主审,参编人员有张明平、张宇萍、窦龙.其中上篇的第一章至第六章由李选民编写,第七、八章由张明平编写,下篇的第九章至第十三章由张宇萍编写,第十四章至第十八章由窦龙编写,最后由李选民负责修改、统稿.本书在编写的过程中得到了学校、数理系及数学教研室大力支持和帮助,并得到西北工业大学出版社大力支持,在此深表感谢.

由于水平所限,书中难免存在一些不妥之处,恳切希望读者批评指正.

编 者

2004年4月

目　录

上篇　线性代数与线性规划

下篇　概率论与数理统计

上篇　线性代数与线性规划

在科学研究、工程技术及经济管理中，经常要遇到所需要解决的问题可以直接或近似地表示成变量之间的线性关系，或者是非线性关系但可以转化为线性关系，因此对线性关系的研究显得尤为重要．线性代数是研究线性关系的最基本的数学工具．线性规划是运筹学的一个重要内容，它在解决技术问题中的最优化，工业、农业、交通运输业的计划与管理、分析与决策中都有广泛的应用．

本篇的第一章至第六章介绍了线性代数的一些最基本内容，第七、八章介绍了线性规划的基本概念和方法．

第一章　行列式

行列式是一种基本的数学工具．本章主要内容包括介绍 n 阶行列式的定义，以三阶行列式为主介绍行列式的性质及计算方法，最后介绍用 n 阶行列式求解 n 元线性方程组的克拉默(Cramer)法则．

§1.1　二阶与三阶行列式

一、二元线性方程组与二阶行列式

行列式的概念首先是在求解方程组个数与未知量个数相同的一次方程组(以后常把一次方程组称为线性方程组)中提出来的，例如，用消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

为消去未知数 x_2，以 a_{22}，a_{12} 分别乘上列两方程的两端，然后两个方程相减，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2$$

类似地消去 x_1，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，求得方程组(1.1)的解为

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\qquad x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \tag{1.2}$$

为了表述方便，引入记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{1.3}$$

这个记号称为二阶行列式，它由 2^2 个数组成，它代表一个算式，等于数 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

数 $a_{ij}(i,j=1,2)$ 称为行列式(1.3)的元素，元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为行标，表明该元素位于第 i 行，第二个下标 j 称为列标，表明该元素位于第 j 列．

上述二阶行列式的定义，可用对角线法则来记忆．如图1-1所示，把 a_{11} 到 a_{22} 的实连线称为主对角线，a_{12} 到 a_{21} 的虚连线称为副对角线，于是二阶行列式便是主对角线上的两元素之积减去副对角线上两元素之积所得的差．

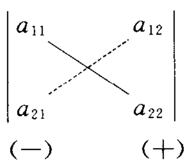

图 1-1

利用二阶行列式的概念，那么式(1.2)中 x_1,x_2 的分子也可以写成二阶行列式，即

$$b_1a_{22}-a_{12}b_2=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\qquad a_{11}b_2-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

若记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

则式(1.2)可写成

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

注意，这里的分母 D 是由方程组(1.1)的系数所确定的二阶行列式(称为系数行列式)，x_1 的分子 D_1 是用常数 b_1,b_2 替换 D 中 x_1 的系数 a_{11},a_{21} 所得的二阶行列式，x_2 的分子 D_2 是用常数 b_1，b_2 替换 D 中 x_2 的系数 a_{12},a_{22} 所得的二阶行列式．

例 1.1 求解二元线性方程组 $\begin{cases}3x_1+x_2=9\\ x_1-2x_2=-4\end{cases}$.

解 由于

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=3\times(-2)-1\times 1=-7\neq 0$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 9 & 1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = 9 \times (-2) - 1 \times (-4) = -14$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 3 \times (-4) - 9 \times 1 = -21$$

所以

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-14}{-7} = 2, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-21}{-7} = 3$$

二、三阶行列式

对于 9 个元素 $a_{ij}(i,j = 1,2,3)$，记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

称为三阶行列式，它由 3^2 个数组成，也代表一个算式，等于数 $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \tag{1.4}$$

式(1.4)中右端含有 6 项，每项均为不同行不同列的三个元素的乘积再冠以正负号，其代数和也可以用画线(见图 1-2)的方法记忆．其中各实线连接的三个元素的乘积是代数和中的正项，各虚线连接的三个元素乘积是代数和中的负项．

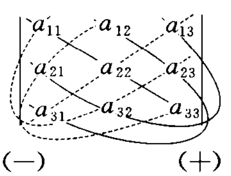

图 1-2

当引入三阶行列式的概念，对于三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

若系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

用消元法求解这个方程组，可得

$$x_1 = \frac{D_1}{D},\quad x_2 = \frac{D_2}{D},\quad x_3 = \frac{D_3}{D}$$

其中 $D_j(j = 1,2,3)$ 是用常数 b_1,b_2,b_3 替换 D 中的第 j 列所得的行列式，即

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

例 1.2 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

解 按对角线法有

$$\begin{aligned} D = & 1\times 2\times(-2) + 2\times 1\times(-3) + (-4)\times(-2)\times 4 - \\ & (-4)\times 2\times(-3) - 2\times(-2)\times(-2) - 1\times 1\times 4 = -14 \end{aligned}$$

例 1.3 $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} > 0$ 的充分必要条件是什么？

解 按对角线法有 $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a^2 - 1$. 由于 $a^2 - 1 > 0$ 当且仅当 $|a| > 1$，所以 $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} > 0$ 的充分必要条件是 $|a| > 1$.

对角线法只适用于二阶与三阶行列式，为研究 n 阶行列式($n > 3$)，我们先介绍有关全排列及逆序数的概念，然后引入 n 阶行列式的定义.

§1.2 全排列及逆序数

定义 1.1 将 n 个不同的元素按某种顺序排成一列，称为这 n 个元素的一个全排列(简称排列，也称 n 级排列).

显然，当 $n > 1$ 时，按不同的顺序它们可以组成不同的排列，其排列的总数通常用 P_n 表示.

例如三个元素 1,2,3 可以组成以下六种全排列：123,132,213,231,312,321，故 $P_3 = 6$.

一般，从 n 个不同的元素中任取一个放在第一个位置上，有 n 种取法；取定后从剩下的 $n-1$ 个元素中又取一个放在第二个位置上，有 $n-1$ 种取法；如此继续进行下去；直到最后只剩下一个元素放在第 n 个位置，只有一种取法，故有

$$P_n = n(n-1)\cdots 3\times 2\times 1 = n!$$

在本章内容中，我们所提到的排列中各元素均为正整数，取 n 个元素的一个全排列表示 n 个元素 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列.

对于 n 个不同的正整数，我们规定从小到大为标准次序，从小到大的排列称为标准排列，其他的排列都或多或少地改变了标准次序.

例如 4213 是 1,2,3,4 的一个排列,显然改变了标准排列 1234.

定义 1.2 在一个排列中,如果一个大数排在一个小数之前,就称这两个数组成一个逆序.一个排列中,逆序的总数称为这个排列的逆序数.

例 1.4 求排列 4213 的逆序数.

解 该排列中共有 4 与 2,4 与 1,4 与 3,2 与 1 这四个逆序,所以排列 4213 的逆序数是 4.

为了方便起见,我们用 $\tau(a_1a_2\cdots a_n)$ 表示排列 $a_1a_2\cdots a_n$ 的逆序数.例如 $\tau(4213)=4$.

给定排列 $a_1a_2\cdots a_n$,我们可以按照以下方法计算逆序数,设在第一个数 a_1 后面比它小的数有 t_1 个,在第二个数 a_2 后面比它小的数有 t_2 个,……,第 $n-1$ 个数 a_{n-1} 后面比它小的数有 t_{n-1} 个,则该排列的逆序数

$$\tau(a_1a_2\cdots a_n)=t_1+t_2+\cdots+t_{n-1}$$

例 1.5 求排列 32514 的逆序数.

解 $t_1=2,t_2=1,t_3=2,t_4=0$,于是 $\tau(32514)=5$.

例 1.6 求排列 $n(n-1)\cdots 321$ 的逆序数.

解 $t_1=n-1,t_2=n-2,\cdots,t_{n-1}=1$,于是

$$\tau(n(n-1)\cdots 321)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n-1)}{2}$$

由逆序数定义不难得出:标准排列的逆序数为零.

定义 1.3 设 $a_1a_2\cdots a_n$ 是一个排列,若 $\tau(a_1a_2\cdots a_n)$ 是一个偶数,则称 $a_1a_2\cdots a_n$ 为偶排列;若 $\tau(a_1a_2\cdots a_n)$ 是一个奇数,则称 $a_1a_2\cdots a_n$ 为奇排列.

例如,4213 是一个偶排列,32514 是一个奇排列.

§1.3 n 阶行列式的定义

§1.1 给出了二阶、三阶行列式,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

由二阶、三阶行列式容易看出:

(1) 二阶行列式表示所有不同行不同列的两元素的乘积的代数和.两元素的乘积可以表示为

$$a_{1j_1}a_{2j_2}$$

j_1j_2 为 2 级排列,当 j_1j_2 取遍了 2 级排列 12,21 时,即得到二阶行列式所有项(不包含符号),共为 $2!=2$ 项.

三阶行列式表示所有位于不同行不同列的 3 个元素乘积的代数和,3 个元素乘积可以表示为

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

$j_1j_2j_3$ 为 3 级排列，当 $j_1j_2j_3$ 取遍了 3 级排列时，即得到三阶行列式所有的项(不包含符号)，共为 $3! = 6$ 项.

(2) 每一项的符号是，当这一项中元素的行标按标准排列后，如果对应的列标构成的排列是偶排列则取正号，是奇排列则取负号. 例如三阶行列式中带正号的三项列标排列 123，231，312 都是偶排列，带负号的三项列标排列 132，213，321 都是奇排列.

综上所述，二阶行列式可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2}(-1)^{\tau(j_1j_2)}a_{1j_1}a_{2j_2}$$

式中 $\sum\limits_{j_1j_2}$ 表示对 1，2 所有排列求和. 三阶行列可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

式中 $\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 表示对 1，2，3 所有排列求和.

仿此，可给出 n 阶行列式的定义.

定义 1.4 由 n^2 个数 $a_{ij}(i,j = 1,2,3,\cdots,n)$ 排成 n 行 n 列，并记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.5}$$

称为n 阶行列式，简记作 $\det(a_{ij})$. 这 n^2 个数称为行列式的元素，a_{ij} 称为行列式第 i 行第 j 列元素，i 称为 a_{ij} 的行标，j 称为 a_{ij} 列标. n 阶行列式是一个数，这个数等于所有取自不同的行、不同的列的 n 个元素，并将行标按标准次序排列起来作乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.6}$$

的代数和. 这里 $j_1j_2\cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，式(1.6) 的乘积共有 $n!$ 项，式(1.6) 的每项都按下列规则带符号：当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列时带有正号，当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是奇排列时带负号.

为此行列式(1.5) 可简写为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.7}$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对 $1,2,\cdots,n$ 的所有排列求和，故式(1.7) 是 $n!$项的代数和.

例如，四阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

所表示的代数和中共有 4! = 24 项. 其中含有一项 $a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$，而 $\tau(1324)=1$，则 $a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$ 前面应冠以负号，同时也含有另一项 $a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}$，而 $\tau(3412)=4$，则 $a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}$ 前面应冠以正号. 注意 24 项中不会含有 $a_{11}a_{13}a_{22}a_{44}$ 或 $a_{13}a_{22}a_{32}a_{41}$，想想为什么？

例 1.7　计算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & e & f & 0 \\ g & 0 & 0 & h \end{vmatrix}$$

解　根据定义，D 是 4! = 24 项的代数和. 但是，由于 D 中不少元素为零，所以 24 项不少的项为零. 不为零的项只有四项：$acfh$，$bdeg$，$adeh$，$bcfg$，它们对应的列标排列依次为 1234，4321(偶排列)，1324，4231(奇排列)，因此

$$D=acfh+bdeg-adeh-bcfg$$

例 1.8　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{23} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解　这样的行列式叫下三角形行列式.

由于 D 的第一行除了 a_{11} 外其他元素都是零，于是要得到非零项，第一行必须选 a_{11}，而第二行不能选 a_{21}，因为第一列中只能选一个元素，所以在第二行中只能选非零元素 a_{22}，同理第三行只能选 a_{33}，……，第 n 行只能选 a_{nn}，这样 D 不含零元素的只有一项 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$，又该项行标、列标都是按标准次序排列，前面的符号取正，所以

$$D=a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

这表明下三角形行列式等于主对角线上元素的乘积.

行列式中从左上角到右下角的对角线称为主对角线. 从右上角到左下角的对角线称为副对角线.

同理可得上三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

例 1.9　证明对角行列式

$$(1)\quad D_1=\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

(2) $D_2=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$

证 因(1)是上三角形行列式特殊情况，结果显然. 现证(2). 由于行列式 D_2 不含零的项只有 $\lambda_n\lambda_{n-1}\cdots\lambda_2\lambda_1$，而该项行标已按标准次序排列，列标排列 $n(n-1)\cdots321$ 的逆序数为

$$\tau(n(n-1)\cdots321)=\frac{n(n-1)}{2}$$

所以
$$D_2=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_n\lambda_{n-1}\cdots\lambda_2\lambda_1=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

§1.4 行列式的性质

上节讲了行列式的定义，直接用行列式的定义计算行列式，一般来说是较繁琐的，因此必须对行列式作进一步的研究，找出切实可行的计算方法. 本节我们不加证明地给出行列式的性质，只用三阶行列式加以验证，详细证明读者可参考相关的教材.

将行列式 D 的行与相应的列互换后得到的新的行列式，称为 D 的转置行列式，记为 D^{T} 或 D'. 其互换过程称为对 D 的转置. 即若

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式具有如下性质：

性质 1 行列式转置后，其值不变，即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

例如

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}=-12+1+4=-7$$

其转置行列式

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}=-12+1+4=-7$$

此性质说明了行列式中，行、列地位的对称性，由此可知，行列式中行的性质对列也同样