利息理论

The Theory of Interest

■ 熊福生 著

武汉大学出版社

全国优秀出版社

利息理论

The Theory of Interest

■ 熊福生 著

本书的出版得到新华人寿保险股份有限公司的资助

武汉大学出版社
全国优秀出版社

图书在版编目(CIP)数据

利息理论/熊福生著.—武汉：武汉大学出版社，2004.5
ISBN 7-307-04210-X

Ⅰ.利…　Ⅱ.熊…　Ⅲ.利息—理论研究　Ⅳ.F032.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 042730 号

责任编辑：柴　艺　　**责任校对**：王　建　　**版式设计**：支　笛

出版发行：**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)
(电子邮件：wdp4@whu.edu.cn　网址：www.wdp.whu.edu.cn)
印刷：武汉大学出版社印刷总厂
开本：787×980　1/16　　**印张**：17.25　　**字数**：312 千字
版次：2004 年 5 月第 1 版　　2004 年 5 月第 1 次印刷
ISBN 7-307-04210-X/F·868　　**定价**：26.00 元

版权所有，不得翻印；凡购我社的图书，如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请与当地图书销售部门联系调换。

前　言

利息理论是用数理分析的方法对利息及其相关问题进行定量分析的理论。它是精算学的重要组成部分,也是金融工程学、金融数学的基础学科。利息理论与现代金融学、保险学、投资学、财务管理学有着密切的联系,它具有极强的学科交叉性和融合性。

利息理论是保险产品定价理论和金融产品(包括衍生产品)定价理论的基础。它所提供的分析方法是进行金融分析、投资分析和财务分析的重要方法之一。它的应用范围包括金融、保险、投资、财务管理等领域。

精算学(包括利息理论)引入我国虽然只有十几年的历史,但在开始时就直接引用国外原版教材和最新资料,直接引进国际前沿知识和先进成果。通过国内保险精算界学者的努力,很快实现了我国的精算学与国际接轨的目标。现在国内已有一些精算学方面的教材和著作出版,也涌现出了不少这方面的新的研究成果。

本人从事了多年的精算学教学和研究工作,还曾经负责过一段时间的"北美精算师"(SOA)的考试工作,获得了一些经验和体会,积累了一些知识和研究成果,在大量参阅国内外相关文献和广泛吸收、提炼已有成果的基础上,结合自己的体会和研究成果,用了两年多的时间撰写成这部著作。

本书的主要内容有:利息、利率和利力的基本分析,积累值和贴现值的计算方法,年金及现金流的现值与终值的计算方法,债务偿还的定量分析,投资收益率分析,随机利率模型和利率期限结构理论等。

本书具有体系完整、结构严谨、层次清晰、内容丰富和理论联系实际的特征。这些特征充分体现了利息理论的完备性、严谨性、科学性和应用性。本书还具有新颖独特的表述、明晰细致的笔触、深入浅出的分析和通俗贴切的解释等特点。这些特点既能增强数理背景的读者对利息理论的金融学理解,又能增进金融、保险、投资、财务背景的读者对利息理论的精算学理解。

本书主要在以下几个方面具有创新性:

(1)介绍了连续复利计息方式,分析了连续复利的机理,讨论了各种复利计息方式的特征并比较了它们之间的优缺点,得到了连续复利计息方式是一种最

合理、最科学的计息方式的结论。分析了连续复利下的名义利率和连续复贴现下的名义贴现率与其利(息)力之间的联系和区别，指出了它们在概念上的差异，但又在本质上相一致的事实，澄清了在这个问题上的模糊认识。

(2)扩展了某些年金的现值与终值的计算公式，并用较新颖的方式展现了在各种复利方式和各种支付方式(包括连续复利和连续支付)下年金公式的表达方式，充分利用了这些公式所具有的某种排比性、对称性，使得繁杂的数理推导和众多的数学公式在表述上具有艺术感和欣赏性，从而能够极大地提高读者对这部分内容的学习兴趣和学习效率。

(3)提出了“贷款的实际利用时数”这一创新概念，讨论了贷款的实际利用时数的相关问题，得到了在满期偿还法、分期偿还法、偿债基金法等各种偿债方式下贷款的实际利用时数的计算公式，并指出了这一概念对融资、投资双方的金融意义。这部分创新成果是利息理论与金融实务相结合的产物，是理论联系实际的结晶。

(4)给出了一种全新的随机利率模型——对数伽玛分布与负对数伽玛分布模型。证明了该模型具有与对数正态分布模型相同的性质，即积累值和贴现值都具有“再生性”的性质，并且得到了当随机利率服从帕拉图分布时，则其积累值服从对数伽玛分布，贴现值服从负对数伽玛分布的结论。指出了对数正态分布和对数伽玛分布模型的特征对金融产品的定价，尤其是金融衍生工具的定价理论所具有的重要意义。对数伽玛分布与负对数伽玛分布模型是对数正态分布模型的重大推广。

(5)建立了几种特殊的随机利力过程，得到了随机利力过程的正态分布模型、伽玛分布模型、布朗运动模型的一些有关结果，并讨论了这些结果在金融分析中的应用。

本书可用作高等院校保险精算、金融、投资及财务管理等专业高年级本科生和研究生相关课程的教材和教学参考书，也可供保险、银行、证券、财务等从业人员或有兴趣的读者阅读与学习参考。

由于作者水平所限，书中定有不足或不当之处，也难免存在缺点和错误，敬请读者和同行们批评指正。

此书的出版得到了新华人寿保险股份有限公司的资助，在此作者表示衷心的感谢。同时还要感谢中南财经政法大学新华金融保险学院及保险系对撰写此书给予的支持，感谢武汉大学出版社及责任编辑对出版本书给予的支持。

作者谨识

2004 年 4 月 8 日

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

目　录

第一章　利息分析

利息及其利率、贴现率等是金融理论与实务中最基本最重要的概念，也是金融市场(包括货币、资本、保险等市场)中最基础、最重要的度量。本章将从定量分析的角度给出这些度量的定义和计算公式，介绍常用的计息方法，分析各种度量之间的关系，形成利息的基本理论。

第一节　利息与积累值

一、利息与利率

利息定义为借款人付给资金出借人(投资人)对使用其资金的报酬。由于资金借出后，资金出借人暂时放弃了对这笔资金的使用权，延迟了对这笔资金的运用期，给资金出借人的消费或投资带来了一定的时空损失，因而需要付给出借人一定的额外资金作为补偿，作为报酬。即借款人除应归还资金出借人原来的借款外，还要支付一个附加金额，这个附加金额就叫做利息(interest)。这样，利息可被视为借款者付给出借人的租金。根据这种定义，利息可以解释为资金或货币的时间价值。

在利息的计算中，原来所借资金称为本金(principal)。利用本金的时间长度称为租用期或投资期(term)。在投资过程中，每一次计算利息的时刻称为计息时，相邻两次计算利息的时间间隔称为计息期(period)。一笔金融业务的计息期长度通常是约定的，每一计息期一般是等长度的，如有：日、周、月、季、半年、一年或几年不等。

一般情况下，本金和利息的表现形式都是货币。例如，某公司年初向银行借款100万元，并约定在年中偿还利息3万元，到年底再偿还利息3万元和归还本金100万元。这笔金融业务的本金和利息都是货币，年初借款100万元为本金，年中和年底总共偿还利息是6万元，利用期为一年，计息期为半年。

从理论上讲，本金和利息的表现形式可以不是货币，它们可以是货币以外的形式。例如，某私营企业向一公司租用生产某种产品的厂房设备，并规定每年向

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

该公司缴纳一定百分比的产品作为租用费。在这个租赁过程中，厂房设备是本金，缴纳的一定百分比产品就是利息。尽管本金和利息都可以不必为货币，但它们都是可以货币化的，是可以用货币来体现的。因此，这里我们只讨论货币表现形式的本金和利息。

单位时间上，单位本金所获得的利息称为这个单位时间上的利息率，简称为利率(rate of interest)，利率常用字母 i 来表示，并用百分比(%)来度量。一个单位时间有时也称为一个度量时期或就简称为期。由于单位时间的度量有长短不同，因而，利率一般有年利率、半年利率、季利率、月利率、日利率等。最常用的是年利率。某个单位时间上的利率可由如下公式求得：

$$\text{某单位时间的利率} = \frac{\text{这个单位时间上所产生的利息}}{\text{这个单位时间之初的本金}}$$

如年利率为：

$$\text{年利率} = \frac{\text{年内产生的利息}}{\text{年初的本金}}$$

本书中若无特别指明，则所讲的“利率”均为年利率。即我们所用的单位时间一般是指一年期。

例 1.1 设有一农业银行年初向某农户发放贷款 10 000 元，并规定农户到年底连本带利返还银行 10 600 元。求这笔贷款业务所获得的利息量与年利率。

解： 所获得利息量 = 年底本利和 − 年初本金

$$= 10\,600 - 10\,000 = 600(\text{元})$$

$$\text{年利率} = \frac{\text{年内产生的利息}}{\text{年初本金}} = \frac{600}{10\,000} \times 100\% = 6\%$$

在经济活动中，利率是一个备受关注的经济变量。无论是个人，还是企业，利率水平的高低直接影响其消费行为和投资策略。可以说，利率问题是整个金融领域里最基础、最核心的问题之一，几乎所有的金融行为都与利率有着或多或少的联系。从借款人的角度来讲，利率就是使用资金的单位成本，即借款人由于使用贷款人的资金而向贷款人支付的价格；从贷款人的角度来讲，利率是贷款人由于借出资金所获得的报酬率。

二、积累值与积累函数

一笔投资资金到投资期期末的本金和利息之和，即本利和，称为这笔投资资金在投资期末的积累值(accumulated value)，也称为累积值、积存值、终值等。积累值就是俗称的连本带利。积累值与本金之差就是投资期间所赚取的利息量。

普通的金融业务是带有利息的货币量的投资行为。例如某人去银行存款，最初的资金量就是本金，一个时期后的资金总量就是积累值，只要已知投资的本金

和利率，就能通过一定的计息方式计算出投资期期末的终值。在本章我们先假定在投资期内本金没有追加，也没有撤离的现象，投资基金的变化完全由利息来决定。在以后的章节将放宽这个假设，允许本金在投资过程中有追加或撤离。

决定积累值的大小有三个主要因素，那就是本金、利率和投资期的长度。一般而言，本金越多、利率越高、投资期越长，其积累值就越大。由于时间长度可以用许多不同的单位来度量，如日、周、月、季、半年、一年等，但最方便、最常用的时间单位(度量期)是一年。正如前面所规定的那样，在无特别指明的情况下，本书所用的度量期均为一年。

一笔投资项目，我们不仅要知道它在投资期末的积累值，而且有时也需要知道它在投资期间内任一时刻 t(t 年末)的积累值(t 不一定是整数)。这样当 t 取不同的值时，其积累值一般也不相同，于是积累值随投资时间的长度 t 的变化而变化。我们把这种随投资时间变化而变化的积累值称为积累函数(accumulated function)或终值函数，它是投资时间长度 t 的函数。

考虑本金为一个单位金额的投资，我们定义该投资在时刻 t 的积累值为积累函数 $a(t)$，并称其为单位积累函数。它给出了一个单位本金的投资到时刻 t($t \geqslant 0$)年末的终值。

这个函数 $a(t)$ 具有以下性质：

(1) $a(0) = 1$。$t = 0$ 为投资初始时刻，即单位积累函数的初始值为 1。

(2) $a(t)$ 一般是递增函数。若随着时间 t 的增加函数值 $a(t)$ 减少的话，将意味着利息为负值。尽管负利息在数学上是可能的，但在实际中很少见。不过确实在某些情况下会出现负利息。例如，一笔投资资金在经过一段时间后亏本了。如果函数值在某段时间上为常数，则暗示着在这段时间上利息为零，这种现象偶有发生。

(3) $a(t)$ 在多数情况下是连续函数，如果利息像通常情况那样在投资期内是连续产生的，则函数 $a(t)$ 是连续的，如果利息在某个时段不产生，则函数 $a(t)$ 在这个时段就不连续(见图 1.1(d))。

图 1.1 给出了四种单位积累函数的例子。图 1.1(a) 是线性递增函数，图 1.1(b) 是指数递增函数；图 1.1(c) 是水平直线，它表示零利息方式的积累函数；图 1.1(d) 表示利息产生不是连续的，在每个间断区间上利息产生为零，而利息的产生只发生在间断点处的积累函数。其中指数递增积累函数最常见。

通常我们把一个单位金额的本金在一个单位时间末的积累值称为积累因子(accumulation factor)，即当这个单位时间上的利率为 i 时，则其积累因子为：

$$a(1) = 1 + i \tag{1.1}$$

一般情况下，初始本金不一定是一个单位金额，而是 P 个单位金额($P >$

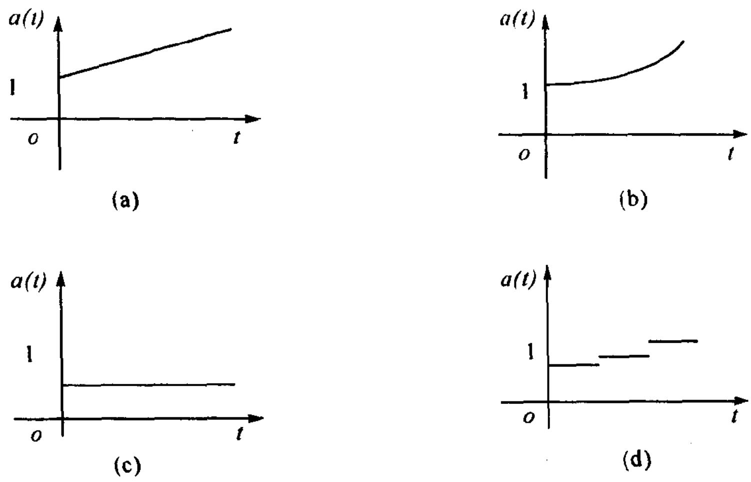

图 1.1 积累函数的四个例子

0)。这样我们可以定义一个总量积累函数 $A(t)$,它给出了初始投资额为 P 个单位本金到时刻 $t(t\geqslant 0)$ 年末的终值。通常 $A(t)$ 与 $a(t)$ 仅相差一个倍数 P,即:

$$A(t) = P\cdot a(t) \tag{1.2}$$

以及:

$$A(0) = P$$

$A(t)$ 具有与 $a(t)$ 的上述(2)和(3)相同的性质。$a(t)$ 可看做是 $A(t)$ 当 $P=1$ 时的特例。在很多情况下单位积累函数与总量积累函数可以互相代换使用。因此,我们只重点讨论单位积累函数的相关问题。若无特别表明,以后的积累函数均为单位积累函数。

如果我们用符号 I_n 表示投资在第 n 年所赚取的利息量,则:

$$\begin{aligned} I_n &= A(n) - A(n-1)\ (n\geqslant 1\ \text{为整数}) \\ &= P[a(n) - a(n-1)] \end{aligned} \tag{1.3}$$

式中:$A(n)$ 是第 n 年末的积累值,$A(n-1)$ 是第 n 年初的积累值,P 是初始投资本金。从投资期初开始到第 n 年末所赚取的总利息量为:

$$A(n) - A(0) = I_1 + I_2 + \cdots + I_n = Pa(n) - P$$

如果用符号 i_n 表示投资本金在第 n 年里的年利率,则由利率的定义有:

$$\begin{aligned} i_n &= \frac{I_n}{A(n-1)} = \frac{A(n)-A(n-1)}{A(n-1)} \\ &= \frac{a(n)-a(n-1)}{a(n-1)} \end{aligned} \tag{1.4}$$

第二节　计 息 方 法

本节将介绍金融业务中的几种重要的计息方法，即单利、复利计息方法。其中复利计息方法又可分为标准复利、一般复利、连续复利的计息方法，并讨论各种计息方法的特点和比较它们之间的优劣性和实用性。

一、单利

假若一笔投资资金在整个投资期内所产生的利息始终不转为本金，不作再投资，只有本金保持投资状态，即在前一计息期内所产生的利息并不作为后一计息期的本金，只是把每一期所产生的利息累加到投资期末，按照这种方式增长的利息称为单利息，简称为单利(simple interest) 或常利。这种计息方法称为单利计息方法。

单利的一个显著特征是，一定的本金在投资期内的每一个长度相等的时间上所产生的利息量是相等的。例如一位投资者开设了一个储蓄账户并存入人民币 10 000 元，该账户按每年单利 4% 支付利息，那么一年后投资者可得到本利和为 $10\,000 + 10\,000 \times 4\% = 10\,400$ 元，而到第二年末的本利和为 $10\,000 + 10\,000 \times 4\% + 10\,000 \times 4\% = 10\,800$ 元。第一年度获得利息 400 元，第二年度获得利息也是 400 元。

对于一般情形下的单利，如果 P 为本金，i 为单位时间上的利率，投资期为 t 个单位时间，则投资到 t 期末所获得的全部利息量 I 为：

$$I = P \times i \times t \tag{1.5}$$

t 期末的本利和为：

$$A(t) = P + I = P(1 + it) \tag{1.6}$$

于是在单利下，t 期末的(单位) 积累函数 $a(t)$ 为：

$$a(t) = 1 + it \tag{1.7}$$

值得注意的是，i 和 t 的时间度量必须一致，即若利率 i 取年利率，则时间 t 的单位是年，若利率 i 取月利率，则 t 的单位应是月，等等。

例 1.2　如果某种存单每年单利率为 3%，存款金额为 2 000 元，求：(1)3 个月后所产生的利息；(2)3 年后所产生的利息量；(3)4 年半后的积累值。

解： (1) $I = Pit = 2\,000 \times 3\% \times \frac{1}{4} = 15$(元)

(2) $I = Pit = 2\,000 \times 3\% \times 3 = 180$(元)

(3) $A\left(4\frac{1}{2}\right) = P(1 + it) = 2\,000(1 + 3\% \times 4.5) = 2\,270$(元)

二、标准复利

假若一笔投资资金在整个投资期内，本金和利息总处于投资状态，即本金在前一计息期内所产生的利息自动作为后一计息期的本金，用于再投资使之再产生利息，并把所产生的全部利息积累到投资期末。按照这样的方式增长的利息称为复利息，简称为复利(compound interest)，这种计息方式称为复利计息方法。

在复利计息方法中，每一次计算利息的时刻，也就是把计算出来的利息自动转为本金的时刻。因此，计息时刻也可叫做利息自动转换时刻，相邻两次计算利息的时间间隔，即计息期，也可称为复利期或利息转换期。复利终值与原始本金的差额就是复利息。

对于复利计息方法，就是将每一计息时刻计算出来的利息都自动转为本金，连同原来的本金，在下一计息期间再生利息，即俗称的"利滚利"，如此反复地累积到投资期末。

为了叙述的方便，我们可以把时间单位为一年，每年利息转换一次的复利叫做标准复利(standard compound interest)。

下面我们讨论在标准复利下的积累函数的表达式。设有一个单位金额的投资，年利率为 i，复利期为一年。则在第一年末本利和为 $1+i$，将 $1+i$ 作为第二年初的投资本金，那么第二年末可得利息 $i(1+i)$，本利和为 $(1+i)+i(1+i)=(1+i)^2$。同理，复利计息方式又将 $(1+i)^2$ 作为第三年初的投资本金，在第三年末可得本利和 $(1+i)^2+i(1+i)^2=(1+i)^3$。依此类推，到第 t 年末可得到该项投资的复利终值为 $(1+i)^t$，t 为非负整数。

一般地，若期初本金为 P，年利率为 i，在标准复利下，其投资到 t 年末的终值为：

$$A(t)=P(1+i)^t \quad (t\geqslant 0) \tag{1.8}$$

在 t 年末的(单位)积累函数 $a(t)$ 为：

$$a(t)=(1+i)^t \quad (t\geqslant 0) \tag{1.9}$$

(1.8)式和(1.9)式中的时间 t，可以不是整数。

值得注意的是，在得出公式(1.8)与(1.9)的过程中，隐含了一个假设，即所赚利息在复利下以与原投资本金相同利率再投资。但在许多金融实务中，再投资利率可能与原投资利率不同，这种情况将在第六章中进行分析。

例 1.3 如果某种存单按标准复利方式计息，年利率为 3%，存款金额为 2 000 元，求 4 年半后的终值及其所赚利息。

解： $A(4.5)=P(1+i)^t=2\,000(1+3\%)^{4.5}=2\,284.53$(元)

$I=A(4.5)-A(0)=2\,284.53-2\,000=284.53$(元)

利息与例 1.2 中单利情形的利息 270 元相比，多出了 14.53 元，这就是复利计息的“利滚利”的结果。

三、一般复利

在标准复利中，计息期为一年，即每隔一年计息一次，并将利息转为本金进行复利。但在金融实务中也存在着一年计息数次，或多年计息一次的计息方式。即存在着一年利息转换数次，或多年利息转换一次的复利。我们把这种计息期可以不为一年的计息方式称为一般复利(general compound interest)。

下面我们讨论在一般复利下的积累函数表达式。设有一个单位金额的投资，年利率为 i，每年计息 m 次($m>0$)，每次计息时间间隔相等，并设 m 为整数(先假定 m 为正整数，然后再放宽这一要求)。在这种一般复利下，每一复利期为 $\frac{1}{m}$ 年。由于年利率为 i，那么 $\frac{1}{m}$ 年的利率应为 $\frac{i}{m}$，因而第一个计息期末的利息应为 $\frac{i}{m}$，本利和为 $\left(1+\frac{i}{m}\right)$。但在复利下，它又是第二个计息期初的本金，因此，第二个计息期末的本利和为 $\left(1+\frac{i}{m}\right)+\left(1+\frac{i}{m}\right)\frac{i}{m}=\left(1+\frac{i}{m}\right)^2$。依此类推，一年末的本利和为 $\left(1+\frac{i}{m}\right)^m$，$t$ 年末的本利和为 $\left[\left(1+\frac{i}{m}\right)^m\right]^t$。于是 t 年末的积累函数为：

$$a(t)=\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mt}\quad(t\geqslant 0)\tag{1.10}$$

如果初始本金为 P 时，则其总量积累函数为：

$$A(t)=P\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mt}\quad(t\geqslant 0)\tag{1.11}$$

事实上，当 m 不是整数时，(1.10) 式和(1.11) 式也是成立的。当 m 小于 1($m>0$) 时就意味着计息期超过一年。

同公式(1.8) 和(1.9) 一样，(1.10) 式和(1.11) 式中的时间 t 可以不是整数。并且公式(1.8) 和(1.9) 分别是公式(1.11) 和(1.10) 中当 $m=1$ 时的特例。

例 1.4　如果年利率为 4%，投资金额为 3 000 元，求计息期分别为：一年、一季、半个月、一天这四种情况下，投资在两年末的复利终值。

解：此处设定一年为 365 天，年利率 $i=4\%$，初始本金 $P=3\,000$ 元，投资期限 $t=2$ 年，由公式(1.11) 得：

(1) $A(2)=P(1+i)^t=3\,000(1+0.04)^2=3\,244.80$(元)

(2) $A(2)=P\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mt}=3\,000(1+0.01)^8=3\,248.57$(元)

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com