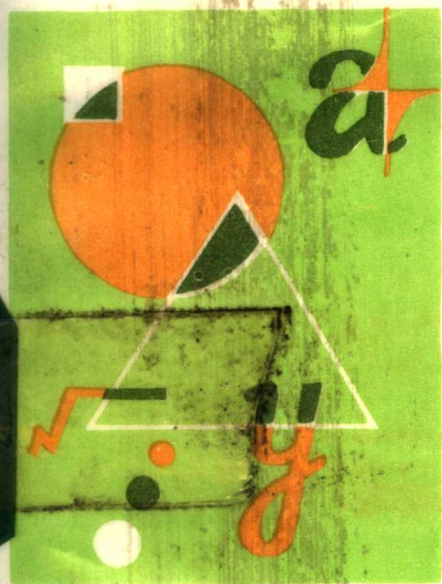


中学教育
科学丛书

中学数学教学

郭思乐 刘远图 著



光明日报出版社

中学数学教学

郭思乐 刘远图 著

光明日报出版社

《中学教育科学丛书》顾问、编委名单

(按姓氏笔划为序)

顾问: 王 铁 江山野 吴 夏
张 健 张承先 钱伟长
顾明远

编委: 田东平 李镜流 陈孝彬
姚维斗 高文元 阎金铎
崔相录

责任编辑: 李镜流 崔相录

中 学 数 学 教 学

郭思乐 刘远图 著

光明日报出版社出版

(北京永安路106号)

新华书店北京发行所发行 铁道部印刷厂印刷
787×1092毫米 32开 9.25印张 200千字

1987年10月第一版

1987年10月第一次印刷

印数: 1—39,000 册

统一书号: 7263·063 定价: 1.70元

为《中学教育科学丛书》序

茅 以 升

近年来，随着我国现代化建设事业的发展，越来越多的同志深切认识到教育的重要。诚如中共中央关于教育体制改革的决定所指出的：“今后事情成败的一个重要关键在于人才，而要解决人才问题，就必须使教育事业在经济发展的基础上有一个大的发展。”教育是上层建筑，它的存在和进步，要依靠一定的经济条件。而从长远来看，教育又必须走在经济的前头，为经济起飞准备大批优秀的人才。我相信，在党中央的领导下，我国的教育事业必将有一个较大的发展和更加美好的前景。作为一个老教育工作者和科技工作者，我感到由衷的喜悦，并愿聊尽绵薄，为发展祖国的教育事业，继续贡献力量。

现在，光明日报出版社要出版一套《中学教育科学丛书》，我认为这是一件很有意义的工作。

中学教育是整个教育系列中关键的一环，具有承上启下的作用。它要使亿万青少年学到基本的科学文化知识和技能，并为更高一级的职业技术教育和高等教育输送合格的学生。因此，发展教育，开发智力，提高全民族的科学文化水平，必须从中小学抓起。“百年树人”，中等教育的水平和质量，是关系全局、举足轻重的大事，万万忽视不得。

由于十年浩劫和长期“左”的思想的影响，我国教育从

总体上来看是落后了。这不仅表现在教材体系、教学设备、师资队伍和学生素质等方面，也表现在教学方法特别是教育科学研究方面。教育科学是一门综合性的学科，既有严密精确的一面，又有复杂和多样的特点。中学教育还是基础教育，以传授各门学科的基本知识为主，但同样有一个教育理论、教学方法问题，需要我们努力探索、研究和创新。我以为，当务之急是必须尽快改变那种层层加码，把学生当作教材的奴隶、作业的苦力的状况；改变老师讲、学生听（记）、满堂灌的“填鸭”式教学方法；采用启发式的教学方法，调动学生学习的主动性和积极性，培养学生具有初步的创造性思维能力。不但使他们牢固掌握基本的理论、概念、原理，而且能够灵活运用；不仅知其然，还要知其所以然。当然，这说起来容易，真要做到并不那么简单。这就有待于教育科学研究的开展，还需要教师们的努力。

教育科学的研究，不但是专业科技人员的事，也是广大教师的事。教育科学也有实验室，这个实验室就是课堂。作为塑造人类灵魂的工程师，教师不应当满足于当“教书匠”，而应该成为教育家，成为培养人才的艺术家的，造就一代又一代现代化建设人才。

我希望，《中学教育科学丛书》将对我国广大的中学教师加强理论修养、改进教学方法有所帮助；在提高中学教育质量，发展教育事业中起到一定的作用。

一九八五年十月

前 言

近年来,中学数学教学研究,正在蓬勃开展。一个具有我国特点的,与教育面向现代化,面向世界,面向未来相适应的数学教学体系正在逐步形成,各种新思想、新观点、新方法正在教学实践和理论研究中不断产生。在这本书的有限篇幅里,想要结合我们的研究,较为系统地反映中学数学教学理论及其新进展,实在不是一件易事。为了尽可能地使本书具有自己的特色,将较多的新信息奉献于读者之前,我们确定编写本书的一些基本原则是:

一、注意反映现代教学理论、教育心理学对数学教学的要求。本书着重讨论数学教学中教和学的关系。特别是学生思维发展与数学教学的关系。我们认为,一堂课,以至整个中学数学教学过程,其成效之高低主要取决于教师是否能按照学生思维发展规律组织教学活动。

二、注意中学数学教学的特点,用数学教学中的实例来说明教学理论和心理学的原理在数学教学中的应用,避免抽象的论述。

三、注重理论联系实际,即从我国中学数学教学的实际情况提出问题,并且用符合实际的办法(包括我国中学教师创造的一些办法)来解决这些问题。力求使读者从本书中得到一些启发,并能在教学工作中加以应用。

四、注意总结我国中学数学教学的优良传统,又注意吸取国外中学数学教学改革的新的成果,努力反映国内外近年来数学教学改革的实际经验。

在编写过程中，我们阅读了有关中学数学教学改革的调查报告、经验总结以及各种中学数学教学刊物上发表的文章。从中不仅得到了启迪，而且为编写本书积累了许多有用的素材。因此，可以说，本书的许多内容是我国中学数学教师共同劳动的成果的反映。

书中大部分内容，都由我们分别在北京、天津、江苏、湖南、广东、广西、河南、四川等十多个省市，向中学数学教育科学工作者和教师作过讲演，并征求过一些专家学者的意见。本书初稿完成以后，北京师范大学数学系教学法教研室主任曹才翰副教授对初稿作了十分仔细的审阅，提出了许多宝贵意见。在此，我们表示衷心的感谢。

由于我们学识浅薄，编写工作的时间比较紧迫，本书中难免会存在许多缺点和错误，希望广大读者多多指正。

刘远图 郭思乐 1986年4月

目 录

第一篇 中学数学教学的目的.....	(1)
第一章 中学数学教学的目的.....	(1)
第一节 作为中学学科的数学和作为一门科学的数学.....	(2)
第二节 数学知识的工具性和发展智力的作用.....	(7)
第三节 传授知识与培养思维能力.....	(10)
第四节 数学智育与科学思想教育.....	(14)
第二篇 数学学习的认识过程和规律.....	(17)
引言 数学的发明与数学的学习.....	(17)
第一章 动机和意向.....	(25)
第一节 意向和动机的概念.....	(23)
第二节 合适的问题情境.....	(27)
第三节 意向和动机的激起.....	(30)
第二章 发现猜想阶段.....	(36)
第一节 感性认识和直观.....	(36)
第二节 科学概念的形成过程(一)——抽象概括.....	(55)
第三节 科学概念的形成过程(二)——概念和下定义.....	(68)
第四节 科学结论的探索过程(一)——归纳.....	(78)
第五节 科学结论的探索过程(二)——类比.....	(89)
第六节 科学结论的探索过程(三)——直觉.....	(97)
第七节 数学思维的简单性原则.....	(105)
第三章 论证整理阶段.....	(117)
第一节 数学中逻辑论证的意义.....	(117)
第二节 判断和演绎推理.....	(121)

第三节	证明	(129)
第四节	公理化与知识结构	(138)
第四章	应用阶段	(145)
第一节	数学习题的功能	(145)
第二节	数学习题的分类	(149)
第三节	解题方法的思考过程	(155)
第五章	数学思维的若干研究	(173)
第一节	关于数学思维的一般说明	(173)
第二节	思维定势和灵感思维	(179)
第三节	求同和求异思维	(187)
第四节	创造性思维	(193)
	第三篇 数学教学工作	(198)
第一章	中学数学教学原则的体系	(198)
第一节	数学教学的教学论原则	(198)
第二节	教学与发展相结合的原则	(201)
第三节	教师的主导作用和学生的主体地位相统一的原则	(207)
第四节	理论联系实际的原则	(214)
第二章	影响数学教学方法的若干因素	(217)
第一节	数学方法论和数学教学方法	(217)
第二节	学习心理与数学教学方法	(227)
第三章	数学教学方法改革	(236)
第一节	关于课型和教学方法的一般说明	(236)
第二节	启发式原则	(241)
第三节	改革课堂结构, 实行启发式教学	(245)
第四节	积极开展课外活动	(249)
第四章	数学教学中的考查和考试	(253)
第一节	数学教学中的考查	(254)
第二节	数学考试命题的一般原则	(256)

第三节	数学试题的类型.....	(259)
第四节	数学考试标准化问题.....	(267)
第五节	评价试题的四项指标.....	(268)
第六节	标准分数.....	(277)
第七节	数学考试成绩的评定.....	(280)

第一篇 中学数学教学的目的

第一章 中学数学教学的目的

数学以现实世界中的空间形式和数量关系为研究对象。它的应用非常广泛，是学习和研究现代化科学技术必不可少的基础知识和基本工具，对于我国农业、工业、国防和科学技术的现代化具有十分重要的作用。在中学阶段，数学是一门重要课程，必须进一步提高数学教学质量，使学生切实打好数学基础，以适应四个现代化的需要。

中学数学教学具有鲜明的目的性。中学数学教学的目的，是数学教学活动，即包括选取教学内容、采用教法，决定考试命题和方式等在内的一切数学教学活动的依据。

中学数学教学的目的是，使学生切实学好从事现代化生产和进一步学习现代科学技术所必需的数学基础知识；培养学生的正确、迅速的运算能力，逻辑思维能力和空间想象能力，以逐步形成运用数学来分析和解决实际问题能力，在数学教学中，要结合教学内容向学生进行思想教育，激励学生为实现社会主义现代化学好数学的热情，培养学生的科学态度和辩证唯物主义世界观。在教学大纲的细则部分和课本里，对大纲规定基本知识的范围，以及对能力培养和思想教育的具体要求，都有所反映。但是，由于种种因素的影响，在实际工作

中，中学数学目的往往没有被清楚地认识和正确地贯彻。这些因素是：中学数学学科同科学的数学的联系和区别；知识的工具性同它的智力因素的关系；传授知识和培养能力的关系；智育和思想教育的关系等。在实践中，有的教师正是由于不能很好地领会数学教学的目的，因而不能恰当处理教材、教法和考试的问题，影响了教学质量。

例如，有的老师把中学数学教材，当成科学数学，只是枯燥地宣讲知识结论；有的片面强调数学知识作为工具的作用，以为在数学教学中传递知识就行了。另一些老师，把教学的目的局限在应付考试或处理课本的例、习题上，采取了“题海战术”，增加了学生的负担，又影响了学生在知识和能力方面的发展，等等。

因此，正确地认识数学教学的目的，遵循正确的途径进行教学活动，对提高数学教学质量有着根本的意义。

第一节 作为中学学科的数学 和作为一门科学的数学

作为中学学科的数学，和作为一门科学的数学，是不同的两个概念，它们的目的也有着很大的不同。每一个中学数学教师，都受过科学数学的教育，又从事着中学学科数学的教学，注意分清两者的联系与区别，对于正确领会数学教学目的，是十分必要的。

首先作为一门科学的数学同作为教学科目的数学有着密切的联系。事实上，中学数学的内容是科学数学的初步的、基本的知识；中学教材的表述方式，仍然大体保持着演绎的特征；中学数学也尽可能反映出科学数学的基本方法，例如模型化方法，公理化的方法、同构反演的方法（例如数形结合）

等等。从历史上看，数学科学的发展是由数学萌芽时期到常量数学(初等数学)时期，然后演变到变量数学时期，最后发展到近代数学的时期。

而人类从儿童到少年、青年的各个时期，比较适宜学习的数学内容，恰好也是按照上述四个时期所排成的序列。例如，小学阶段，学萌芽时期的数学(算术，以及同算术紧密联系的几何)；中学阶段，学习初等数学；大学阶段，学习变量数学与近代数学。这种人类认识的发展史同青少年、儿童认识的递进序列的有趣的一致性，为我们提供了联系科学数学和中学学科数学的重要线索。中学学科数学作为数学科学入门和基本的阶段，必须受到科学数学的指导。所以，对于中学数学教师，把科学数学作为基础和必修的课程，是完全必要的。

但是，两者除了在深度、难度上有不言而喻的差别外，还有着许多本质上的差别，表现在：

一、任务不同。科学数学工作者的任务在于揭示客观世界中空间形式和数量关系等数学现象的奥秘，而数学学科的任务则在于向青少年一代传授最必要、最基本的数学知识；前者虽然也受到一定社会因素的策动和制约，但它着重解决的是从数学的角度刻划自然和社会中的非心理因素的现象，因而具有一定的相对独立性。某一数学分支一旦产生，便可以在一定时期内依靠内在的矛盾运动获得发展，而后者着重解决的是如何传授知识的问题，面临的对象是活生生的人，它必须服从于一定的社会需要(如四化建设对人材的要求)，受教学制度(如班级授课制度)和人的心理因素的制约。不仅要考虑到内容的科学性，还要考虑到对象的可接受性，因而要把客观的数学规律同人的主观认识规律统一起来。

二、认识的主体不同。科学数学是以数学专业工作者、

数学家为主体，由他们用数学专著的形式把认知的结果反映出来的；而作为教学科目的数学，则以学生为认知主体，表现为数学课本。由于中学是基础教育阶段，数学又是一门必修课，这一课程就必须照顾到认知的主体中绝大多数将来并非成为攻读数学专业的学生，因而我们不能从培养数学家的角度去要求他们。

三、学科结构特征不同。科学数学表现为数学专著结构。它的特点是科学的系统性和结构的严谨性，而且不断追求统一和集中。例如，笛卡儿在发现坐标法以后，曾提出用代数方法统一整个数学的构想，希尔伯特曾提出著名的“希尔伯特纲领”，企图用统一的公理化体系来处理整个数学。这些企图已被证明是不可能的，但是数学家们仍然努力追求尽可能的统一，这是因为借此可以揭示数学现象的更为本质的东西，从而导致数学的发展。对于教学科目的数学来说，这种统一和集中的原则，是作为数学的基本精神和方法来看待的，因而同样把它反映在数学的课本结构中。但除此之外，数学课本结构还要考虑学习者的认知过程和结构。认知结构是指学习者在获得新知前的所有知识、经验及其联系方式。也就是说，专著结构考虑的是数学的思维结果，而学科的数学则不仅要反映一定的思维结果——人们想出了什么，还要研究人们应当怎么去想，即研究数学的思维过程。这样，数学课本结构，对于学生来说，就不象数学专著结构那样写得干巴巴的，而是通俗易懂和饶有趣味的。同时，还要根据各个数学门类的具体特点。往往采取分科的数学，如几何、代数等。

四、思维方式不同。作为科学的数学，是用尽可能严密的演绎体系来反映，并以形式逻辑和抽象思维为其外部特征

的，而作为学科的数学，虽然出于学会科学演绎和掌握足够容量的知识的需要，还大体上保留了演绎科学的特征，但却颇为强调正确地反映科学认识的辩证过程以及形象的、直觉的、归纳的和类比的数学探索性思维。例如，对于科学的数学，只要提出三角形内角和定理并加以论证就行了。而作为学科的数学，则可以插入剪剪拼拼、观察、归纳、猜想，提出命题，分析、论证等环节，这反映了数学结论的产生和发展的辩证思维过程。

近十多年来，由于数学教学中的一系列矛盾，引起了对科学数学和中学学科数学联系和区别的问题的重视。有些数学教育工作者不注意两者的区别，把中学数学教材结构同科学数学结构混同起来。人们曾以此批评布尔巴基学派和与此相联系的“新数学”运动。布尔巴基是由法国一些青年数学家组成的团体，他们认为人的思维可以有三种结构，代数结构，序结构和拓扑结构。这同数学的三种母结构是吻合的，由他们编纂的《数学原本》30余卷中，就按此把各种理论的基本概念仔细剖析，重新整理归纳。“新数学”运动，则将教材体系作了彻底改革，取消了各科的分科，把几何学代数化，以变换几何的观点、方法等各种新体系取代了欧氏几何体系，集合、函数的概念、结构的观念成为贯串全书的线索。“新数学”受到的批评是：“1、学校数学教学应面向全体学生，而不是培养数学家；2、抽象概念过早引入，学生接受不了；3、‘新数学’忽视了应用；4、数学不应割断历史，传统教学是最基本的，不能大量删节等”[1]所以在1980年召开的国际数学会会议上，有人又提出了“回到基础去”的口号。

自然，象洪水过后可能留下沃土一样，“新数学”也带来了一些有积极意义的东西。例如给数学添加了一些有活力的思

想，增加了一些科学成果。尤其在教材处理上，强调趣味性，纠正学生视数学为畏途的观念，强调数学直觉和实验，不崇尚技巧。此外，用流向图解方程以训练思维能力，用发现法等等。但总的来说，“新数学”运动受到了严重的挫折，由此得到的教训，就是不能混淆数学专著结构和数学课本结构的界限，不应当用数学专著结构去取代数学课本结构。

那么，数学教育既不能采取布尔巴基结构主义的做法，又不能向中学生输入过多的现代数学材料。那么，应当如何进行数学教育现代化呢？作为教学科目数学的现代化，当然离不开科学数学现代化的指导，但不能认为，世界上出现了西方所谓的“文献爆炸”，就可以否定传统的基础知识了。有一种看法认为，人类知识的飞速发展，同学校里过去传授的基础知识是有联系的。现代数学首先是19世纪数学的延续。因此，在现代化的浪潮中，仍然可以以必要的传统基础知识为主干。但是，改革不可避免，一些新结论、目前迫切需要的知识（例如培养学生善于收集数据和分析数据的统计学的知识等）应当列入教材。同时，尤其重要的是要发掘数学专著结构同数学课本结构的更内在的一致性，这就是数学家在完成数学专著的后面对所经历的思维过程和学生在学习中的思维过程所存在的一定程度的相似性。因此，数学教学的现代化，不是简单地追求同现代数学内容的相似，更重要的是追求它们的基本精神和方法的一致，也就是说，不是简单的“形似”，而要注重“神似”。改革教法，成为数学教学现代化的极为重要的内容。

中学学科的数学同科学数学相对照，使我们更清楚地看到，中学数学学科教学的直接对象是青少年学生，中学数学学科应为提高民族的文化科学水平，提高青少年一代的思维品质，为他们的后继学习和参加四化建设的实际工作打好基

础。数学教师不仅是数学工作者，更重要的是数学教育工作者，因而必须以极大的精力，去研究自己的教育对象，为他们学好数学，获得知识和发展能力而作出努力。

第二节 数学知识的工具性 和发展智力的作用

既然中学数学教材并不完全等同于科学数学，那么，教材所列的数学知识，也就有着科学数学所不具备的复合功能。一方面，它记载着前人积累的数学知识，这些数学知识已被证明在今后的学习和工作中是有用的工具，另一方面，它又是前人通过辛勤的智力劳动所获得的，它的获得过程，蕴含着培养智力的因素，也就是说，中学数学知识除了有工具性之外，还有着可贵的发展智力的作用。

认识这一点，在教学中有着重现实意义。例如，我们碰到了这样一些问题：数学教学仅仅传授结论吗？学习数学，仅仅接受一些模式，只掌握“模式的识别和模式的导通”就可以了吗？我们看到，为了应付考试，在一些学校里出现了解题模式的泛滥，一些非基本的、偶然的知识联系也被列为解题模式，在模式的海洋中，事物的本质、事物的内在联系被淹没了，从实际出发，进行概括、归纳、猜想、探求的生动过程被取消了。

这就给我们提出了怎样看待荷载数学教学内容的形式，如何看待数学知识的作用的问题，诚然，教学材料都具备一定的形式，但教学的目的并不专在掌握这些形式，还在于进行“形式陶冶”（陈建功先生语），使受教育者形成科学的态度、精神和掌握科学的基本方法。中学生学习平面几何，并不是要记住各种题型的解法，因为这些题型有一部分迟早是要忘