

G633.605/2

高中数学客观题 及其解法

主 编：刘茂林

副主编：张可法 单光泽



东北师范大学出版社

高中数学客观题及其解法

主 编 刘茂林
副主编 张可法 单光泽

高中数学客观题及其解法

**GAOZHONG SHUXUE KEGUANTI
JI QI JIEFA**

主编 刘茂林 副主编 张可法 单光泽

责任编辑:李殿国 封面设计:李冰彬 责任校对:金 伦

**东北师范大学出版社出版 吉林省新华书店发行
(长春市斯大林大街110号) 长春市第七印刷厂印刷**

**开本: 787×1092毫米 1/32 1988年7月第1版
印张: 17.3125 1988年7月第1次印刷
字数: 380千 印数: 1—14506册**

ISBN 7-5602-0174-1/G·54 定价: 3.80元

目 录

第一章 绪 论.....	(1)
§ 1 客观题的意义和作用.....	(1)
§ 2 客观题的类型及其结构.....	(5)
§ 3 编拟客观题的原则和方法.....	(14)
第二章 客观题的基本解法.....	(23)
§ 1 观察法.....	(24)
§ 2 试验法.....	(31)
§ 3 筛选法.....	(36)
§ 4 逻辑分析法.....	(41)
§ 5 几何直观法.....	(47)
§ 6 多元选择题的解法.....	(52)
第三章 客观题荟萃及解法举例.....	(56)
§ 1 复数.....	(56)
§ 2 方程与方程组.....	(82)
§ 3 函数.....	(107)
§ 4 不等式.....	(139)
§ 5 排列组合、二项式定理.....	(178)
§ 6 数列与极限.....	(207)
§ 7 三角函数及恒等变换.....	(234)
§ 8 反三角函数和简单三角方程.....	(261)
§ 9 解三角形.....	(298)

§ 10	直线与平面·····	(325)
§ 11	多面体和旋转体·····	(353)
§ 12	直线与圆·····	(394)
§ 13	圆雉曲线·····	(411)
§ 14	极坐标与参数方程·····	(462)
§ 15	综合应用·····	(485)
答案、提示或略解·····		(548)
后记·····		(508)

第一章 绪 论

§1 客观题的意义和作用

一、标准化考试简介

为了说明什么是客观题，我们从标准化考试谈起。

所谓标准化考试，就是按照系统的科学程序，组织具有统一的标准，并对误差作了严格控制的考试。具体来说，就是制定出比较客观的和规范的标准，从命题、施测到阅卷评分等各个环节，努力减少或避免各种误差，从而测定考生比较真实成绩的过程。因此，标准化考试也可以说是一种公平性考试。

标准化考试必须具备以下基本要素：

1. 要有**考试大纲或考试指导书** 考试大纲是教学大纲的具体化，其主要内容是确定考试的性质、测量的知识和能力，各部分内容的比重，考试的形式（开卷、闭卷或操作等），采用的题型，计分方法，考试时间等。考试大纲一般提前一年（或半年）公布，目的是使全体考生都明确考试的方向与要求，向同一目标努力。

2. **命题必须标准化** 命题时，要依照考试大纲制定的“命题双向细目表”。命题双向细目表是一种考查目标与考查内容的联列表，表中具体规定每项考查目标与内容的比

例（一般根据教学的时数或重要性来确定），是设计试题的依据。

3. 试题必须经过预测或调试，并计算出各题的难度和区分度，进而估计整个试的信度和效度

①**信度** 信度是反映试题稳定性可靠性的指标，表明测验中被测的水平是否稳定。一次考试，好学生得90分，中等学生得70分，差等学生得40分，且第二、第三次都基本如此，则这组题目可信。如第一次甲好，第二次乙好，第三次丙好，则这组题目不可信。信度的计算方法很多，一般采用半分法，即把一张试卷分成分数相等的两部分，分两次考，若结果相同则可信。通俗讲，同样的卷子多考几次，每次结果反映水平基本相同，则这卷子可信（除掉一些偶然的干扰）。

②**效度** 效度反映试题的准确性和有效性。可信不一定有效。如量东西，尺只能量长，不能称重。衡量学生时，不同的项目要用不同的尺度来量。确定效度的方法，一般用高考成绩和大学一年级学习成绩求相关。入学时某科成绩与大学一年级某科成绩相比，原来高分，后来仍是高分，说明正相关。若变差，负相关。另外在相关的程度上可分为高相关、低相关等。效度还包括内容效度，如数学有高中数学、初中数学，代数、几何、三角的比例如何。高考确定比例是否正确反映中学教学情况，也是效度问题。重点不应回避（角度可以变化），否则效度就不好。考查内容是否是中学生应具备的那些核心内容，也是衡量试题是否准确、有效的标准。命题时要考虑效度，有针对性地测量考查内容。

③**区分度** 所谓区分度是指试题对不同考生鉴别其能力的程度。它是试题质量的重要标准之一，即某科总分（ y ）

与该科每题得分(x)之间的相关系数(rd)。区分度最高为1,最低为0。通俗地说,就是程度好的学生得高分,程度差的学生得低分,使不同水平考生的成绩明显地拉开距离。当然,区分度与难度直接有关,中等难度的试题区分度较高,较高难度的题目对高分组的区分度好,较低难度的题目对低分组的区分度好。但过难的试题大家都不会做,太容易的试题都会做,这样就谈不上什么区分。

④**难度** 难度即试题的难易程度,是试题对学生知识水平的适合程度的指标。难度 H 可依下式计算: $H=P/W$,其中 W =考生总数, P =通过该题人数。 $0<H<1$ 。考题的难度必须适当,一般认为难度值在0.3~0.8之间为宜。

以上是考试命题质量的四种主要指标,当然还有其他指标。但有了这些指标就好评价试题的质量了。

4. 考试的实施过程必须统一而规范,考试的时间和进程必须统一,解题要求和评分标准也应严格规定

5. 必须提供为解释考试分数之用的常模 所谓常模就是所有应考对象实有的一般水平。如高三学生数学水平的常模,就是全国全体高三学生的数学知识和能力的一般水平或平均水平。由于全体施测后而确定平均水平是不可能的,一般采用抽样施测,求得平均值作为常模。有了常模就可以确定某考生成绩的相对位置,以便从不同水平上选拔人材。

标准化考试固然优越,但也不是十全十美的。因为标准化考试是相对的,难于做到标准化。并且标准化考试要求很高,组织工作非常严格,因此,它一般只适用于某些重大考试,如高考、地区性中考等。教师在教学班级所进行的考试,虽然难于做到标准化,但应注意尽可能多地选用客观性试题,以便帮助学生尽快地适应标准化考试的要求。

二、客观题的意义和作用

考试的基本要求是能够全面的、客观的、比较准确考查所学知识和应该具备的各种能力，这就要求试卷复盖面要大，题量要多，试题布局要合理，并便于准确地、客观地进行评分

我国传统的试题：问答题、求解题、证明题等，要达到上述要求，就有一定的困难，不能做到对每个考生都公平化，并且阅卷评分工作既费工又费时，又相当费钱。

为了克服传统考试的这种弊端，广大数学教育工作者创造出一些新颖的题型。如选择题等。选择题和传统的填空题、判断题有几个共同的特点：一是题目小；二是灵活性强；三是评分手续简单，使采用机器阅卷成为可能；四是阅卷客观，阅卷时不受阅卷者的身份、爱好、态度、情绪以及阅卷先后次序的影响。如果考试中大量地采用这几种类型的试题，就便于达到全面地、客观地、比较准确地考查学生所学知识和应掌握的各种能力的要求。因此，这几类类型的试题，正在被各地的标准化考试中大量地采用。这种能够客观评分，不受外界各种影响而使评分误差较小的题型，我们称为客观题。相应地，问答题、求解题、证明题等这些题型，称为非客观题，或称主观题。

在解答客观题时，学生在试卷上只写出几个简单的代号作为答案，不可能完整地留下其心里思维过程。因此，在标准化考试中，如果全部采用客观题，要考查学生的书面表达能力，特别是综合运用数学知识解决实际问题的探究能力，

就受到一定的局限。为了弥补这种不足，我国在实行标准化考试中，一般都配备了适当数量的主观题，而且对这种非客观题，都采取了切实有力的措施，以控制和尽量减少在评分过程中的误差。这种做法是符合我国实际的，也逐渐地被其他国家的考试机构所接受。

§ 2 客观题的类型及其结构

标准化考试的研究和实践，促进了数学试题的不断改革。目前新出现的客观性题型，基本上可划分为选择题、填空题、判断题三种类型。下面，我们分别讨论它们的结构及其变体。

一、选择题

了解选择题的结构特征，对于深刻理解选择题的实质及其解答它的规律，有着十分重要的意义。

选择题由以下三部分组成：

1. 指示语 即用于说明所给的若干个被选答案中，“有且只有一个是正确的”、“至少有一个是正确的”，“请把正确答案的代号填在括号内”之类的指令性语句。若同时出示两个或两个以上的选择题，指示语一般统一给出。

2. 题干 分问题式题干和填空式题干两种。问题式题干由一个问句构成；填空式题干由一个不完整的句子构成。题干实际上是选择题的已知条件，它与常规题的条件类似。

3. 选择支(题支) 位于题干后面的若干个备选答案即为选择支。不应“中选”的支称为迷惑支。选择支一般有若干个(三个、四个或五个), 其中包含应选的结论。从这一点说, 它有点象证明题但是, 它又没有给出明显的应选结论, 故此, 它又有些象计算题或化简题。

例1 下列各题中, 都给出了代号为(A)、(B)、(C)、(D)的答案供选择, 其中有且只有一个是正确的, 请把正确答案前的代号填入题后的括号内。

(1) $\lg x$ 的尾数与 $\lg 0.1111$ 的尾数相同, $\lg x$ 的首数与 $\lg 2222$ 的首数相同, 则 x 的值是()。

(A) 1111; (B) 3.1111; (C) 2222; (D) 0.2222.

(2) 已知 $a < b < 0$, 那么下列不等式中哪一个成立?

()

(A) $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$; (B) $ab < 1$; (C) $\frac{b}{a} < 1$;

(D) $\frac{b}{a} > 1$.

例1中, 开头的一段说明是两题共有的指示语。第(1)题的题干是一个不完整的句子, 属于填空式题干; 第(2)题的题干是一个问句, 属于问题式题干。两题均有四个选择支。

选择题的题干和每一个选择题都可构成一个命题, 有几个选择支便可以构成几个命题。因而一个选择题实质上就是若干个或真或假的命题组成的命题组。解选择题的过程就是在这组或真或假的命题组中, 确定真命题的过程。因此, 解选择题也就是要从鱼目混珠的状态下, 剔除鱼目, 选取珍珠。

选择题中所列出的供选用答案的个数又称为它的“支”数; 正确答案的个数又称为它的“元”数。例如, 某个选择题有四个选择支, 其中有且只有一个是正确的, 则称它为—

元四支选择题：如果四个选择支中，有两个或两以上正确，则称它为多元四支选择题。多元选择题的指示语，一般表示为“至少有一个是正确的”。为方便起见，本书中选择题系指一元选择题，把多元选择题列入其他客观题之中。

选择题就其考查内容的性质而言，大至可分为：

(1) **定性选择题** 要求从命题的条件，判定所给定的数学对象具有的性质或关系。

例2 已知函数 $y = \cos(\sin x)$ ，下列结论正确的是 ()。(这里以一元选择题为例，指示语略，以下同)。

- (A) 它的定义域是 $[-1, 1]$ ； (B) 它是奇函数；
(C) 它的值域是 $[\cos 1, 1]$ ； (D) 它不是周期函数。

答案：(C)。

(2) **定量选择题** 要求在一定的条件下，判定所给数字对象具有某一确定的数量。

例3 对满足 $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 6$ 的所有实数对 (x, y) ， y/x 的最大值是 ()。

- (A) $3 + 2\sqrt{2}$ ； (B) $2 + \sqrt{3}$ ；
(C) $3\sqrt{3}$ ； (D) 6； (E) $6 + 2\sqrt{3}$ 。

答案：(A)。

(3) **定序选择题** 要求在一定的条件下，判断所给数字对象的大小或顺序关系。

例4 $\triangle ABC$ 的三边长 $AB = 5$ ， $BC = 3$ ， $AC = 4$ ，设分别以此三边为轴，把 $\triangle ABC$ 旋转一周所得的旋转体的体积为 V_{AB} 、 V_{BC} 、 V_{AC} ，那么这三者的大小关系是

()。

- (A) $V_{AB} > V_{AC} > V_{BC}$ ； (B) $V_{AB} > V_{BC} > V_{AC}$ ；
(C) $V_{BC} > V_{AB} > V_{AC}$ ； (D) $V_{BC} > V_{AC} > V_{AB}$ 。

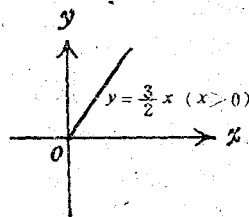
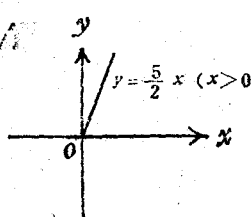
答案: (D).

(4) 定形选择题 要求在给定条件下, 判断所给数字对象的正确图形。

例5 若三数 $\lg x$ 、 $\lg 2y$ 、 $\lg 9x$ 成等差数列, 则动点 $M(x, y)$ 的图象是 ()。

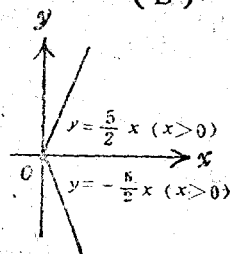
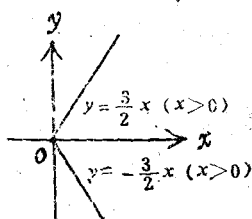
(A)

(B)



(C)

(D)



答案: (B). 图 1-2-1

(5) 以上几种题型的复合。

选择题还有下述几个变体:

(6) 匹配题 若将选择题的题干换成一组与所给的选择支相关的数字对象, 要求给每一个数字对象配上恰当的选择支, 以构成正确命题, 便是选择题的一种变体——匹配题。

例6 给定下面的甲、乙两组事件，试以甲组事件中的每个事件作为条件，从乙组事件中选取适当的事件作为必然结论与之匹配，并将这种匹配关系用箭头表示出来

甲

乙

① 若 $\theta = \arctg(\ctg 1)$,

①' 则 $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$,

② 若 $\theta = \arctg x + \arctg \frac{1}{x}$

②' 则 $\theta = 4\pi - \pi^2$,

③ 若 $\theta = \arccos(\cos \pi^2)$,

③' 则 $\theta = n\pi + (-1)^n$

$\arcsin \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{\pi}{4} (n \text{ 为整数})$

④ 已知 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{2}{3}$

④' 则 $\theta = \frac{\pi}{2} - 1$.

解 易于求得：①应与④'匹配；②应与①'匹配；③应与②'匹配；④应与③'匹配。

匹配题除了具有选择题取样广泛，复盖面广，内容灵活，便于考查学生的分析辨别能力等优点外，它还有一个突出的优点，就是当前提条件和结论的个数增加时，能抑制考生的侥幸心理，减少凭猜测得分的可能性，使测量结果更加准确和有效。

(7) **连缀题** 若选择题的题干是一个命题的若干项目，(推理步骤或计算过程)，只是在顺序的排列上具有随意性，要求按逻辑推理原则或合理的思维程序，将这些项目进行适当排列，使之成为该命题的严谨证明或正确解答，便演化出选择题的另一种变体——连缀题。

连缀题与一般选择题相仿，它由指示语，给定事件、待排项目三部分组成。主要考查学生的逻辑推理能力和信息加工、信息处理的能力。

例7 给定代号为①、②、③、④、⑤、⑥、⑦的项目，将它们进行重新排列，使之成为下述问题的解题过程：

若抛物线 $y^2 = 2px$ 上三点的纵坐标的平方成等差数列，那么这三点的焦半径的关系是什么关系？”

① 设三点为 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), P_3(x_3, y_3)$;

② $\because y_1^2 + y_3^2 = 2y_2^2, \therefore x_1 + x_3 = 2x_2$;

③ 由 $x_1 + 2x_3 = 2x_2$ ，即得 $|FP_1| + |FP_3| = 2|FP_2|$;

④ 则 $y^2 = 2Px_1, y_2^2 = 2Px_2, y_3^2 = 2Px_3$;

⑤ 由定义可知，如图所示

$$x_1 = OA = HP_1 - KO$$

$$= |FP_1| - \frac{P}{2};$$

⑥ 同理 $x_2 = |FP_2| - \frac{P}{2}$,

$$x_3 = |FP_3| - \frac{P}{2};$$

⑦ 这三点的焦半径成等差数列。

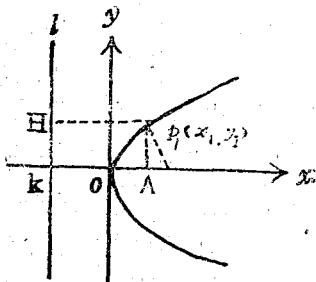


图 1-2-2

解 这个问题比较简单，只须将这七个项目，按①、

④、②、⑤、⑥、③、⑦的顺序排列即可。

二、填空题

填空题是大家非常熟悉的题型。它由指示语和题干两部分组成。它与选择题既有联系，又有区别。

例8 请把正确答案填在题中横线上方的空位内。

(1) 有6人在一排开会，3男3女，若男女间坐，则

共有_____种坐法。

$$2P_3^3 \cdot P_3^3 = 72$$

(2) 使得二项式 $(3x^2 - \frac{1}{2x})^n$ 的展开式中含有常数项时, 正整数 n 的最小值_____是。 $n=5$ 。

(3) 当关于 x 的方程 $(\frac{1}{5})^x = \frac{a+3}{5-a}$ 有负根时, a 的取值范围是_____。 $1 < a < 5$ 。

这里, 请把正确的……“空位内”是它们共有的指示语。

按填空题形式上的不同特点, 可分为单空题、连续多空题和逆向填空(由结论填条件)题; 按内容上的不同特点, 又可分为文字填空、图形填空、表格填空、逻辑划分填空和变换条件填空等。

(1) 文字填空题 这是常见的, 常常采用例 8 的形式。

(2) 图形填空题 又可分几何图形填空、函数图象填空、集合图形填空等。

例 9 在下面的图形中, 标明适当的记号, 用以表示极坐标方程 $P = a \sin \theta$ ($a > 0$) 的图象。

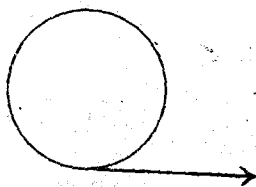


图 1-2-3

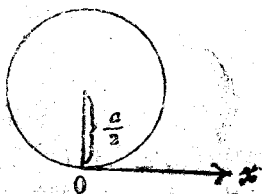


图 1-2-4

解 显然, 图 1-2-3 是不完整的。又极坐标方程 $P = a \sin \theta$ ($a > 0$) 可易于化为: $x^2 + (y - \frac{a}{2})^2 = a^2/4$ 。故

它的图象应是图1-2-4所示。

(3) **表格填空题** 用表格表达试题, 往往使叙述文字简捷, 条件清晰; 还能使阅卷方便, 给学生以解法上的启迪和引导。

例 10 解不等式 $(x+1)(x-1)(x-2) > 0$,

解 令 $f(x) = (x+1)(x-1)(x-2) > 0$,
用列表法:

	$(-\infty, -1)$	$(-1, +1)$	$(+1, +2)$	$(+2, +\infty)$
$x+1$				
$x-1$				
$x-2$				
$f(x)$				

$\therefore$ 原不等式的解集 $x = \{ \quad \quad \quad \}$

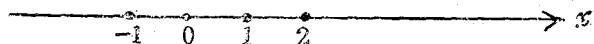


图 1-2-5

(4) **逻辑划分填空题** 在讨论某些问题时, 常要按某种特征对它们进行分类, 再分别对它进行研究, 从而获得正确的结论。进行逻辑划分填空的训练, 不仅能提高学生的解题能力, 而且有助于提高思维的条理性、清晰度, 准确性和灵活性。

例 11 把如下问题的解答过程填入逻辑划分表中:

解方程 $2^{x+2} - |2^{x+1} - 1| = 2^{x+1} + 1$;