

0130661

中等医药学校試用教科书

初等几何学

黃志宏 主編



人民卫生出版社

供药剂士专业用

初等几何学

黄志宏 主编

郑善卿 陈宗仁 编写

人民卫生出版社

一九六四年·北京

初等几何学

开本：787×1092/32 印张：4 $\frac{1}{2}$ 字数：91 千字

黄 志 宏 主 编

人 民 卫 生 出 版 社 出 版

(北京书刊出版业营业许可证出字第〇四六号)

·北京藏文区孩子胡同三十六号·

通 县 印 刷 厂 印 刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

统一书号：14048·2946

1964年7月第1版—第1次印刷

定 价：(科四)0.28元

印 数：1—11,500

前 言

根据葯剂士专业用数学教学大綱1963年修訂草案（总时数为186学时）編写了这套試用教科书，其中有代数学、初等几何学和三角学。学生学习了本书，应当掌握一般的数学理論知識和技能，一方面为了学习本专业其他課程打下数学基础，一方面也要求学生在初等数学的基本理論、基本知識和基本技能等方面接近高中文化水平。

在編写中也考虑到了中級卫生学校其他专业的需要，以及卫生各方面工作人員、尤其是葯工人員中缺乏初等数学知識的同志自学与工作中的需要。

书中附有星号“*”的章节，并非大綱規定的內容，在教学中可不講授，作为教学 and 实际工作中的参考以及为优秀学生自学之用。几何学中小字排印的內容，如感教学时数不足，可省略不講。

关于葯剂士专业常用算术中的百分法、比和比例等內容，作为代数学的附录排在最末一章之后，需講授时，可以根据具体情况安排在教学过程中的适当时期講解。

代数学书末附有对数表、反对数表及常用数表等；三角学书末附有三角函数表、三角函数对数表等，以备学习和应用。

由于編写時間仓促，并且限于編者的业务水平，缺点和錯誤一定很多，敬希各地老师和讀者多予指正。

編 者

1963. 7. 31.

目 录

平 面 几 何

第一章 比例綫段	1
§ 1.1 綫段的度量	1
§ 1.2 两綫段的比	3
§ 1.3 平行截割定理	6
习题一	10
第二章 相似形	14
§ 2.1 相似多边形	14
§ 2.2 相似三角形的判定法	15
§ 2.3 相似三角形的性质	19
习题二	22
第三章 圓內和三角形內某些綫段間的关系	26
§ 3.1 交弦定理	26
§ 3.2 切割定理	27
§ 3.3 勾股定理及其推广	28
习题三	32
第四章 正多边形与圓的周长及面积	35
§ 4.1 正多边形	35
§ 4.2 正多边形的边长	39
§ 4.3 多边形的面积	40
§ 4.4 相似形面积的比	41
§ 4.5 圓周长	43
§ 4.6 圓周率的近似值	47

§ 4.7 圓的面积	48
习题四	50

立 体 几 何

第五章 直綫与平面	55
§ 5.1 引言	55
§ 5.2 平面的基本性质	56
§ 5.3 空間二直綫的位置关系	58
§ 5.4 空間的直綫与平面的位置关系	60
§ 5.5 平面与平面的位置关系	70
习题五	83
第六章 多面体	87
§ 6.1 多面体的概念	87
§ 6.2 稜柱	89
§ 6.3 稜錐	91
§ 6.4 稜錐中平行于底面的截面的性质	92
§ 6.5 稜台	94
§ 6.6 稜柱、稜錐和稜台的側面积	95
§ 6.7 稜柱、稜錐和稜台的体积	98
习题六	106
第七章 旋轉体	110
§ 7.1 圓柱	110
§ 7.2 圓錐	111
§ 7.3 圓台	112
§ 7.4 圓柱、圓錐和圓台的側面积	113
§ 7.5 圓柱、圓錐和圓台的体积	115
§ 7.6 球	120
§ 7.7 球的体积与球面面积	123
习题七	126
附表	129

平面几何

第一章 比例綫段

§1.1 綫段的度量

直綫上任意两点間的一部分叫做**直綫的綫段**，簡称为**綫段**；这两点叫做**綫段的端点**。

綫段用写在端点的两个字母表示或用一小写字母表示。
例如，图1.1所示的綫段 AB 和图1.2所示的綫段 a 。

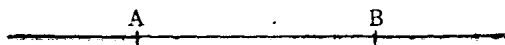


图 1.1

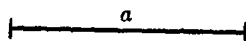


图 1.2

設有两条綫段 AB 及 CD ，把它們放在一起并让綫段 AB 的端点 A 与綫段 CD 的端点 C 重合。如果 B 落在 CD 之間，則 $AB < CD$ ；如果 B 落在 CD 之外，則 $AB > CD$ ；如果 B 与 D 也重合，則 $AB = CD$ （图1.3）。

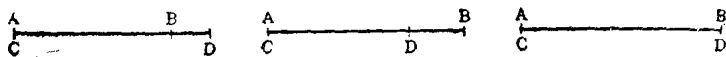


图 1.3

任何两条已知綫段，原則上都可以按上述方式比較它們的大小。但在实际問題中，綫段不一定能隨意移动，也就不一定能直接比較。因此，通常不直接進行比較，而是把一条可以隨意移动的綫段作为标准綫段（例如我們日常使用的尺）来度量所要比較的两条綫段，看它們各为标准綫段的多少倍，然后比較这个倍数，就可得出这两条綫段的大小。

在量度某一綫段 AB 时，可任取一綫段 CD 作为度量单位，用 CD 尽可能多地截取 AB 。如果 AB 恰为 CD 的整数倍，例如 3 倍，則 AB 的长等于 3 个单位。这样， AB 的长就表为一个整数 3（有理数）。如果 AB 不是 CD 的整数倍，例如被 CD 截取三次后而有一段剩余 EB ($EB < CD$)，那么我們可用 CD 的 $\frac{1}{10}$ 的一段 CF 去截取 EB （图 1.4）。假定 EB 恰为 CF 的整数

倍，例如 6 倍，則 AB 的长就表为一个小数 3.6 或分数 $\frac{18}{5}$ （有理数）。当 EB 被 CF 截取 6 次后仍有一段剩余小于 CF

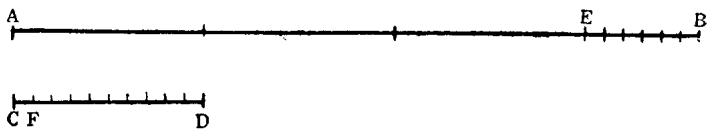


图 1.4

时，我們再用 CF 的 $\frac{1}{10}$ 的一段（即 CD 的 $\frac{1}{100}$ 的一段）去截取那段剩余。截取后仍有剩余，我們可照样繼續作下去。当 AB 上某一次的剩余恰为 CD 上相应次数的 10 等分后的一小段的整数倍时， AB 的长就可表为一个有尽小数或分数（有理数）；当 AB 上的剩余始終得不到 CD 上相应次数的 10 等分后

的一小段的整倍数时， AB 的长就表为一个无尽小数。如果这个无尽小数是循环小数，即分数，显然表示 AB 的长的这个数仍是一个有理数；如果这个无尽小数是不循环的，那么表示 AB 的长的这个数就是无理数了。综上所述，某一綫段的长可用一个实数，即有理数（整数、分数）或无理数（无尽非循环小数）来表示。

由上述的綫段度量的方法立即得出下面綫段长的基本性质：

1. 相等的綫段有相同的长。
2. 对应于較大的綫段有較大的长。
3. 許多綫段的和的长等于这些綫段的长的和。

显然，如果利用不同度量单位去度量同一綫段时，則这綫段的长将表成不同的数。在度量时，如果增大（或减少）度量单位若干倍，則綫段的长就减少（或增大）同样倍数。例如，当度量单位为 1 厘米时，綫段的长为 3.8；如果度量单位改为 1 毫米时，則这綫段的长就表为 $38 = 3.8 \times 10$ 。

在以后的討論中，如不作特別声明，綫段长都是在同一度量单位下度量的。

§1.2 两綫段的比

两綫段的比是指用同一度量单位来量这两綫段的长所得数值的比。

虽然綫段的长与度量单位有关，但从一种度量单位轉換到另一种度量单位时，两条綫段的长可乘上相同的一个数目，所以它們的比是不变的，也就是，綫段的比与度量单位无关。

我們知道，两个比的相等叫作成比例。現将此比例的概

念应用于綫段：如果两綫段 AB 和 CD 的比等于另外两綫段 A_1B_1 和 C_1D_1 的比，也就是

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A_1B_1}{C_1D_1},$$

我們就說綫段 AB , CD , A_1B_1 , C_1D_1 成比例。

因为我們把表示两綫段长的数值的比，叫做这两綫段的比，所以今后就将 AB 、 CD 等等綫段理解为表示它們的长的数值。从而綫段比和由綫段比所組成的比例具有数值比和由数值組成的比例的全部性质。

現将算术中已証明过的比及比例的性质列举如下。

比的性质：

1. 比的两項同乘（或除）一数，它的比值不变。
2. 如有一系列的比是相等的，則所有前項的和与所有后項的和之比等于每一个前項与其后項的比。

例如，已知：

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{EF}{E_1F_1} = \dots\dots = \frac{MN}{M_1N_1},$$

那么，

$$\frac{AB + CD + EF + \dots + MN}{A_1B_1 + C_1D_1 + E_1F_1 + \dots + M_1N_1} =$$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \dots\dots = \frac{MN}{M_1N_1}.$$

比例的性质：

1. 在比例中，两外項的积等于两內項的积。
2. 比例中的两外項可以互换，两內項也可以互换 以及內外項可以互相变更位置。

3. 第一个比中两项的和或差与两项之一的比，等于第二个比中两项的和或差与对应一项的比。

例如，已知：

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1},$$

那么，

$$\frac{AB \pm A_1B_1}{AB} = \frac{CD + C_1D_1}{CD},$$

$$\frac{AB \pm A_1B_1}{A_1B_1} = \frac{CD \pm C_1D_1}{C_1D_1}.$$

4. 第一个比中两项的和与两项的差的比，等于第二个比中两项的和与两项的差的比。

例如，已知： $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1},$

那么，

$$\frac{AB + A_1B_1}{AB - A_1B_1} = \frac{CD + C_1D_1}{CD - C_1D_1}.$$

已知比例的三个项，去求剩下的一项叫做**解比例**。例如，在比例 $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1}$ 中，如果 C_1D_1 是未知的，则 $C_1D_1 =$

$\frac{A_1B_1 \cdot CD}{AB}$ 。这时线段 C_1D_1 叫做线段 A_1B_1 、 CD 和 AB 的**第四比例项**。

如果所给的比例是 $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{A_1B_1}{CD}$ ，那么 $A_1B_1^2 = AB \cdot CD$ 。

这时线段 A_1B_1 叫做线段 AB 和 CD 的**比例中项**。

§1.3 平行截割定理

定理 1: 两条平行线在一角的两边上截出的线段成比例。

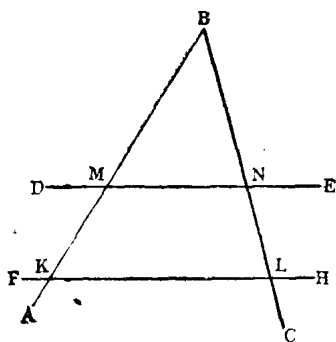


图 1.5

設: 两直线 DE 和 FH 互相平行, 且和角 ABC 的两边 AB 和 BC 交于 M 、 K 、 N 与 L 各点 (图 1.5)。

求証:

$$\frac{BM}{BK} = \frac{BN}{BL}, \quad \frac{MK}{BM} = \frac{NL}{BN}.$$

証明: 这个定理我們只就 BK 与 BM 的比为有理数时来証明, 当 BK 与 BM 的比为无理数时, 定理也成立, 但証明較繁, 从略。

BK 与 BM 的比为有理数, 設它为 $\frac{n}{m}$, 也就是 $\frac{BK}{BM} = \frac{n}{m}$. 这时, 我們选择 $\frac{1}{n}BK$ 为度量单位, 那么 BK 、 BM 在此度量单位下的长, 分别为 n 与 m . 也就是, BK 、 BM 分别为 $\frac{1}{n}BK$ 的 n 倍与 m 倍。把 BK 平分为 n 个等分, 那么 M 正好是其中一个分点, 而且 BM 含有此 n 等分中的 m 个。过这些等分的分点作 FH 的平行线, 根据初中平面几何里的定理: 如果在角的一边上截取互等的线段, 并且通过它们的端点作平行直线与角的另一边相交, 則在这一边上也截出互等的线段。这些平行线把 BL 也分成 n 个等分, 而且 BN 正好含

有其中的 m 个，于是 BL 与 BN 之比也等于 $\frac{n}{m}$ ，从而

$$\frac{BK}{BM} = \frac{n}{m} = \frac{BL}{BN}.$$

再将比例的性质 3 应用于上式中，即有：

$$\frac{BK - BM}{BM} = \frac{BL - BN}{BN},$$

也就是，

$$\frac{MK}{BM} = \frac{NL}{BN}.$$

推論 1： 平行于三角形一边的直線在其他两边上截出的綫段成比例，并且截出的綫段和这两边成比例（图1.6）。

定理 2（定理 1 的逆定理）：如果两条直線在一个角的两边上截出的綫段成比例，則这两条直線平行。

設：角 ABC 的两边和 MN 、 KL 二直線相交（图1.7），使得：

$$\frac{BM}{BK} = \frac{BN}{BL}$$

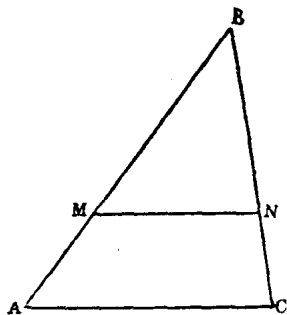


图 1.6

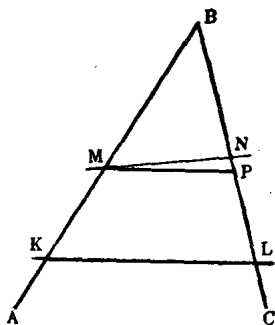


图 1.7

求証: $MN \parallel KL$.

証明: 过 M 点作 KL 的平行綫, 設它与 BC 相交于 P , 現在我們証明, P 点必与 N 点重合。

由于 $MP \parallel LK$, 根据定理 1, 有 $\frac{BM}{BK} = \frac{BP}{BL}$, 把此等式与假設 $\frac{BM}{BK} = \frac{BN}{BL}$ 比較。一个比例的三个項等于另一个比例的对应的三个項, 因而, 这两个比例的第四項也要相等, 就是 $BP = BN$, 也就是 P 和 N 重合, 即 $MN \parallel KL$ 。

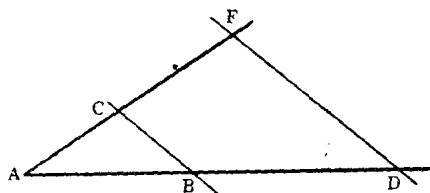


图 1.8

例: 二平行直綫 BC 、 DF 和 A 角的一边交于 B 及 D 两点和另一边交于 C 及 F 两点。

如果 $AB + BD = 60$ 厘米、 $AC = 18$ 厘米、 $CF = 22$ 厘米(图1.8),

求 $BD = ?$

解: 根据定理 1 可作出比例

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CF},$$

应用比例的性质 3,

$$\frac{AB + BD}{BD} = \frac{AC + CF}{CF}.$$

把 $AB + BD = 60$ 厘米, $AC = 18$ 厘米, $CF = 22$ 厘米, 代入, 得:

$$\frac{60}{BD} = \frac{18 + 22}{22} = \frac{40}{22},$$

解之得：

$$BD = \frac{60 \cdot 22}{40} = 33 \text{ 厘米}.$$

定理 3: 如果在三角形中引平行于底边的直线，则底边和位于三角形内的割线线段的比等于侧边和在其上靠近顶点的线段的比。

設：在 $\triangle ABC$ 中直线 $MN \parallel AC$,

求証： $\frac{AC}{MN} = \frac{AB}{MB} = \frac{BC}{BN}$ (图1.9)

証明: 过 M 点引 $MP \parallel BC$, 由

定理 1 的推論有： $\frac{AC}{PC} = \frac{AB}{MB}$,

而 PC 与 MN 是平行四边形的对应边，因而 $PC = MN$ ，所以，

$$\frac{AC}{MN} = \frac{AB}{MB}.$$

又， $\frac{AB}{MB} = \frac{BC}{BN}$ ，

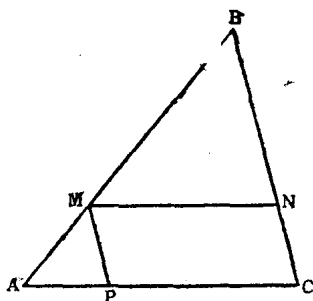


图 1.9

所以， $\frac{AC}{MN} = \frac{AB}{BM} = \frac{BC}{BN}$.

定理 4: 如果相交于 O 点的两条直线被两条平行的直线所截，则在直线上所截取的线段和平行直线上的线段成比例。

当两条平行线位于点 O 的同侧时，此定理可由定理 1 或定理 2 直接推得。現在証明两条平行线位于点 O 两侧的情形。

設：过点 O 的直线 AD 和 BC 是和平行线 AB 和 CD 相交，而且点 O 在这两平行直线之間 (图1.10)。

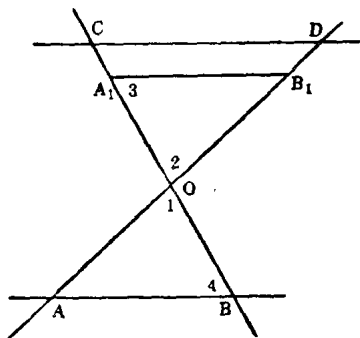


图 1.10

求证:

$$\frac{AO}{OD} = \frac{BO}{OC} = \frac{AB}{CD}.$$

证明: 在 OC 上取线段 $OA_1 = OB$, 过 A_1 点引 $A_1B_1 // CD // AB$. 在 $\triangle AOB$ 及 $\triangle A_1OB_1$ 中, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, $OA_1 = OB$, 所以 $\triangle AOB \cong \triangle A_1OB_1$, 从而 $AO = OB_1$, $A_1B_1 = AB$, $OA_1 = OB$.

再在 $\triangle COD$ 中, $A_1B_1 // CD$, 由定理 3 有:

$$\frac{OB_1}{OD} = \frac{OA_1}{OC} = \frac{A_1B_1}{CD},$$

用 OA 、 OB 、 AB 分别来代换 OB_1 、 OA_1 、 A_1B_1 , 则得:

$$\frac{OA}{OD} = \frac{OB}{OC} = \frac{AB}{CD}.$$

习 题 一

1. M 点把线段 AB 分成 $AM:MB=3:2$, 求 AM 和 AB 之比。
2. 把线段 AB 分成 $AC:CB=2:3$, $AC=48$ 厘米, 求 AB 和 CB 之长。

3. $\triangle ABC$ (图 1.11) 的一边 BA 被 D 分成 $BD:DA=5:7$, 过 D 点

引平行于 AC 的直线 DE 交 BC 于 E ，如果 $AC=18$ 厘米，求线段 DE 之长。

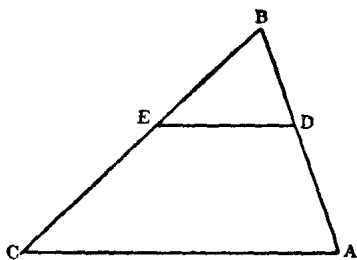


图 1.11

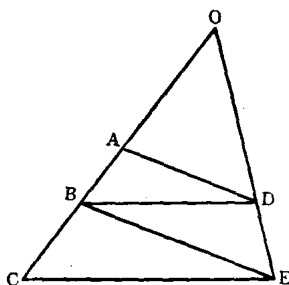


图 1.12

4. 二平行线交 A 角的一边于 B 和 C 两点，交另一边于 D 和 M 两点，如果 $AC+AB=14$ 厘米，且 $AM:AD=4:3$ ，求 AB 之长。

5. 延长梯形 $ABCD$ 的两腰， AB 和 DC 相交于 F 点，如果 $FB:AB=8:5$ 且 $FC-CD=2.25$ 厘米，求 CD 之长。

6. 在长为6厘米的线段 AB 上有一点 C ，已知 AC 的长为3.6厘米，在 AB 延长线上求一点 D ，使 $AD:BD=AC:CB$ 。

7. 若 $x=\sqrt{ab}$ ，写出一个比例式，若 $x=\sqrt{3a^2}$ 呢？

8. 假设在 $\triangle OCE$ 中（图1.12） $BD \parallel CE$ ， $AD \parallel BE$ ，求证 $OA:OB=OB:OC$ 。

9. 已知在 $\triangle ABC$ （图1.13）中， $DE \parallel BC$ ，又 $AD:DB=EC:AE$ ，求证 $AE=EC$ 。

10. 在四边形 $ABCD$ 的对角线 BD 上取一点 G ，作 $GE \parallel DA$ 交 AB 于 E ，作 $GF \parallel DC$ 交 BC 于 F ，并且连接 EF ，求证 $EF \parallel AC$ （图1.14）。

11. 梯形两底的比为7:12，它的一个腰为0.3米，问延长这个腰多么长才能和另一个腰的延长线相交？

12. A 和 B 两点间有个湖（图1.15），为了测量 A 点到 B 点的距离，选择一个 C 点，量出 CA 的长，并在 CA 上截取定长的线段 CA_1 ，再作