

遵照教育部修正課程標準編輯

新課程標準世界中學教本

高級中學學生用

高中新三角

編著者 裘友石

世界書局印行

中華民國二十五年十月九日版

新課程標準世界中學教本

高中新三角（全一冊）

實價國幣

（外埠酌加運費匯費）



編著者 裘友石

發行者 李煜瀾

印刷者 世界書局

發行所 上海及各省 世界書局

高中新三角法

編輯大意

1. 本書係遵照教育部修正之高中課程標準編纂而成，專供高級中學及同等程度學校之用。

2. 本書遵照標準規定，自一般三角函數開始，自成一體系，故先後次序井然，易於教學。

3. 對數理論，雖屬代數範圍，然其應用方面，在習代數時，多略而不詳，故本書仍遵照標準規定，詳細敘述。

4. 本書舉例特多，俾讀者演算練習時，可資模範。

5. 本書於解三角形之演算排列，特別注重簡潔明瞭，庶幾演算練習時，可收事半功倍之效。

6. 本書於三角形解法之應用一章，敘述較詳，並將測量上實測之三角網編入，藉以引起讀者之興趣。

7. 本書於公式之推演，力求簡明，以免繁複，蓋因教學時必有補充之機會也。

8. 本書卷末，附有對數表及三角表，以便學習。

9. 本書所採用之名辭，多依據科學社所審定者，但為讀者參閱原書起見，於卷末仍附中西名辭對照表，以資應用。

10. 本書卷末，附三角與幾何及三角與代數二節，俾學者得知三角在數學上應用之大概。

11. 本書遇外國人名時，即寫原文，不加翻譯，以存其真。

12. 本書習題支配，力求適合教學時間，但高中一年級文理尚未分組，故為謀性近理科學生充分學習起見，於卷末附有補充習題，以便教師酌量取用，且該項習題，大多係各省市會考題及大學入學試題，俾易引起學生演習興趣。

13. 本書編述，雖本十餘年教學經驗，且經長時間考慮，但不免有疏漏之處，在所難免，希海內明達，多多賜教，不勝感激。

希臘字母

(書法) (讀音)

A	α	Alpha
B	β	Beta
Γ	γ	Gamma
Δ	δ	Delta
E	ϵ	Epsilon
Z	ζ	Zeta
H	η	Eta
Θ	θ	Theta
I	ι	Iota
K	κ	Kappa
Λ	λ	Lambda
M	μ	Mu

(書法) (讀音)

N	ν	Nu
Ξ	ξ	Xi
O	$\omicron$	Omicron
Π	π	Pi
P	ρ	Rho
Σ	σ	Sigma
T	τ	Tau
Υ	υ	Upsilon
Φ	ϕ	Phi
X	χ	Chi
Ψ	ψ	Psi
Ω	ω	Omega

目 次

第一章 角之定義及度量法

1. 三角法之目的	1
2. 角之一般定義	1
3. 角之度量法	1
4. 角弧半徑間之關係	3
第一章習題	4

第二章 三角函數

5. 直角坐標	5
習題	6
6. 三角函數之定義	6
7. 三角函數之正負	7
8. 三角函數之線段表示	8
9. 特別角之三角函數	9
習題	12
10. 三角函數間之基本關係	13
習題	15
11. 化 $-\theta$ 角之三角函數爲 θ 角之三角函數	16
12. 化 $(90^\circ - \theta)$ 角之三角函數爲 θ 角之三角函數	18
13. 化 $(90^\circ + \theta)$ 角之三角函數爲 θ 角之三角函數	19
14. 化 $(180^\circ - \theta)$ 角之三角函數爲 θ 角之三角函數	19
習題	21
15. 化 $(180^\circ + \theta)$ 角之三角函數爲 θ 角之三角函數	21
16. 化 $(270^\circ - \theta)$ 角之三角函數爲 θ 角之三角函數	22
17. 化 $(270^\circ + \theta)$ 角之三角函數爲 θ 角之三角函數	23
18. 化 $(360^\circ - \theta)$ 角之三角函數爲 θ 角之三角函數	24

19.	化 $(360^\circ + \theta)$ 角之三角函數爲 θ 角之三角函數	25
	習題	26
20.	三角函數值之變化	27
21.	三角函數之圖表	29
	第二章習題	30
	第三章 複角之三角函數	
22.	和角之正弦及餘弦	32
23.	較角之正弦及餘弦	33
	習題	35
24.	和角及較角之正切及餘切	35
	習題	37
25.	化函數之和或較爲函數之積	37
	習題	41
26.	倍角之三角函數	42
	習題	45
27.	分角之三角函數	45
	習題	48
28.	三角恆等式	49
	第三章習題	53
	第四章 反三角函數及三角方程式	
29.	反函數之意義	56
30.	反三角函數	56
	習題	60
31.	主值及通值	61
	習題	65
32.	三角方程式	65
	習題	69
33.	聯立三角方程式	70
	習題	72

34. 消去法	73
第四章習題	75
第五章 三角形之邊與角之關係	
35. 正弦定律餘弦定律正切定律	77
習題	81
36. 以三角形之邊表半角之三角函數	82
習題	87
37. 三角形之面積	87
習題	89
38. 三角形之外接圓半徑內切圓半徑及傍切圓半 徑	89
第五章習題	91
第六章 對數及附表之用法	
39. 對數之定義	94
40. 對數之定律	94
習題	95
41. 常用對數	96
42. 底數之轉換	98
43. 對數表用法	99
習題	101
44. 對數計算及其實例	101
習題	104
45. 三角真數表用法	104
46. 三角對數表用法	105
47. <i>S.T.</i> 表用法	107
第六章習題	109
第七章 三角形解法及其應用	
48. 直角三角形之解法	110
習題	113

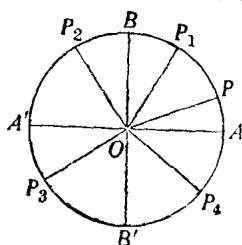
49. 一般三角形之解法	113
習題	121
50. 三角形解法之其他實例	121
習題	123
51. 測量上之應用	124
習題	128
52. 三角測量之應用	128
習題	133
53. 平面航海術	134
習題	137
第七章習題	138
第八章 造表法及表之精確度	
54. 對數表之作成法	140
55. 三角表之作成法	142
56. 表之精確度	147

附錄一 三角與幾何	1
附錄二 三角與代數	10
附錄三 補充習題	18
附錄四 術語中英對照表	23
附錄五 三角法常用公式	26
附表一 常用對數表	2
附表二 三角真數表	23
附表三 三角對數表	26
附表四 <i>S. T.</i> 表	71
附表五 重要常數表	73

第一章 角之定義及度量法

§1. 三角法之目的 三角法最主要之目的，為求解一三角形。三角形有三邊及三角，若於此六元素中，已知其三（至少有一邊），即可求得其餘，此法謂之解三角形。欲達此目的，必須引用三角函數，而此函數在高等數學中，另有更重要之應用也。

§2. 角之一般定義 設 AOA' 及 BOB' 為兩正交於 O 點之定直線，又設動線 OP ，繞定點 O ，自定線 OA 出發，向上（與時針相反方向）旋轉，則不論 OP 在何位置，皆與 OA 成一正角。 OA 名曰角之始邊， OP 名曰角之終邊。



如終邊在 OP_1 位置，成 AOP_1 角，小於一直角。
如終邊在 OP_2 位置，成 AOP_2 角，大於一直角。
如終邊在 OP_3 位置，成 AOP_3 角，大於二直角。
如終邊在 OP_4 位置，成 AOP_4 角，大於三直角。
如終邊旋轉一周，又與 OA 相合，則成一周角，即等於四直角。若繼續旋轉，而再至 OP_1 位置，則成四直角 + AOP_1 之角，如此類推。

若設動線 OP ，繞定點 O ，自 OA 出發，向下（與時針同方向）旋轉，則其所成之角皆為負角。

如終邊 OP 在 OA 與 OB 之間，則謂此角在第一象限。

如終邊 OP 在 OB 與 OA' 之間，則謂此角在第二象限。

如終邊 OP 在 OA' 與 OB' 之間，則謂此角在第三象限。

如終邊 OP 在 OB' 與 OA 之間，則謂此角在第四象限。

§3. 角之度量法 度量角之大小，常用之法，有下列二種：

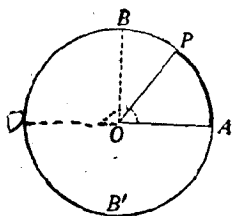
(一) 六十分制 將一直角分為九十等分,每一等分謂之一度;一度又六十等分,每一等分謂之一分;一分再六十等分,每一等分謂之一秒,而一度,一分,一秒,恆以符號 $1^\circ 1' 1''$ 表之,此法實用上多用之。

例如 三度十六分二十八秒記以 $3^\circ 16' 28''$ 。

(二) 弧度法 此法理論上多用之,係根據下列二幾何定理而來:

(a) 圓周 $= 2\pi r$.

(b) 同圓或等圓內,圓心角之比,等於其所對圓弧之比。



如圖在 O 圓周上,截取 AP 弧之長等於此圓半徑,聯結 OA, OP , 則成一 AOP 角,另作半徑 $OB \perp OA$, 則 AOB 為一直角, AB 弧等於 $\frac{\pi r}{2}$, 故由幾何定理,得

$$\frac{\angle AOP}{\angle AOB} = \frac{\widehat{AP}}{\widehat{AB}} = \frac{r}{\frac{\pi r}{2}} = \frac{2}{\pi},$$

$$\therefore \angle AOP = \frac{2}{\pi} \angle AOB = \frac{2}{\pi} \text{ 直角}.$$

因直角及 π 皆為常數,故知 AOP 角亦為常數,即定此角為角之單位,名曰一弧度。

$$\therefore \text{一弧度} = \frac{2}{\pi} \text{ 直角} = \frac{2}{\pi} \times 90^\circ = \frac{180^\circ}{\pi},$$

$$\text{約} = 57^\circ 17' 44.8''.$$

$$\text{又} \quad 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ 弧度}.$$

$$30^\circ = \frac{\pi}{6} \text{ 弧度},$$

$$45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ 弧度},$$

$$60^\circ = \frac{\pi}{3} \text{ 弧度},$$

$$90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ 弧度},$$

$$180^\circ = \pi \text{ 弧度},$$

$$270^\circ = \frac{3\pi}{2} \text{ 弧度},$$

$$360^\circ = 2\pi \text{ 弧度}.$$

1 弧度或 π 弧度,有時以符號 1° 或 π° 記之,有時則略去不寫.

例如 (1) $.45\pi^\circ = .45 \times 180^\circ = 81^\circ,$

(2) $3^\circ = 3 \times \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{540^\circ}{\pi},$

(3) $40^\circ 15' 36'' = 40.26^\circ = 40.26 \times \frac{\pi^\circ}{180} = .2236\pi^\circ.$

§4. 角弧半徑間之關係 設用弧度單位度量 θ 角, θ 角所對弧之長為 l , 半徑為 r , 則由弧度法之定義, 得角, 弧, 半徑間之關係如下:

$$\theta = \frac{l}{r}$$

或 $l = \theta r.$

故角, 弧, 半徑三者間, 若已知其二, 即可計算其餘.

【例】設地球與太陽之平均距離為 150000000 公里, 測得太陽之直徑角為 $32'$, 試計算太陽之直徑.

【解】因太陽之直徑角甚小, 故太陽直徑可視做圓弧以求之,

故 $\theta = 32' = \frac{32}{60} \times \frac{\pi}{180} \text{ 弧度},$

$r = 150000000,$

$\therefore l = 150000000 \times \frac{32}{60} \times \frac{\pi}{180}$

$= 1396066 \text{ 公里}.$

第一章習題

1. $+135^\circ, -225^\circ, +\frac{7\pi}{6}$ 及 $-\frac{5\pi}{6}$ 等角, 其動線所在之位置一致否?

2. 下列各角, 各合幾度:

(a) $\frac{4\pi}{5}$,

(b) $\frac{7\pi}{6}$,

(c) 10π ,

(d) $\frac{3}{8}\pi$.

X. 3. 下列各角, 各合幾弧度:

(a) $110^\circ 30'$, (b) $175^\circ 45'$, (c) $47^\circ 25' 36''$, (d) $-150^\circ 30' 30''$

4. 三角形三內角之比為 $3:4:5$, 問各內角等於幾弧度?

X. 5. 正三角形, 正五邊形, 正六角形之各內角, 等於幾弧度?

6. 下列各角之動線, 各在第幾象限?

(a) -495° , (b) $\frac{5}{2}\pi$, (c) $-\frac{4\pi}{5}$, (d) $763^\circ 50'$.

7. 長 560 公尺之圓弧, 其所對之圓心角為 80° , 求此圓之半徑.

X. 8. 南京在北緯 $32^\circ 3'$, 求南京至赤道之于午線之長. (地球半徑 = 6370 公里)

9. 假定常人之目所能見之字, 其字之對角為 $5'$, 今見字於 10 公尺處, 其字之大至少幾何?

X. 10. 就赤道上計算地球自轉之速度, 每分鐘幾何?

11. 設 n 為整數, 決定下列各角所在之象限:

(a) $2n\pi + \frac{\pi}{3}$,

(b) $n\pi - \frac{\pi}{6}$,

(c) $2n\pi - \frac{5\pi}{6}$,

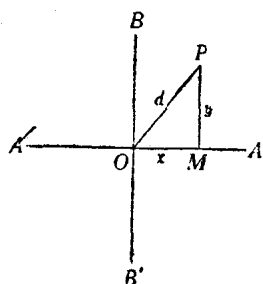
(d) $n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4}$.

X. 12. 扇形之面積, 等於半徑乘弧長之積之半, 今半徑為 50 公分, 圓心角為 70° , 計算此扇形之面積.



第二章 三角函數

§5. 直角坐標 平面上兩正交直線 AOA' 及 BOB' , 若以



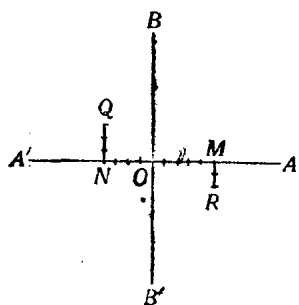
正負號區別其方向, 則平面上之點, 恆可以二數定其位置. 直線 AA' 名曰橫軸. 定 OA 向爲正, OA' 向爲負. 直線 BB' 名曰縱軸. 定 OB 向爲正, OB' 向爲負. 交點 O 名曰原點. 橫軸及縱軸, 合名曰坐標軸.

平面上有任一點 P , 過 P 作 AA' 的垂線 PM , 則 OM 名曰 P 點的橫坐標, 常以 x 表之, PM 名曰 P 點的縱坐標, 常以 y 表之. 故 P 點的位置, 即可以 (x, y) 定之, 名曰 P 點的坐標. 聯結 OP , 則 OP 名曰 P 點至原點的距離, 如以 d 表之, 則得

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

故在平面上, 已知點之位置, 即可量得其坐標. 反之, 若已知點之坐標, 即可確定其位置.

例如 平面上有任一點 Q , 作 $QN \perp AA'$, 度量 ON 得 -4 , QN 得 3 , 則知 Q 點的坐標爲 $(-4, 3)$.



又若已知 R 點的坐標爲 $(5, -2)$, 確定 R 點的位置, 在 OA 的正向度量五個單位得 M 點, 過 M 在 OB' 的負向, 作 OA 的垂線 RM , 截 RM 的長等於二個單位, 則 R 點的坐標, 即爲 $(5, -2)$.

如 x, y 表正數, 則

第一象限各點之坐標為 $(+x, +y)$.

第二象限各點之坐標為 $(-x, +y)$.

第三象限各點之坐標為 $(-x, -y)$.

第四象限各點之坐標為 $(x, -y)$.

橫軸上各點之坐標為 $(\pm x, 0)$.

縱軸上各點之坐標為 $(0, \pm y)$.

學者如在方格紙上確定坐標, 更為方便.

【習題】

1. 確定下列各點的位置:

(a) $(-2, -3)$, (b) $(-3, 0)$, (c) $(\frac{3}{2}, -4)$, (d) $(\frac{5}{2}, \frac{10}{3})$.

2. 求下列各點至原點之距離:

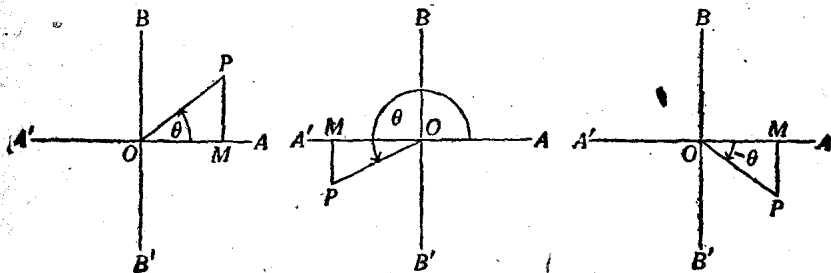
(a) $(3, -4)$, (b) $(-12, 5)$, (c) $(-m, -n)$ (d) $(\sqrt{a^2+b^2}, ab\sqrt{2})$.

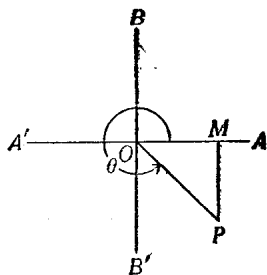
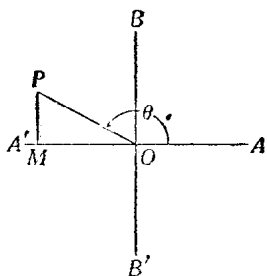
3. 已知 P 點離原點的距離為 13, 縱坐標為 5, 求其橫坐標, 並確定其位置.

4. 已知 Q 點離原點的距離為 $a-b$, 橫坐標為 $2ab$, 求其縱坐標.

§6. 三角函數之定義

設動線 OP 繞原點 O , 自 OA 出發, 旋轉成 θ 角, 則不論 θ 角在第幾象限, 在終邊 OP 上, 任取一點 P , 過 P 點作 $PM \perp AA'$, 則 OM 為 P 點的橫坐標, PM 為縱坐標, OP 為 P 點至原點之距離, 則線段 OM, PM 及 OP 間, 取其





兩兩之比,共有下列六個:

$$\frac{PM}{OP}, \frac{OM}{OP}, \frac{PM}{OM}, \frac{OP}{PM}, \frac{OP}{OM}, \frac{OM}{PM}.$$

此六比若 θ 角不變,不論 P 點所取的位置如何,其值不變,反之,若 θ 角之位置變更,則此六比之值,亦隨之而變,故依據代數學中函數之定義,此六比乃 θ 角之函數,通稱曰三角函數,茲將其各別之名稱及符號列下:

$\frac{PM}{OP}$ 即 $\frac{\text{縱坐標}}{\text{距離}}$ 稱曰 θ 角之正弦,以符號 $\sin \theta$ 表之.

$\frac{OM}{OP}$ 即 $\frac{\text{橫坐標}}{\text{距離}}$ 稱曰 θ 角之餘弦,以符號 $\cos \theta$ 表之.

$\frac{PM}{OM}$ 即 $\frac{\text{縱坐標}}{\text{橫坐標}}$ 稱曰 θ 角之正切,以符號 $\tan \theta$ 表之.

$\frac{OP}{PM}$ 即 $\frac{\text{距離}}{\text{縱坐標}}$ 稱曰 θ 角之餘割,以符號 $\csc \theta$ 表之.

$\frac{OP}{OM}$ 即 $\frac{\text{距離}}{\text{橫坐標}}$ 稱曰 θ 角之正割,以符號 $\sec \theta$ 表之.

$\frac{OM}{PM}$ 即 $\frac{\text{橫坐標}}{\text{縱坐標}}$ 稱曰 θ 角之餘切,以符號 $\cot \theta$ 表之.

以上六種函數之外,尚有下列二函數:

$$\text{ver sin } \theta = 1 - \cos \theta,$$

$$\text{cover sin } \theta = 1 - \sin \theta.$$

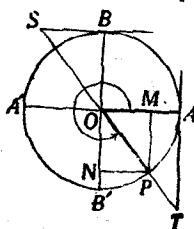
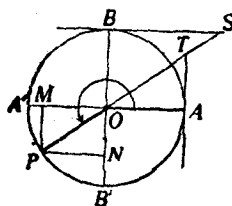
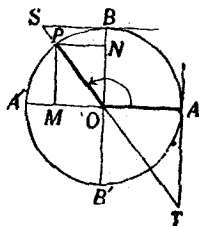
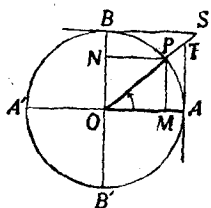
§7. 三角函數之正負 因所在之象限不同, P 點的坐標既有正負之別,並規定動線 OP 在旋轉之方向為正,若在相

13
69
23
64
64
12
124

反之延長線上則為負。今以正負坐標代入上節之定義，可得三角函數之正負如下表：

	B	
$\sin +$		$\sin +$
$\cos -$		$\cos +$
$\tan -$		$\tan +$
$\cot -$		$\cot +$
$\csc +$		$\csc +$
$\sec -$		$\sec +$
A'		A
$\sin -$		$\sin -$
$\cos -$		$\cos +$
$\tan +$		$\tan -$
$\cot +$		$\cot -$
$\csc -$		$\csc -$
$\sec -$		$\sec +$
	B'	

§8. 三角函數之線段表示 應用幾何學“相似三角形相當邊成比例”的定理，可將三角函數之值，在單位圓（半徑等於一單位）內，以線段表示之。



如上圖， θ 角不論旋轉至何象限，終邊 OP 與單位圓周相交於 P 點，則 $OP=1$ ， AT ， BS 爲過 A ， B 二點的切線，各與 OP 或其延長線相交於 T 及 S 二點，則

$$\triangle OPM \sim \triangle OAT \sim \triangle OBS,$$

$$\sin \theta = \frac{PM}{OP} = PM,$$

$$\cos \theta = \frac{OM}{OP} = OM,$$

$$\tan \theta = \frac{PM}{OM} = \frac{AT}{OA} = AT,$$

$$\cot \theta = \frac{OM}{PM} = \frac{BS}{OB} = BS,$$

$$\csc \theta = \frac{OP}{PM} = \frac{OS}{OB} = OS,$$

$$\sec \theta = \frac{OP}{OM} = \frac{OT}{OA} = OT,$$

$$\text{versin } \theta = 1 - \cos \theta = OA - OM = MA,$$

$$\text{coversin } \theta = 1 - \sin \theta = OB - ON = NB.$$

故三角函數之值，可以八條線段表示之，吾國古算學稱三角爲八線即此意也。

在三角函數之線段表示中，讀者可觀察其正負，與上節結果比較之。

§9. 特別角之三角函數 用幾何作圖法，常能繪 45° ， 30° ， 60° ， 90° 等角，名曰特別角，茲將特別角之三角函數值之算法，略述如下：

(1) 45° 或 $\frac{\pi}{4}$ 角之三角函數值。

在終邊 OP 上任取一點 $P(x, y)$ ，

則 $x = y$ ，

$$\therefore OP = r = x\sqrt{2} = y\sqrt{2},$$

