遵照教育部修正課程標準編輯

新課程標準世界中學教本

高級中學學生用

高中新三角

編著者　裘友石

世界書局印行

中華民國二十五年十月印刷
中華民國三十六年六月九版

新課程標準世界中學教本

高中新三角（全一冊）

實價國幣
（外埠酌加運費匯費）

編著者 裘友石

發行者 世界書局有限公司代表人 李煜瀛
出版印刷者 上海大連灣路 世界書局

發行所 上海及各省 世界書局

高中新三角法

編輯大意

1. 本書係遵照教育部修正之高中課程標準編纂而成,專供高級中學及同等程度學校之用。

2. 本書遵照標準規定,自一般三角函數開始,自成一體系,故先後次序井然,易於教學。

3. 對數理論,雖屬代數範圍,然其應用方面,在習代數時,多略而不詳,故本書仍遵照標準規定,詳細敍述。

4. 本書舉例特多,俾讀者演算練習時,可資模範。

5. 本書於解三角形之演算排列,特別注重簡潔明瞭,庶幾演算練習時,可收事半功倍之效。

6. 本書於三角形解法之應用一章,敍述較詳,並將測量上實測之三角網編入,藉以引起讀者之興趣。

7. 本書於公式之推演,力求簡明,以免繁複,蓋因教學時必有補充之機會也。

8. 本書卷末,附有對數表及三角表,以便學習。

9. 本書所採用之名辭,多依據科學社所審定者,但爲讀者參閱原書起見,於卷末仍附中西名辭對照表,以資應用。

10. 本書卷末,附三角與幾何及三角與代數二節,俾學者得知三角在數學上應用之大概。

11. 本書遇外國人名時,卽寫原文,不加翻譯,以存其眞。

12. 本書習題支配,力求適合教學時間,但高中一年級文理尙未分組,故爲課性近理科學生充分學習起見,於卷末附有補充習題,以便教師酌量取用,且該項習題,大多係各省市會考題及大學入學試題,俾易引起學生演習興趣。

13. 本書編述,雖本十餘年教學經驗,且經長時間考慮,但不妥之處,仍在所難免,希海內明達,多多賜教,不勝感激。

希臘字母

(書法)		(讀音)	(書法)		(讀音)
Α	α	Alpha	Ν	ν	Nu
Β	β	Beta	Ξ	ξ	Xi
Γ	γ	Gamma	Ο	ο	Omicron
Δ	δ	Delta	Π	π	Pi
Ε	ε	Epsilon	Ρ	ρ	Rho
Ζ	ζ	Zeta	Σ	σ	Sigma
Η	η	Eta	Τ	τ	Tau
Θ	θ	Theta	Υ	υ	Upsilon
Ι	ι	Iota	Φ	φ	Phi
Κ	κ	Kappa	Χ	χ	Chi
Λ	λ	Lambda	Ψ	ψ	Psi
Μ	μ	Mu	Ω	ω	Omega

目　次

第一章　角之定義及度量法

第二章　三角函數

第三章　複角之三角函數

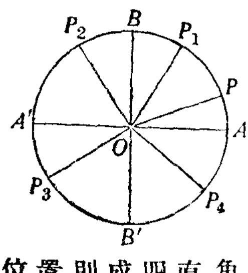
第四章　反三角函數及三角方程式

第八章　造表法及表之精確度

第一章　角之定義及度量法

§1. 三角法之目的　三角法最主要之目的,為求解一三角形.三角形有三邊及三角,若於此六元素中,已知其三(至少有一邊),即可求得其餘,此法謂之**解三角形**.欲達此目的,必須引用三角函數,而此函數在高等數學中,另有更重要之應用也.

§2. 角之一般定義　設 AOA' 及 BOB' 為兩正交於 O 點之定直線,又設**動線** OP,繞定點 O,自定線 OA 出發,向上(與時針相反方向)旋轉,則不論 OP 在何位置,皆與 OA 成一**正角**. OA 名曰角之**始邊**, OP 名曰角之**終邊**.



如終邊在 OP_1 位置,成 AOP_1 角,小於一直角.如終邊在 OP_2 位置,成 AOP_2 角,大於一直角.如終邊在 OP_3 位置,成 AOP_3 角,大於二直角.如終邊在 OP_4 位置,成 AOP_4 角,大於三直角.如終邊旋轉一周,又與 OA 相合,則成一周角,即等於四直角.若繼續旋轉,而再至 OP_1 位置,則成四直角 $+AOP_1$ 之角,如此類推.

若設動線 OP,繞定點 O,自 OA 出發,向下(與時針同方向)旋轉,則其所成之角皆為**負角**.

如終邊 OP 在 OA 與 OB 之間,則謂此角在**第一象限**.
如終邊 OP 在 OB 與 OA' 之間,則謂此角在**第二象限**.
如終邊 OP 在 OA' 與 OB' 之間,則謂此角在**第三象限**.
如終邊 OP 在 OB' 與 OA 之間,則謂此角在**第四象限**.

§3. 角之度量法　度量角之大小,常用之法,有下列二種:

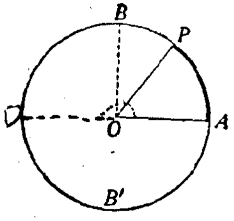
(一)**六十分制** 將一直角分爲九十等分,每一等分謂之一度;一度又六十等分,每一等分謂之一分;一分再六十等分,每一等分謂之一秒.而一度,一分,一秒,恆以符號 $1^\circ\,1'\,1''$ 表之,此法實用上多用之.

例如 三度十六分二十八秒記以$3^\circ\,16'\,28''$.

(二)**弧度法** 此法理論上多用之,係根據下列二幾何定理而來:

(a)圓周$=2\pi r$.

(b)同圓或等圓內,圓心角之比,等於其所對圓弧之比.



如圖在O圓周上,截取AP弧之長等於此圓半徑,聯結OA, OP,則成一AOP角,另作半徑$OB\perp OA$,則AOB爲一直角,AB弧等於$\frac{\pi r}{2}$,故由幾何定理,得

$$\frac{\angle AOP}{\angle AOB}=\frac{\widehat{AP}}{\widehat{AB}}=\frac{r}{\frac{\pi r}{2}}=\frac{2}{\pi},$$

$$\therefore \quad \angle AOP=\frac{2}{\pi}\angle AOB=\frac{2}{\pi}\text{直角}.$$

因直角及π皆爲常數,故知AOP角亦爲常數,卽定此角爲角之單位,名曰<u>一弧度</u>.

$$\therefore \quad \text{一弧度}=\frac{2}{\pi}\text{直角}=\frac{2}{\pi}\times 90^\circ=\frac{180^\circ}{\pi},$$

$$\text{約}=57^\circ 17' 44.8''.$$

又 $$1^\circ=\frac{\pi}{180}\text{弧度}.$$

$$30^\circ=\frac{\pi}{6}\text{弧度};$$

$$45^\circ=\frac{\pi}{4}\text{弧度},$$

$$60^\circ=\frac{\pi}{3}\text{弧度},$$

$$90^\circ=\frac{\pi}{2}\text{弧度},$$

$$180^\circ=\pi\ \text{弧度},$$

$$270^\circ=\frac{3\pi}{2}\text{弧度},$$

$$360^\circ=2\pi\ \text{弧度}.$$

1 弧度或 π 弧度,有時以符號 1^c 或 π^c 記之,有時則略去不寫.

例如　(1)　$.45\pi^c=.45\times180^\circ=81^\circ$,

(2)　$3^c=3\times\frac{180^\circ}{\pi}=\frac{540^\circ}{\pi}$,

(3) $40^\circ15'36''=40.26^\circ=40.26\times\frac{\pi^c}{180}=.2236\pi^c$.

§4. 角弧半徑間之關係　設用弧度單位度量 θ 角,θ 角所對弧之長爲 l,半徑爲 r,則由弧度法之定義,得角,弧,半徑間之關係如下:

$$\theta=\frac{l}{r}$$

或　$l=\theta r$.

故角,弧,半徑三者間,若已知其二,即可計算其餘.

【例】設地球與太陽之平均距離爲 150000000 公里,測得太陽之直徑角爲 $32'$,試計算太陽之直徑.

【解】因太陽之直徑角甚小,故太陽直徑可視做圓弧以求之,

故　$\theta=32'=\frac{32}{60}\times\frac{\pi}{180}$ 弧度,

$r=150000000$,

$\therefore\quad l=150000000\times\frac{32}{60}\times\frac{\pi}{180}$

$=1396066$ 公里.

第一章習題

1. $+135°, -225°, +\frac{7\pi}{6}$ 及 $-\frac{5\pi}{6}$ 等角,其動線所在之位置一致否?

2. 下列各角,各合幾度:

   (a) $\frac{4\pi}{5}$, (b) $\frac{7\pi}{6}$, (c) 10π, (d) $\frac{3}{8}\pi$.

X 3. 下列各角,各合幾弧度:

   (a) $110°30'$, (b) $175°45'$, (c) $47°25'36''$, (d) $-150°30'30''$

4. 三角形三內角之比爲 $3:4:5$,問各內角等於幾弧度?

X 5. 正三角形,正五角形,正六角形之各內角,等於幾弧度?

6. 下列各角之動線,各在第幾象限?

   (a) $-495°$, (b) $\frac{5}{2}\pi$, (c) $-\frac{4\pi}{5}$, (d) $763°50'$.

7. 長560公尺之圓弧,其所對之圓心角爲$80°$,求此圓之半徑.

X 8. 南京在北緯$32°3'$,求南京至赤道之子午線之長.(地球半徑=6370公里)

9. 假定常人之目所能見之字,其字之對角爲$5'$,今見字於10公尺處,其字之大至少幾何?

X 10. 就赤道上計算地球自轉之速度,每分鐘幾何?

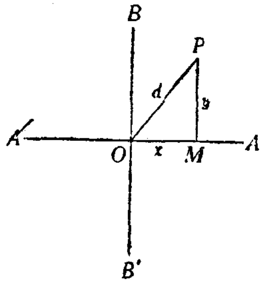
11. 設 n 爲整數,決定下列各角所在之象限:

   (a) $2n\pi+\frac{\pi}{3}$, (b) $n\pi-\frac{\pi}{6}$, (c) $2n\pi-\frac{5\pi}{6}$, (d) $n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{4}$.

X 12. 扇形之面積,等於半徑乘弧長之積之半,今半徑爲50公分,圓心角爲$70°$,計算此扇形之面積.

第二章　三角函數

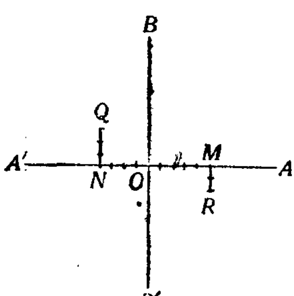
§5. **直角坐標**　平面上兩正交直線 AOA' 及 BOB'，若以正負號區別其方向，則平面上之點，恆可以二數定其位置。直線 AA' 名曰橫軸。定 OA 向爲正，OA' 向爲負。直線 BB' 名曰縱軸。定 OB 向爲正，OB' 向爲負，交點 O 名曰原點。橫軸及縱軸，合名曰坐標軸。



平面上有任一點 P，過 P 作 AA' 的垂線 PM，則 OM 名曰 P 點的橫坐標，常以 x 表之，PM 名曰 P 點的縱坐標，常以 y 表之。故 P 點的位置，即可以 (x, y) 定之，名曰 P 點的坐標。聯結 OP，則 OP 名曰 P 點至原點的距離，如以 d 表之，則得

$$d=\sqrt{x^2+y^2}.$$

故在平面上，已知點之位置，即可量得其坐標。反之，若已知點之坐標，即可確定其位置。



例如　平面上有任一點 Q，作 $QN\perp AA'$，度量 ON 得 -4，QN 得 3，則知 Q 點的坐標爲 $(-4,3)$。

又若已知 R 點的坐標爲 $(5,-2)$，確定 R 點的位置，在 OA 的正向度量五個單位得 M 點，過 M 在 OB' 的負向，作 OA 的垂線 RM，截 RM 的長等於二個單位，則 R 點的坐標，即爲 $(5,-2)$。

如x, y表正數,則

第一象限各點之坐標爲$(+x, +y)$.

第二象限各點之坐標爲$(-x, +y)$.

第三象限各點之坐標爲$(-x, -y)$.

第四象限各點之坐標爲$(x, -y)$.

橫軸上各點之坐標爲$(\pm x, 0)$.

縱軸上各點之坐標爲$(0, \pm y)$.

學者如在方格紙上確定坐標,更爲方便.

【習　　題】

1. 確定下列各點的位置:

(a) $(-2, -3)$, (b) $(-3, 0)$, (c) $\left(\frac{3}{2}, -4\right)$, (d) $\left(\frac{5}{2}, \frac{10}{3}\right)$.

2. 求下列各點至原點之距離:

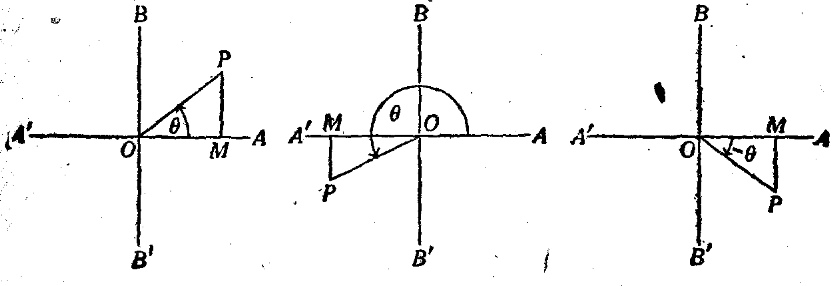
(a) $(3, -4)$, (b) $(-12, 5)$, (c) $(-m, -n)$ (d) $(\sqrt{a^2+b^2}, ab\sqrt{2})$.

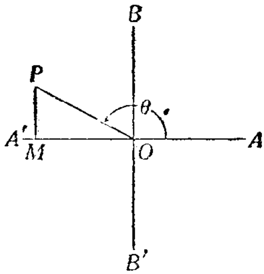
3. 已知P點離原點的距離爲13,縱坐標爲5,求其橫坐標,並確定其位置.

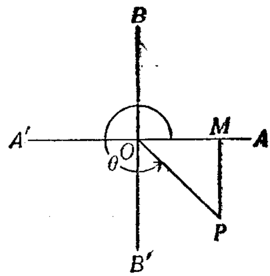
3·4·5·
6·12·13·

4. 已知Q點離原點的距離爲$a-b$,橫坐標爲$2ab$,求其縱坐標.

§6. 三角函數之定義　設動線OP繞原點O,自OA出發,旋轉成θ角,則不論θ角在第幾象限,在終邊OP上,任取一點P,過P點作$PM \perp AA'$,則OM爲P點的橫坐標,PM爲縱坐標,OP爲P點至原點之距離,則線段OM, PM及OP間,取其







兩兩之比,共有下列六個:

$$\frac{PM}{OP},\ \frac{OM}{OP},\ \frac{PM}{OM},\ \frac{OP}{PM},\ \frac{OP}{OM},\ \frac{OM}{PM}.$$

此六比若 θ 角不變,不論 P 點所取的位置如何,其值不變.反之,若 θ 角之位置變更,則此六比之值,亦隨之而變.故依據代數學中函數之定義,此六比乃 θ 角之函數.通稱曰**三角函數**,玆將其各別之名稱及符號列下:

$\dfrac{PM}{OP}$ 卽 $\dfrac{\text{縱坐標}}{\text{距離}}$……稱曰 θ 角之**正弦**以符號 $\sin\theta$ 表之.

$\dfrac{OM}{OP}$ 卽 $\dfrac{\text{橫坐標}}{\text{距離}}$……稱曰 θ 角之**餘弦**,以符號 $\cos\theta$ 表之.

$\dfrac{PM}{OM}$ 卽 $\dfrac{\text{縱坐標}}{\text{橫坐標}}$……稱曰 θ 角之**正切**,以符號 $\tan\theta$ 表之.

$\dfrac{OP}{PM}$ 卽 $\dfrac{\text{距離}}{\text{縱坐標}}$……稱曰 θ 角之**餘割**,以符號 $\csc\theta$ 表之.

$\dfrac{OP}{OM}$ 卽 $\dfrac{\text{距離}}{\text{橫坐標}}$……稱曰 θ 角之**正割**,以符號 $\sec\theta$ 表之.

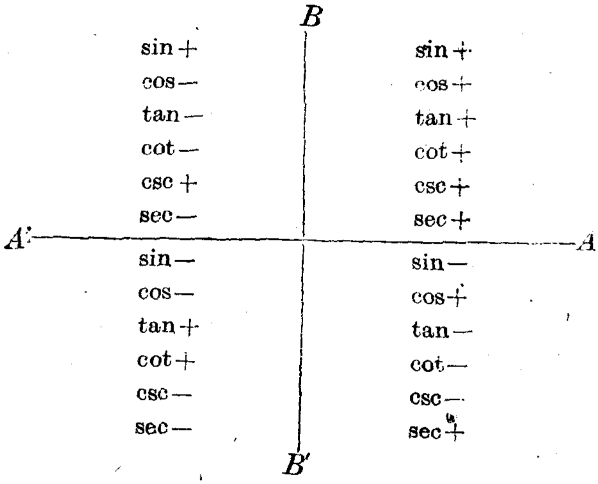
$\dfrac{OM}{PM}$ 卽 $\dfrac{\text{橫坐標}}{\text{縱坐標}}$……稱曰 θ 角之**餘切**,以符號 $\cot\theta$ 表之.

以上六種函數之外,尙有下列二函數:

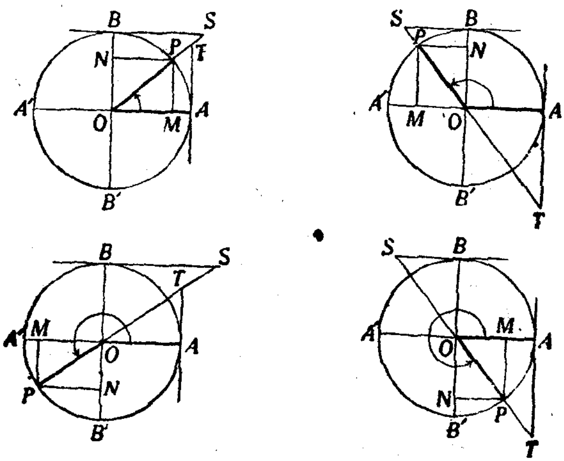
$$\text{ver}\sin\theta=1-\cos\theta,\qquad \text{cover}\sin\theta=1-\sin\theta.$$

§7. 三角函數之正負　因所在之象限不同,P 點的坐標既有正負之別,並規定動線 OP 在旋轉之方向爲正,若在相

反之延長線上則為負.今以正負坐標代入上節之定義,可得三角函數之正負如下表:



§8. 三角函數之線段表示　應用幾何學"相似三角形相當邊成比例"的定理,可將三角函數之值,在單位圓(半徑等於一單位)內,以線段表示之.



如上圖，θ 角不論旋轉至何象限，終邊 OP 與單位圓周相交於 P 點，則 $OP=1$，AT，BS 爲過 A，B 二點的切線，各與 OP 或其延長線相交於 T 及 S 二點，則

$$\triangle OPM \backsim \triangle OAT \backsim \triangle OBS,$$

$$\therefore\quad \sin\theta=\frac{PM}{OP}=PM,$$

$$\cos\theta=\frac{OM}{OP}=OM,$$

$$\tan\theta=\frac{PM}{OM}=\frac{AT}{OA}=AT,$$

$$\cot\theta=\frac{OM}{PM}=\frac{BS}{OB}=BS,$$

$$\csc\theta=\frac{OP}{PM}=\frac{OS}{OB}=OS,$$

$$\sec\theta=\frac{OP}{OM}=\frac{OT}{OA}=OT,$$

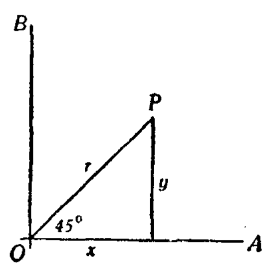
$$\operatorname{ver}\sin\theta=1-\cos\theta=OA-OM=MA,$$

$$\operatorname{cover}\sin\theta=1-\sin\theta=OB-ON=NB.$$

故三角函數之值，可以八條線段表示之，吾國古算學稱三角爲八線卽此意也。

在三角函數之線段表示中，讀者可觀察其正負，與上節結果比較之。

§9. 特別角之三角函數　用幾何作圖法，常能繪 $45°$，$30°$，$60°$，$90°$ 等角，名曰特別角。玆將特別角之三角函數值之算法，略述如下：



(1) $45°$ 或 $\frac{\pi}{4}$ 角之三角函數值。

在終邊 OP 上任取一點 $P(x, y)$，

則　$$x=y,$$

$$\therefore\quad OP=r=x\sqrt{2}=y\sqrt{2},$$