高等代数新方法

王品超　编　著

山东教育出版社
1989年·济南

前言

高等代数是近代数学的一门重要的基础课。随着科学的发展，高代的内容与方法都在不断地充实和更新。为了适应新的形势，满足广大读者的需要，我们编写了此书。

书中引入和创新了大量新颖而有效的方法。为了阐明新方法，书中选择硕士生入学的典型试题、新近复旦大学编著的高代的选做题(全部)，以及近几年来国内外高等代数研究的一些新成果为其对象。本书力图让读者学到一些新的方法与技巧，从而开阔思路，提高能力，并让读者从中找到值得深入研究的课题。此书综合性强，有一定的深度和广度，可作为高代复习材料及教学参考书。

参加本书编写工作的还有杨惠君、任尧民、周建钦、郑高峰、郑恒武、臧明淑、李先成等同志。苏州大学周士藩副教授仔细阅读了书稿，并提出不少宝贵意见，在此表示衷心感谢。

对于书中的缺点和不足，恳望读者批评指正。

编　者

1989年8月

目　录

第一章　多项式

问　题　探　讨

第二章　行列式

问　题　探　讨

第三章　矩阵

问　题　探　讨

第四章　线性方程组

问　题　探　讨

第五章　二次型和实对称矩阵

问　题　探　讨

第六章　线性空间和线性变换

问　题　探　讨

第七章　欧氏空间

问　题　探　讨

第八章　方阵的正交相似和酉相似

问　题　探　讨

第一章　多项式

§1　一元多项式

一、加法

数域P上的一元多项式之全体构成的集合记为$P[x]$。

定义　$\forall f(x)$，$g(x)\in P[x]$，在其中适当添上一些系数为零的项，总可设

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i,$$

$$g(x)=\sum_{i=0}^{n} b_i x^i.$$

令 $h(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}(a_i+b_i)x^i$，显然 $h(x)\in P[x]$，称$h(x)$为$f(x)$与$g(x)$的和，记为

$$f(x)+g(x)=\sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)x^i.$$

令 $-g(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}(-b_i)x^i$，显然$-g(x)\in P[x]$，称$-g(x)$为$g(x)$的负元，记 $f(x)-g(x)=f(x)+(-g(x))$。

不难验证，多项式的加法有如下性质：

(i) $f(x)+g(x)=g(x)+f(x)$；

(ii) $(f(x)+g(x))+h(x)=f(x)+(g(x)+h(x))$；

(iii) $f(x)+(-f(x))=0$.

由（ii）可定义

$$f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_{n-1}(x)+f_n(x)$$
$$=(f_1(x)+\cdots+f_{n-1}(x))+f_n(x),$$

这里 $n\geqslant 3$.

二、乘法

定义 $\forall\ f(x)$，$g(x)\in P[x]$，设

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i,\quad g(x)=\sum_{j=0}^{m}b_jx^j,$$

令 $h(x)=\sum_{r=0}^{n+m}(a_rb_0+a_{r-1}b_1+\cdots+a_0b_r)x^r$ （$a_k=0$ （$k>n$），$b_l=0$ （$l>m$）），显然 $h(x)\in P[x]$，称 $h(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的积，记为

$$f(x)\cdot g(x)=\sum_{r=0}^{n+m}\Big(\sum_{i+j=r}a_ib_j\Big)x^r.$$

不难验证对于多项式的乘法具有下列性质：

(i) $f(x)g(x)=g(x)f(x)$;

(ii) $(f(x)g(x))h(x)=f(x)(g(x)h(x))$;

(iii) $(f(x)+g(x))h(x)=f(x)h(x)+g(x)h(x)$;

(iV) 若 $f(x)$，$g(x)\in P[x]$，且全不为零，则

$$f(x)g(x)\neq 0,$$

从而若 $f(x)h(x)=g(x)h(x)$，且 $h(x)\neq 0$，则

$$f(x)=g(x).$$

三、次数

定义 $\forall\ f(x)\in P[x]$，$f(x)\neq 0$，称 $f(x)$ 中不为"0"

的项的最高次数为该多项式的次数记为$\partial^0(f(x))$，零多项式没有次数。

下面各式中出现的多项式均为非零多项式，如下性质成立：

（i）$\partial^0(f(x)\pm g(x))\leqslant\max(\partial^0(f(x)),\partial^0(g(x)))$；

（ii）$\partial^0(f(x)\cdot g(x))=\partial^0(f(x))+\partial^0(g(x))$。

§2　多项式的整除性

一、整除及其性质

定义　设$f(x)$，$g(x)\in P[x]$，若$\exists\ q(x)\in P[x]$，使得

$$f(x)=q(x)g(x),$$

称$g(x)$能整除$f(x)$，记为$g(x)\mid f(x)$，否则称$g(x)$不能整除$f(x)$，记为$g(x)\nmid f(x)$。

有下列性质：

（i）任一多项式可整除零多项式；

（ii）c、$cf(x)$均能整除$f(x)$，这里c为非零常数；

（iii）若$f(x)\mid g(x)$，$g(x)\mid h(x)$，则$f(x)\mid h(x)$；

（iV）若$f(x)\mid g_i(x)$（$i=1, 2, \cdots, s$），则

$$\forall u_i(x)\in P(x)\ (i=1, 2, \cdots, s),$$

有
$$f(x)\left|\sum_{i=1}^{s}u_i(x)g(x)\right.;$$

（V）$f(x)\mid g(x)$，且$g(x)\mid f(x)\Longleftrightarrow f(x)=cg(x)$，$c\neq 0$，$c\in P$。

二、带余除法

定理2.1　设$f(x)\in P(x)$，则对$g(x)\in P(x)$，$g(x)\neq 0$，

$\exists q(x)$、$r(x)\in P(x)$，使得

$$f(x)=q(x)g(x)+r(x),$$

其中 $r(x)=0$ 或者 $\partial^0(r(x))<\partial^0(g(x))$，且这样的 $q(x)$，$r(x)$ 由 $f(x)$，$g(x)$ 唯一确定，分别称它们为商式与余式.

推论 设 $f(x)$，$g(x)\in P[x]$，$g(x)\neq 0$，则 $g(x)|f(x)\Longleftrightarrow r(x)=0$.

§3 多项式的最大公因式

一、最大公因式

定义 设 $f(x)$，$g(x)\in P[x]$，若有

（i）$d(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式；

（ii）$f(x)$ 与 $g(x)$ 的任一个公因式都能整除 $d(x)$，称 $d(x)$ 为 $f(x)$，$g(x)$ 的最大公因式.

定理3.1 $\forall$ $f(x)$，$g(x)\in P[x]$，必存在 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式 $d(x)\in P[x]$，且有 $u(x)$，$v(x)\in P[x]$，使得

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=d(x).$$

由最大公因式的定义可以知道，若 $d_1(x)$，$d_2(x)$ 同时为 $f(x)$、$g(x)$ 的最大公因式时，则 $d_1(x)|d_2(x)$，$d_2(x)|d_1(x)$，故有 $d_1(x)=cd_2(x)$，$c\neq 0$. 这表明，两个多项式的最大公因式之间最多相差一个非零常数因子，$f(x)$、$g(x)$ 不全为零时，其最大公因式非零，我们把其中首项系数为 1（简称首 1）的最大公因式记为 (f,g).

对于 $P[x]$ 中 $m(m\geqslant 2)$ 个多项式 $f_1(x)$，$f_2(x)$，…，$f_m(x)$ 的最大公因式，我们完全可以象两个多项式的最大公

因式那样去定义，并且可以得到同样的存在"唯一"性定理及表达定理。具体去求m个多项式的最大公因式，固然可以用转辗相除法，但是计算烦杂，我们将在第三章§2中介绍利用矩阵及矩阵初等变换求最大公因式的简便方法。

二、互素及其有关性质

定义 设$f(x)$、$g(x)\in P[x]$若

$$(f, g)=1,$$

称 $f(x)$与$g(x)$互素。

定理3.2 $f(x)$、$g(x)\in P[x]$，则$(f,g)=1 \Longleftrightarrow \exists u(x)$，$v(x)\in P(x)$，使

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1.$$

推论1 若$f(x)=f_1(x)(f,g)$，$g(x)=g_1(x)(f,g)$，则

$$(f_1, g_1)=1.$$

推论2 若$(g_1, f)=1$，$(g_2, f)=1$，则

$$(g_1g_2, f)=1.$$

推论3 若$f(x)|g_1(x)g_2(x)$，且$(f, g_1)=1$，则

$$f(x)|g_2(x).$$

推论4 若$f_1(x)|g(x)$，$f_2(x)|g(x)$，且$(f_1,f_2)=1$，则

$$f_1(x)f_2(x)|g(x).$$

§4 多项式的分解

一、不可约多项式及其性质

定义 设$p(x)\in P[x]$且$\partial^0(p(x))\geqslant 1$，如果$p(x)$不能

分解为$P[x]$中两个次数比$p(x)$低的多项式之积，称$p(x)$在P上不可约，否则称$p(x)$在P上可约。

命题1 设$p(x)\in P[x]$，$\partial^0(p(x))\geqslant 1$，则$p(x)$不可约$\Longleftrightarrow p(x)$只有形如$c$与$c\,p(x)$的因式，这里$c\neq 0$，$c\in P$。

命题2 若$p(x)$为P上的不可约多项式，则$\forall\ f(x)\in P[x]$，或者$p|f$，或者$(p,\ f)=1$。

命题3 若$p(x)$为P上的不可约多项式，则对

$$f(x),\ g(x)\in P[x].$$

只要$p|fg$，就必有$p|f$或$p|g$。

命题3′ 若$p(x)$为P上不可约多项式，

$$p(x)|f_1(x)\cdots f_s(x),\ s\geqslant 2,$$

则$\exists i$使$p(x)|f_i(x)$（$1\leqslant i\leqslant s$）。

二、分解定理

定理4.1 设$f(x)\in P[x]$，且$\partial^0(f(x))\geqslant 1$，则

(i) $f(x)$必可分解为P上的有限个不可约多项式的乘积；

(ii) 如果

$$\begin{aligned}f(x)&=p_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x)\\&=q_1(x)q_2(x)\cdots q_t(x),\end{aligned}$$

其中$p_i(x)$，$q_j(x)$（$i=1,\ 2,\ \cdots,\ s$，$j=1,\ 2,\ \cdots,\ t$）为P上的不可约多项式，则$s=t$且适当调整因式的次序后有

$$p_i(x)=c_iq_i(x),\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ s,$$

其中c_i（$i=1,\ 2,\ \cdots,\ s$）为P的非零常数。

设$f(x)\in P(x)$，$\partial^0(f(x))\geqslant 1$，若

$$f(x)=cp_1^{r_1}(x)\cdots p_s^{r_s}(x),\tag{1}$$

这里$c\neq 0$，$p_i(x)$为首一的不可约多项式，$i\neq j$时 $p_i(x)\neq p_j(x)(i, j=1, 2, \cdots, s)$，称（1）为$f(x)$的标准分解式。

三、重因式

定义 $p(x)$为P上的不可约多项式满足$p^k(x)|f(x)$，而$p^{k+1}(x)\nmid f(x)$，称$p(x)$为$f(x)$的k重因式（这里k为非负整数）。

当$k=0$时，$p(x)$不为$f(x)$的因式；当$k=1$时，称$p(x)$为$f(x)$的单因式；当$k>1$时，称$p(x)$为$f(x)$的重因式。

定理4.2 若不可约多项式$p(x)$是$f(x)$的k重因式（$k\geqslant 1$）则$p(x)$是$f'(x)$的（$k-1$）重因式。

推论1 不可约多项式$p(x)$是$f(x)$的重因式$\Longleftrightarrow p(x)$为$f(x)$与$f'(x)$的公因式。

推论2 $f(x)$无重因式$\Longleftrightarrow(f(x), f'(x))=1$。

§5 有理系数多项式

定义 设$f(x)$为整系数多项式，如果$f(x)$的各项系数的最大公因数是1，称$f(x)$为本原多项式。

引理1 两个本原多项式的乘积仍是本原多项式。

引理2 设非零的整系数多项式$f(x)$在有理数域Q上可约，则$f(x)$必能分解为两个次数较$f(x)$低的整系数多项式的乘积。

定理5.1 （Eisenstein）设整系数多项式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\ (a_n\neq 0,\ n\geqslant 1),$$

如果存在素数p，使得$p|a_i$（$i=0, 1, 2, \cdots, n-1$），

$p \nmid a_n$，且 $p^2 \nmid a_0$，则$f(x)$在有理数域上不可约。

§6　复、实系数多项式

代数基本定理　任何次数不小于 1 的复系数多项式必有一个复数根。

可将代数基本定理改述为：任何次数不小于 1 的复系数多项式必有一个一次因式 $x-c$（c 为复数）。

由此可知，对于复系数多项式，仅一次式是不可约的，因而，其分解因式定理如下。

定理6.1　任何 n（$n \geqslant 1$）次复系数多项式$f(x)$必有唯一的标准分解式

$$f(x)=a_n\prod_{i=1}^{l}(x-c_i)^{r_i},$$

其中a_n是$f(x)$的首项系数，c_i（$i=1, 2, \cdots, l$）为互异复数，r_i（$i=1, 2, \cdots, l$）为正整数。

推论　任何n（$n \geqslant 1$）次复系数多项式恰有 n 个复根。

定理6.2　任何 n（$n \geqslant 1$）次实系数多项式必有唯一的标准分解式

$$f(x)=a_n\prod_{i=1}^{s}(x-c_i)^{r_i}\cdot\prod_{j=1}^{t}(x^2+P_jx+q_j)^{l_j},$$

其中，a_n是$f(x)$ 的首项系数，c_i（$i=1, 2, \cdots, s$）及 p_j，q_j（$j=1, 2, \cdots, t$）都是实数，r_i（$i=1, 2, \cdots, s$）及 l_i（$j=1, 2, \cdots, t$）都是正整数，且$x^2+p_jx+q_j$ 不可约，即

$$p_j^2-4q_j<0 \quad (j=1, 2, \cdots, t).$$

推论　对于实系数多项式，仅一次式及形如 x^2+px+q

而 $p^2-4q<0$ 的二次式不可约。

§7　多元多项式

为了实用上的需要，以下均设x_1，x_2，…，x_n取自某一数域P的 n 个变数。称 $ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$为一单项式，这里$a\in P$，称为单项式的系数；$k_i$为非负整数，当 $a\neq 0$ 时称它为单项式x_i的次数（$i=1$，2，…，n）而$k=k_1+k_2+\cdots+k_n$为此单项式的次数。

如果两个单项式中的所有x_i的次数对应相同，称这两个单项式为同类项。一些单项式的和

$$f(x_1, \cdots, x_n)=\sum_{k_1\cdots, k_n} a_{k_1\cdots k_n} x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}$$

称为 n 元多项式。我们总认为 n 元多项式中各个单项式彼此不同类。在 n 元多项式中，称系数非零的单项式的最大次数为这个多项式的次数，如果 n 元多项式中不存在系数非零的单项式，则称为零多项式。

定义　n 元多项式$f(x)$与$g(x)$，如果同类项的系数全部对应相等，称其为相等。

命题1　数域P上的 n 元多项式$f(x_1, \cdots, x_n)$与$g(x_1, \cdots x_n)$相等的$\Longleftrightarrow$对于P中的任一组数ξ_1，ξ_2，…，ξ_n恒有

$$f(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)=g(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n).$$

对于两个不同的单项式

$$ax_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}, \tag{1}$$

$$bx_1^{l_1}x_2^{l_2}\cdots x_n^{l_n}, \tag{2}$$

如果 $k_1=l_1$，$k_2=l_2$，…，$k_{s-1}=l_{s-1}$，而 $k_s>l_s$（$n\geqslant 1$，$s\geqslant 1$），则称（1）先于（2）。将多项式中的各项，按上述规定先后顺序排列，称为字典排列法。按照字典排列法写出的多项式的第一项称为多项式的首项，但首项的次数未必为多项式的次数。

命题 2 设 $f(x_1,x_2\cdots,x_n)\neq 0$，$g(x_1,x_2,\cdots,x_n)\neq 0$，则乘积 $f(x_1,\cdots,x_n)g(x_1,\cdots,x_n)$ 的首项等于 f 的首项与 g 的首项的乘积。

推论 1 如果 $f(x_1,\cdots,x_n)\neq 0$，$g(x_1,\cdots,x_n)\neq 0$ 则

$$f(x_1,\cdots x_n)g(x_1,\cdots x_n)\neq 0.$$

推论 2 如果 $f(x_1,\cdots,x_n)h(x_1,\cdots,x_n)=g(x_1,\cdots,x_n)h(x_1,\cdots,x_n)$ 且 $h(x_1,\cdots,x_n)\neq 0$，则 $f(x_1,\cdots,x_n)=g(x_1,\cdots,x_n)$。

定义 如果 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 的所有单项式都为 s 次的，称 $f(x_1,\cdots x_n)$ 为 s 次齐次多项式。

命题 3 设 $f(x_1,\cdots,x_n)\neq 0$，$g(x_1,\cdots,x_n)\neq 0$ 均为齐次多项式，其积的次数等于 f 的次数与 g 的次数之和。

§8 对称多项式

定义 如果对任何 $i\neq j$，$1\leqslant i$，$j\leqslant n$，恒有

$$f(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_j,\cdots,x_n)$$
$$=f(x_1,\cdots,x_j,\cdots,x_i,\cdots,x_n),$$

称 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 为对称多项式。

在 n 元对称多项式中，下列 n 个多项式是最基本的：

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i;$$

$$\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_1x_n + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n$$

$$= \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j;$$

$$\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots$$

$$\sigma_n = x_1 x_2 \cdots x_n.$$

称 $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$为初等对称多项式.

、**定理8.1** 对于数域P上的任一对称多项式$f(x_1, \cdots, x_n)$，必可找到P上唯一的一个多项式$g(y_1, \cdots, y_n)$，使得

$$f(x_1, \cdots, x_n) = g(\sigma_1, \cdots, \sigma_n).$$

问 题 探 讨

问题1 设P为数域,

(i) 如果$p_1(x)$, $p_2(x)$, $\cdots$, $p_r(x)$为数域P上的r个两两不同的不可约的首项系数为1的多项式, 证明$f(x) = p_1(x)p_2(x)\cdots p_r(x)$ 在复数域上无重根;

(ii) 如果α是个复数, 但$\alpha \in P$, 证明: 对任何正整数n, $(x-\alpha)^n$都不是P上的多项式.

证明: (i) $\because$ $p_i(x)$不可约, 故$p_i(x)$无重根, 又因为$i \neq j$时 $p_i(x)$与$p_j(x)$不同, $\therefore$ $(p_i(x), p_j(x)) = 1$，即说明$p_i(x)$与$p_j(x)$无公根, 因而$f(x) = p_1(x)\cdots p_r(x)$在复数域上无重根.

(ii) $(x-\alpha)^n = x^n + c_n^1 x^{n-1}(-\alpha) + \cdots + (-\alpha)^n$,

$\because\ \alpha \overline{\in} P$, $\therefore\ -\alpha \overline{\in} P$, $\therefore\ (x-\alpha)^n \overline{\in} P[x]$.

问题 2 设 $f(x)=(x-a_1)\cdots(x-a_n)+1$，其中 a_1，…，a_n是互不相同的整数，求证：$f(x)$在有理数域上可约的充分与必要条件为$f(x)$是一个整系数多项式的完全平方。

证明：充分性显然，现证必要性。因为 $f(x)$ 为整系数多项式，又$f(x)$在有理数域上可约，则 $f(x)$ 可分解为两个非零次整系数多项式的乘积。

可设 $f(x)=g(x)h(x)$,

因为$f(a_i)=1$ ($i=1, 2, \cdots, n$)，$\therefore$ $g(a_i)$, $h(a_i)$ 同时为 1 或 -1，

即
$$g(a_i)=h(a_i).$$

又因为$\partial^0(g)<n$, $\partial^0(h)<n$, $\therefore$ $g(x)=h(x)$，故
$$f(x)=g^2(x).$$

问题 3 设a_1，…，a_n为互异的整数，求证：
$$f(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)-1$$
在Q上不可约。

证明：反证法，设$f(x)$可约，则 $f(x)$ 可分解成两个整系数多项式之积，即
$$f(x)=g(x)h(x).$$
又$f(a_i)=-1$, $\therefore$ $g(a_i)+h(a_i)=0$. $\because$ $\partial^0(g(x))<n$，$\partial^0(h(x))<n$, a_1，…，a_n 彼此不同，故 $g(x)+h(x)\equiv 0$，$\therefore$ $g(x)=-h(x)$，可得
$$f(x)=-g^2(x),$$
然而与$f(x)$为首一的多项式矛盾。

问题 4 设λ_1，…，λ_m是m个在有理数域 Q 上线性无关