中德文化叢書之六（第三冊）

五十年來的德國學術

中德學會編譯

AUS FÜNFZIG JAHREN DEUTSCHER WISSENSCHAFT

中德文化叢書之六（第三册）

五十年來的德國學術

中德學會編譯

DEUTSCHLAND-INSTITUT
Peiping
Schriftenreihe, Band 6, Teil 3

中華民國二十七年三月初版

⊕（01485C）

中德文化叢書之六　五十年來的德國學術　第三冊

每冊實價國幣壹元

外埠酌加運費匯費

編譯者　中德學會

發行人　王雲五　長沙南正街

印刷所　商務印書館　長沙南正街

發行所　商務印書館　各埠

平

中下三三七

目錄

第三冊

五十年來的德國學術

算學

喀拉脫窩多里與房戴克(Constantin Carathéodery, Walter von Dyck)著
李仲珩逵

半世紀前德國算學的發展，全係少數人個別研究的結果。五十年來才打開這種各自爲政的局面，而造成多數學者共同研究的空氣。他們不獨研究一個問題的本身，並且討論和他有關的科學。有了這個轉機，算學界才有今日的成就！造成合作現象的原因雖爲複雜，主要的却不外下列三種：（一）由前人所得結果推出之新範圍，均須整理充實使成爲有系統的科學。（二）五十年來自然科學和應用工藝特別發達，其須要算學的地方，比以前更多，因此算學家不能不研求適當的方法，以解決應用科學上諸問題。（三）原有純粹算學得着新的應用，亦足引起算學家研究該科的興趣。他們的努力，大都在基本問題上。經過這種研究，算學中公設的意義和重要才見明顯！十九

世紀下期，學者對於算學的基礎，不獨詳加討論，並且依假定的性質，分類研究算學根本問題既經解決，純粹和應用算學的發展，不獨穩健，抑且容易多了！

上述各種情形，均足促進算學的研究和創造，這也不獨在德國爲然。很多學科經過多數學者同時的努力，和相互闡明，發展非常迅速。因此一種科學的造成，也就不能和從前一樣，說是誰個人的貢獻，而只能說是多數學者在短期內努力的結果！

1880年來德國算學進步甚大，想把要緊的發展，一一舉出，斷不是這篇短文字所能了事。現在且把最近五十年來德國算學家所闢的幾條大路，略說一說：

單就外觀說，現代的算學已與五十年前的炯然不同，這種表面的變化，並不是受時髦和好向的影響，實在是因爲好些基本定理和說法(Formulierung)的發現，這些定理和說法，有的是以前未曾爲人注意到的，有的是以前根本沒有過的。我們請先從點集論的緣起，和公理法的發展說起。

點集論是康脫（Geory Cantor）的創作，經康脫個人的研究，已發展到完成的程度。雖說點集論所用到的，不過是數的觀念和亞里斯多德的邏輯；但他却是算學中理想的精華。我們倘若把

中古時代宗教哲學家聖妥馬(Thomas Aquinus)那幾種近似的思想，丟開不談，那末康脫惟一的開路先鋒就是波爾察洛(B. Bolzano)。當波爾察洛討論無窮集矛盾現象的時候，曾取各集依其所含元素的個數加以比較，而引入二集等勢的觀念。這就是康脫思想的出發點，和他重下定義的原因。因為康脫學說非常普遍，便利，富伸縮性，所以點集論不獨變成了解決分析難題的利器，並且成為科學中不可少的工具。

康脫的學說雖說在 1870 年已大體成就，但這種學說起初僅為法國學者所注意。1893 饒耳丹(Camille Jordan) 1898 波列爾(E. Borel)更把這種學說採入教科書內，直到二十世紀初間，康脫學說才成為德國學者的至寶。1900年德國算學家協會請順弗立司(A. Schönflies)對於點集論作一報告，便是最明顯的證據。其餘關於點集論的詳細情形，以後有機會時，當再談到。

公設的方法論，雖說起源於希臘的幾何學，但在十八世紀當微積分得勢的時候，方法論不獨為學者所遺忘，並且遭大家的鄙視。直到十九世紀高斯(Gauss)波耳葉(Bolyai)洛巴撤夫斯基(Lobatschefsky)諸人討論幾何中平行公設的地位，公設方法才漸為人注意。其後李曼

(Riemann) 在他著名的試講論文上更特別注意無窮 (Unendlichkeit) 與無限 (Unbegrenztheit) 的區別。以後蓋列 (Cayley) 克來 (Klein) 柏日居檀米 (Beltrami) 更由射影幾何出發，討論非歐幾何中的公設。但是這時候所討論的，還只限於平行公設。後來帕詩 (Pasch) 始進而討論其他各公設。與帕詩無關的希爾伯特 (Hilbert)，更研究各幾何公設的獨立性和相倚性。希爾伯特把原來的公設減少幾個造成各種「擬幾何學」。經過這種研究不獨原來的幾何得到意外的眞確，就是以前的缺點，亦補得天衣無縫。在他的名著『幾何學的基礎』（1900年第一版）希爾伯特把公設學說得非常清楚，非常普遍。使牠在任何幾何中都能適用。其實公設是幾何中最基本的東西，必須有牠，算學家才能對於他所研究的東西下嚴密的定義。公設的相容性，雖說前人已經注意到，但是公設的獨立性，直到希爾伯特才作精細的研究。希爾伯特舉出實例，證明甲公設不能由乙公設推出。他最大貢獻之一是他的完足定理（Vollständigkeitssatz）這定理說：點線面所構成的系統在一定公設之下，無擴張的可能。這種公設學，不僅是運用算學研究物理時不可少的工具，就是在純粹算學上，也佔很重要的位置。

集合論，公設學和新算學的重要發展，實源於算學基礎的批評，這種工作，十九世紀卽已完成，其後專家仍不絕的加以修改。

高斯深知基本意義之精確明晰、足使讀者對於算學易於瞭解。所以高斯的著作，都寫得十分嚴密，明顯，雖流傳至今仍足爲吾人法式。柯詩 (Cauchy) 對於基本觀念的注意，則更進一步。此後能夠用精細的推斷，把邏輯的嚴密，應用到分析學內，並且在研究講授時，能處處顧到邏輯結構的，要算是有獨無偶的外而史拉斯（Weierstrass）。雖說外而史拉斯在 1855 左右，對於這方面的工作非常努力，但直到 1880 年後，大家才對於他的說法驚奇。但是多數的算學家，並未跟着他向這條路上走。因爲這時候德國大部分算學家，如蒲留克 (Plücker) 克勒布詩（Clebsch）奴曼 (C. Neumann) 克萊 (Klein) 他們都很緊張的注意幾何和代數的發展，而得到良好的結果。因此大衆的論調，不是說外而史拉斯矯枉過正，便說他的方法枯燥虛空。1871 他們更創辦『算學年報』與柏林學派所主持的『純粹及應用算學雜誌』對抗。這種對抗的事實，雖有歷史上的意義，但其結果並不妨害雙方的發展。現代算學各科的進展，不論是理論和應用，第一須研究該科的

基礎，第二須鞏固進展的步驟，第三要有新穎的思想，來開闢新的途徑，闡明各科相互的關係。雖說外而史拉斯的批評法，他自己能任用自如，並且經過他的研究，這種方法已大體成立，然而還須學者二十年的努力，才能刪繁就簡，成爲算學家的至寶。在這方面不僅外而史拉斯親近的學生如史瓦爾茲 (H. A. Schwarz)，史託爾茲 (O. Stoiz) 有相當的貢獻，就是和外而史拉斯毫無關係的滴波亞萊萌 (P. Dubois—Reymond) 色佛斯 (L. Scheffers) 哈爾拿克 (A. Harnack) 卜林格海姆 (A. Pringsheim) 也有很大的勞績。他們努力的結果，把分析變得精美正確，使以前僅爲少數所注意的學科，成爲二十年來德國大學生必修的課程。

當分析學經外而史拉斯和他的門徒的研究，充量的發展，並且日趨穩固的時候，還產生了一個很緊要的科學，這就李曼所創的形勢幾何學(Topologie)，牠的發展，足使近代算學別開生面。

有幾個形勢幾何上的問題，驟然看去，很像射影幾何上的問題。這種問題外拉 (L. Euler) 已經研究過。讀過高斯遺集的，一定知道高斯對於這類問題，曾用過許多的工夫。後來利斯庭 (Listing) 又把這些問題推廣到多維幾何學，單表曲面 (Einseitige Fläche) 的發明者默比斯 (Möbius) 又把這問題向羣論方面發展。然而能夠知道形勢幾何和其他各科特別是和函數論的關係的却是空前的李曼。1870 以後，非利・克萊才把李曼形勢幾何的理想普遍的了解。經過克萊的闡明，李曼研究函數論的方法才得到無上的威權。

在這時候廣大重要的羣論也漸漸萌芽，嘉樂斯 (Galois) 研究代數問題，曾注意到方程式根的組合，造成一個羣。要研究這個方程式是否能逐步解決，只須討論這個羣的性質，便夠了。這便嘉樂斯（以後饒耳丹）羣論的起源。1870年後，非利・克萊在他的艾爾朗根計畫『新幾何研究的比較』內，復討論空間變換羣，和牠的不變量，並利用此種不變量的特點，把幾何分作若干類。克萊研究這種變換羣的時候，並發現兩種不同的運動羣。一種是綿續的，一種是不綿續的。在克萊的代數研究，和梭佛斯利 (Sophos Lie) 關於微分方程論的工作內，他們更開闢了應用這種不同的羣去研究分析的途徑。羣論最要的發展，是從「有盡非綿續羣」進而討論「無盡非綿續羣」。其中特別重要的，是複元線性變換羣，和容受這種變換諸函數的研究。研究橢圓函數的時候，須把平面分作無窮個相等平行四邊形。推廣起來，我們亦可把平面分作無窮個圓弧多邊形，再去探求屬於

這多邊形的函數。高斯的遺集上，已經有這類函數的擬式。史瓦爾慈和佛克斯(L. Fuchs)也會跟着高斯的方向努力。以後克萊和波加勒(H. Poincaré)重新研究這個問題，經過他倆密切的通信，得着許多關於『自守函數』(Automorphe Funktion)的定理。這些當時無法證明的定理，以後都證明了。那時候單義化的問題發生，就是說無論那個多義的函數，不僅在某一點的附近，並且可以整個的，用二個單義函數表示。這個問題，一直到1907年才被波加勒和屈北(Koebe)用完全不同的方法解決了。這個問題所引起偉大的理論，足使形勢幾何的內容更爲宏富。而把以前大部由直覺利用的形勢幾何，變爲嚴密的適合邏輯的科學，(參看外耳(H. Weyl)『李曼曲面的理想』)而形勢幾何也就成爲近代算學的柱石。

　　但是形勢幾何有趣的地方，不是因爲他和各種算學甚至於算學物理上許多問題有關，而是因爲算學上許多初淺的基本問題，必須用精密形勢幾何的方法，才能解決。譬如饒耳丹定理說：「單連面上的簡單閉曲線，把這面分成二部。」又如把這定理推廣到三維空間便可說「單連空間的閉面把這空間分作二部。」這種問題雖說簡單，但是我們如注意到特別複雜的閉曲線和閉

曲面，便知這種定理不易正確證明。1910 布老爾 (Brouwer) 才把三維空間內的饒耳丹定理證明。不過有的閉曲面，雖是球面的連續影，然而這曲面所包的部分，却絕對不能用綿續變形的方法變成球的內部。同時曲面的外部，也不能變作球的外部。又算學家常說其一圖形是二維，三維，或多維空間的圖形，這句話的算學意義到底怎樣？這個重要問題，直到最近才有人利用布老爾，勒北古 (Lebesgue) 舊有的結果把牠完全解決。

多度空間的研究，要算是近代算學的特色。十八世紀拉格朗根 (Lagrange) 已經開始這種工作，但是集其大成的，却是格拉斯曼 (Grassmann 1894) 的『引申論』(Ausdehnungslehre)。格拉斯曼思想的貫澈，却費了不少的時間。直到（1894——1911）他的全集出版，才引起多數的注意。其實多元宇宙的研究，不獨對於純粹算學有用，就是研究算學物理如力學，相對論，熱力學，气體統計說，也成了不可少的工具。

算學發展的大勢，上面已經說了一下，至於各科的發展，則因篇幅的關係，祇能就其大概，略說一說。

自1801年高斯的『算術研究』出版，繼起研究的有古梅爾(Kummer 1810——1893)可羅諾克爾(Kronecker 1823——1891)和得得新特(Dedekind 1831——1916)。經過他們的努力數論發展已大致完成。得得新特把帝利希勒(Dirichlet)的數論講義，加了許多的附錄付印，竟成爲德國算學界最好教科書之一。此書不獨風行當世，並且發生幾十年的功效。以後數論發展基礎，要算是古梅爾（1847）的理想原理(Idealtheorie)和得得新特的數域論。代數數論原理，對於算學以後的發展，含有重要的意義。希爾伯特曾受德國算學家協會的委託，寫了一本「代數數論原理」。這本書外貌似不過是對於原有的參考材料，作一報告，實則對於代數數域論，已有進一步的貢獻。以後富特文勒(Furtwängler)，里克(Hecke)他們的研究，也就以這種進步爲基礎。

數論另一發展方向和質數分佈問題有密切的關係。李曼曾在他的名著『在一定限內質數的個數』內指出近代數論的思想。李曼把這個問題和李曼的(Zahlentheorie)函數，連在一起。勞道(E. Laudau)和他的學生，在這方面有極深切的努力。勞道想證明李曼的某幾種臆斷，雖說未能達到圓滿的結果，但他的努力和新思想，足使數論的大部和函數論得着不少的進步。

近代算學發展的另一方面，是用純粹的幾何方法，研究數論問題，高斯已經從事這種工作，克萊和他的學生基司特（Gerster），更用幾何的方法重新證明克羅諾克爾（Kronecker）的類數關係（Klassenanzahlrelationen），而加以擴充。以後布朗魯恩（Brunn）也在這方面努力。尤其普遍的是民考斯基（Minkowski）他把 n 維空間的凸體，看作基本的東西由這點出發，創造他的「數的幾何」這種學說，在分析和幾何方面的應用日見重要。

另一有趣的研究，便是超越數存在的問題就是說有一種數不能爲整係數代數方程式的根。黑爾米特（Hermite）證明自然對數底 e 已爲超越數後，1882 年林德曼（F. Lindemann）復證明 π 爲超越數。於是自古著名的方圓問題，才得了最確的答案，就是說僅用圓規和尺來畫與圓等面積的正方形，是不可能的事。

一百年前，固爲物理學上的需要，三角級數的理論，已漸萌芽。後來經過福利爾（Fourier），帝利西勒，李曼，外而史特拉，康脫諸人的研究，三角級數遂發展成一純粹的算學。就是積分方程的發展，也同樣以物理爲原動力。積分方程發源於阿貝耳（Abel）。胡依痕（Huyghen）的短時問題，直

到阿貝耳利用積分方程才得到圓滿的解答。阿貝耳積分方程的解，可以用一個完整的式子表示，和其他積分才程的解要用級數表示的不同。阿貝耳積分方程在分析幾何和力學中都有很多的用處，譬如 1906 黑格羅慈 (G. Herglotz) 利用阿貝爾方程解決『地震波的進展』問題就是。

更重要的，有 1902 年福來和木 (Fredholm) 開始研究的福來和木積分方程。這種方程式是位能論長久發展的結果，而出源於奴曼和波加勒 (Poincaré) 的研究經過希爾伯特許多重要的工作積分方程的意義，愈見重大。

史密特 (E. Schmidt) 讀了史瓦爾慈一篇論文，便想起了解決積分方程的妙法。史密特又發明非線性積分方程的理論。波加勒研究旋轉天體平衡圖的時候，遇着了分枝問題，史密特所研究的非線性積分方程，對於解決分枝問題，有最重要的意義。

這幾個例子和以前所舉關於複變數函數的事實，可以表示函數論發展的五光十色。當然除此以外，還有重要的範圍，如全微分方程，偏微分方程的理論，和與牠有關的幾何物理問題，如位能問題，邊値問題等。我們因爲篇幅的關係，也只得從略了。還有兩門科學如今也附帶說一下。