

怎樣做算術習題和解習題

原著者 [蘇聯]亞·阿·索爾

譯者 洪波



上海大略出版社出版

譯 者 的 話

這是一本很好的算術課外參考書。看到這個書名，讀者也許以為這是“難題詳解”一類的書籍。其實這是不對的，這本書對大家的幫助也許比“難題詳解”之類還要大。這裏告訴大家怎樣思考一個算術習題，以及怎樣教學學生們思考一個算術習題。其中的內容，正如作者所說的，是一般書上所不大見到的，而裏面却是作者在師範學校中工作多年的教學經驗。因此，這本書可以當作算術的參考書，也可以當作算術教學法的重要參考書。希望大家能好好地吸取這一位蘇聯作者的先進的寶貴經驗。

書中提到了一些“典型習題”的名稱，而典型習題的解答，作者認為讀者是已經知道的。所以分析習題的解法，也就歸結到典型習題為止（大部分提到的典型習題解答，在書中可以找到的）。有幾個典型的名稱，讀者也許感到生疏。現在，我在這裏提出比較生疏的幾個，並各舉一個例子來說明。

（一）擬設上的習題。

例：用出五千元一張和一萬元一張的紙幣共 10 張，合計 8 萬 5 千元。問各種紙幣各多少張？

（二）混合物上的習題，第一種。

例：購買餅乾二種，每斤 8 千 5 百元的 6 斤，每斤 4 千 5 百元的 4 斤，問平均價錢多少？

第二種。

例：購買餅乾二種，共10斤，平均價格每斤6千9百元，而甲種餅乾每斤價8千5百元，乙種價4千5百元。問每種餅乾各幾斤？

(三)代換上的習題，差數比較的情形。

例：5尺甲等布和3尺乙等布共值58 000元，而甲等布比乙等布每尺貴2 000元。問每等布每尺的價格多少？

比值的情形。

例：5尺甲等布和3尺乙等布共值53 000元，而甲等布每尺的價格是乙等布的 $\frac{4}{3}$ 倍。問每等布每尺的價格多少？

第三種代換上的。

例：5尺甲等布和3尺乙等布共值58 000元，而3尺甲等布的價格和4尺乙等布的價格相同。問每等布每尺的價格多少？

(四)等式上的習題。

例：7斤西瓜和3斤桃子共值12 500元。10斤西瓜和4斤桃子共值17 000元。問每斤西瓜和每斤桃子各值多少元？

這些習題的解答，在書中大部份可以找到，而算術教科書中也有。但典型習題的解法，希望大家要熟練，這樣對於比較複雜習題的解法是很有幫助的。

洪 波 1953年7月28日

目 錄

譯者的話

引言	1
第一章 精通習題的條件	3
第二章 習題條件的區分	10
第三章 習題條件的簡化	19
第四章 解答習題時條件紀錄的圖示法	27
第五章 算術習題解答的代數附錄	31
第六章 用各種不同的方法解答習題	35
第七章 函數思維的發展以及典型習題的綜合	45
第八章 在教學習題解答時關於一些重述的方法	55
第九章 關於習題解答的紀載形式	63
結束語	73

引 言

關於算術習題解答方法的問題，別人早已經寫過很多了，而且已經有了這樣豐富的教學法的書籍，因此，有人可能認為再寫這種書籍是多餘的一件事。那麼，對於這個問題上已經說過了的東西，作者是不是能夠有什麼新的補充呢？作者考慮了這個問題，仍然決定着手了這個工作，還想把自己在師範學校中，對教學算術習題解答方面多年的工作經驗在這裏作一介紹。

什麼力量鼓勵了作者來討論這個問題，而不願習題解答問題已有很豐富的書籍呢？第一，是爲了有些問題，在教學法方面，無論什麼時候也不會變成陳舊，也不會喪失了它們原有的興趣的。習題解答教學問題，就是屬於這一類的問題的。這樣的問題，永遠是值得討論，而且將會引起教師們的注意的。第二，無論關於習題解答方面所說的和所寫的是怎樣的多，我們不能夠設想，所說的已經是最後的一句話了。改變學校工作的條件，提出新的教育的和教師的特性的習題，從這裏就可以推進了新的方法，集中了新的我們所需要的綜合的經驗。

在現在的工作中，並不提出所有的問題，也不是重複任何教學法中所有的內容。例如，我們有意地放鬆了關於典型題目分類的問題，我們認為這個並不起什麼更大的作用。在這裏所說的方法，是在前述的書籍上所沒有說到的，或者只是說到很少一點的。這裏所有的這一些方法，是作者經過極長久時期所得到的肯定的結果，作有系統的應用。

最後，作者認為必須說明，師範學校中的算術教學是有特別條件的，所有工作經驗也是指着這個方向，因為師範學校的課程大綱，是很不同於中等學校的課程大綱，以及師範大學的課程大綱的。

最後，我們一分鐘也不能忽略這件事情：教學算術習題的解答時候，我們同時還要培養未來的初等學校的教師的。

在算術教學法的課程中，要分出9個小時來討論“算術習題解答教學法”。當然，在這幾個小時中，無論怎樣也不會有可能講完所有這些重要問題的內容的，這些問題，只是初等學校算術教學中所提出的重要題目。在這幾個小時內，只能夠走馬看花地完成一部份習題的研究，根據學年教學中的一些個別類型習題解答教學法的普通問題。但是，這樣的內容是很不夠的。

只有在算術課程的習題解答中，才能夠在正確的教學裏，達到對習題解答的方法更深刻的理解，沒有這一些，是不可能對初等學校供給更滿意的教學的。從這裏可以得出了算術和教學法中間深刻的、有機的聯繫。這種教學法，是爲了要武裝學生學會習題的解答，以及教會他自己未來的學生也具有這種本領，是在算術課程中所必需的。在這個情形中，每一個習題解答應該包含有基本的方法，要容易了解，而且，自然，要比各種習題解答所決定的方法廣泛得多。除此以外，很多的習題，特別是典型的習題，和初等學校的習題及解答中間，要有直接的聯繫，在習題解答中，可以而且應該做出這種有順序性質的指示，這種性質，以後能夠逐步地在初等學校中應用。師範學校中，習題解答教學的設立，所包含的內容應該是初等學校中工作組成上所必需的。這就是着重地指出師範學校中教師的技能，他們的創造性、主動性，要利用一切多種多樣的方法，以生動的形式，武裝未來的教師以這樣複雜的技巧，學會習題解答的教學。

第一章 精通習題的條件

精通習題的條件，是習題解答的實際教學中重要因素之一。我們需要學會看出習題的條件，仔細研究，學會在閱讀條件的過程中，分別出哪些是基本的，而要暫時轉移對於次要條件上的注意力。

學會把條件寫成簡要的形式，是很重要的，因為由自己寫出以後，就能夠起顯著的作用，有時候能夠指出事實上即將來臨的解答方向。在這裏，我們可以引用一個類似的東西，就是在證題前草圖的作用，學生們在動手解決幾何問題之前，總要大略地畫一個草圖的。不注意作圖的條件，常常會使得學生們在作圖時，以二等邊三角形來替代不等邊的三角形，以高來替代角的平分綫，以長方形或正方形來替代任意的四邊形等等，從這些出發，所擬想的解答步驟一定是不正確的。

在師範學校中，習題條件上的工作還要起更重要的作用，因為這些未來的教師要把自己工作中所獲得的技能傳授給初等學校中的學生，應該要考慮到低年級工作的特點。

同時，照例，我們要注意，七年制學校畢業來到師範學校的學生是不會在習題的條件上下功夫的，不會閱讀條件，不習慣於考慮條件，不習慣於細心研究條件，仔細地揭露條件內容，不認識到只有理解條件以後，才能着手解答習題。學生們急忙地閱讀條件後，就着手解答，往往會流於“嘗試”的方法，以及篡改已知條件的各種方法，而希望所得的答案，硬要和習題本中所指示的相合。

學生們在解答習題的工作上用這同樣的“作風”來做時，只有在不順利的“嘗試”以後才會開始細看條件，仔細研究，而尋求解答的方法。我們必須注意，如果像學生們一樣地閱讀習題，或者做出簡要的條件，而不熱切地盼望着把握住全部的條件，那麼他們一定不能自覺地反復考慮，而只是根據教師的問題重述一篇，來區分習題的環節，把這樣所得的結果或者叫一個人到黑板上做，或者在練習簿上做。在這種情形之下，學生們往往不僅不能準確地作出已知的數目，而且也不能準確地作出條件的因素，這些條件是建立了已知和未知數值中間的相依性的。這種形式的重述條件，對於所叫到的解答習題的學生，以及對全班的學生，是不會起着發動的和指導的作用的。這樣，教師必須自己重新復述條件；而只有在這樣以後才能着手解答習題。所有這一些，都是教師在着手解答習題之前，和學生們一起要求精讀而且仔細考慮條件的工作做得太少的結果。從這裏得出這樣的必要性：在師範學校中及其他學校中，要盡量應用多種多樣的方法，指導學生精通習題的條件。

從上面指出了一些問題。

學會重述條件

教師應該堅持並且強調地要求學生有意識地重述習題的所有條件，而不用教師的啓發詢問。在師範學校中，這個要求必須在第一課程中立刻引入，一直堅持到高級的課程。開始，在比較容易的習題中，必須訓練重述條件，以後，漸及於內容比較複雜的或繁重的習題。

例如，讓我們來解決第 572 習題 (1)。“在兩個盒子中共有 6 260

(1)這裏以及以後的習題，都是選自契克馬列夫和菲列契夫合著的“師範學校算術習題集”(1946年出版)，再纏上號碼。作者所編的習題是沒有編號的。

支鋼筆。從第一盒中取出 400 支鋼筆放入第二盒中，這樣，第一盒中留下來的鋼筆還比在第二盒中的多 220 支。問每盒中原來各有幾支鋼筆？”

簡要的條件紀錄：

I 和 II——6 260 支鋼筆。

從 I 中取出放入 II 中——400 支鋼筆。

I 比 II 多 220 支鋼筆。

每盒中原來各有鋼筆多少？

可以用各種各樣的方式來重述條件：a) 教師讀出條件以後，吩咐學生重述條件；b) 吩咐學生根據習題本讀出條件，然後不利用習題本重述條件；B) 在黑板上簡要地寫出條件以後，再重述條件。最後這個重述條件的形式還可以改成這樣：學生可以利用黑板上所做的簡要紀錄，但是必須要習慣於不看黑板上的紀錄而重述條件。

再取一個更複雜的習題。

習題 1342。 “輪船上有 131 個旅客。三等艙中旅客的數目比二等艙的旅客多 16 個；一等艙中旅客的數目比二等艙的旅客少 14 個。二等艙中每張票價是一等艙的 $\frac{1}{2}$ ，三等艙中的每張票價是一等艙的 $\frac{1}{3}$ ，而且又等於 4 盧布。問輪船中每等艙的旅客各有多少，而且船票的總收入是多少？”

細心地閱讀習題後，學生可以簡要地記下條件：

131 個旅客 $\begin{cases} \text{III 等的比 II 等的多 16 個。} \\ \text{I 等的比 II 等的少 14 個。} \end{cases}$

票價： $\begin{cases} \text{II 等的} = \text{I 等價格的 } \frac{1}{2}。 \\ \text{III 等的} = 4 \text{ 盧布或 I 等的 } \frac{1}{3}。 \end{cases}$

每等艙的旅客各有多少，以及總收入是多少？

當簡要的紀錄做好的時候，教師還要對所叫到的學生提出要他自己細心地讀這簡要紀錄，根據這個，再回復到習題的原文。在這種情形之下，教師可以提出要學生不必依賴黑板上的紀錄而重述條件。

要求重述條件，不僅要對叫到黑板前的學生提出，而且要使其餘的各個學生達到同樣的目的。這種方法可以鼓勵並強調學生們的積極性和注意力。

事實上指示出，教師的工作如果是始終朝着這個方向的，就會引導學生們使習慣於細心精讀習題的條件。照這樣做的結果，學生們對於條件就已經得到了清楚的概念，用不到要求教師再重複說明了。自己重述條件，誦讀它，分別出其中最重要的因素，可以作為學生們理解條件的準則。

簡要的條件紀錄：

關於簡要的條件紀錄的問題，在教學法中很少研究到的。同時，每個教師從工作經驗中知道，有時很難以簡要的容易接受的形式給出精密的簡要的條件紀錄，而且包含了一切必要的和充分的條件。在另一方面，我們知道，組織得好的簡要習題條件紀錄，本身已經是解答的一部分了。自然，我們對於簡要的條件紀錄，難以給出任何一般的原則。教師的習題的組成，就是為了要常常指導這個工作，精密地考慮簡要紀錄的最合理形式。

這種形式，可以培養學生們的敏覺性，暗示他們選擇適當的簡要條件紀錄。從需要做給學生們看的一般指示中，我們要使他們注意，跟着紀錄所反映的已知數值間的關係。我們認為預先和學生們談談是很有益處的（在閱讀條件以後），談談如何做簡要的條件紀錄，那些條件可以不列入條件紀錄中，如何紀錄材料的次序，這一個跟着哪一個，如何用括弧把紀錄聯結起來等等。在某些習題中，例如，簡單的和複雜的比例上的，兩類物件的混合上的，靠減法的幫助消去未知數目上的，

等式上的——可以作出簡要條件紀錄的實際的適宜的形式，這些條件是接着就要利用的。

我們介紹一些條件紀錄的樣子。

(1) 習題102(條件已被我們改過了)。“一等的落花生4.5公斤，二等的9公斤，三等的24公斤，共值302.4盧布。一等的每公斤價值比二等的每公斤價值較貴3.4盧布，而比三等的每公斤較貴4.6盧布。問各等的每公斤各值多少?”

簡要的條件紀錄：

I等——4.5公斤	}	302.4 盧布。
II等—— 9 公斤		
III等—— 24 公斤		

I等的1公斤比II等的1公斤貴3.4盧布。

I等的1公斤比III等的1公斤貴4.6盧布。

各等的1公斤的價格是多少?

(2) “二塊土地上總面積是12.5公頃，總收穫量是92.9公担的亞麻。在第一塊地上平均每公頃收穫8.4公担，第二塊地上平均每公頃收穫6.2公担。決定每塊土地的面積。”

簡要的條件紀錄：

I地每公頃收穫8.4公担	}	總數：12.5 公頃；92.9 公担。
II地每公頃收穫6.2公担		

決定每塊土地的面積。

(3) 習題148。“有一個圓形的跑馬場，圓周長1.14公里。從這跑馬場圓上一直徑的兩端點，有兩匹馬各在一點上開始沿着圓周奔跑，向着同一個方向，第一匹馬每秒鐘跑11.5公尺，第二匹14 $\frac{1}{2}$ 公尺。問經過多少時間以後，第二匹馬追上了第一匹，而且追上的時候，已經跑了多少圈了?”

這個問題上，說明了一連串的條件因素，雖然在解答中要計算到的，但是它們在簡要的條件紀錄中却可以不必列進去，而條件紀錄可以寫成這樣形式：

圓周長——1.14 公里。

I ——每秒 11.5 公尺。

II ——每秒 $14\frac{1}{2}$ 公尺。

經過多少時間以後，第二匹馬追上了第一匹馬？
跑了幾圈？

條件比較多的時候，簡要的條件紀錄，可以應用扼要的形式。

(4) “合作社的攤子上有兩等肉類。第二等有 49 公斤，是肉類總數的 $24\frac{1}{2}\%$ 。第一等肉類每公斤的價格及第二等肉類每公斤價格的比與 3.25 及 4 這兩個數成反比例。假使已知第一等每公斤的價格比第二等的每公斤貴 3 盧布，問這些肉類共值多少盧布？”

簡要的條件紀錄：

II 等——49 公斤—— $24\frac{1}{2}\%$ 。

價格與 3.25 及 4 二數成反比例。

價格的差——3 盧布。

肉類共值多少？

根據簡要紀錄來組成習題，是幫助獲得簡要條件紀錄技能的很有用處的練習。例如，在黑板上寫了這樣形式的習題條件：

I 和 II ——855 公尺。

I 比 II 多 45 公尺。

I ——可做 80 套女衣和 60 套男衣。

II ——可做 58 套女衣和 63 套男衣。

根據這樣的簡要紀錄提出組成習題的條件，並提出習題。

可以運用簡要條件紀錄組成上列的專門的習題。

可能有這樣的情況，只重複總的條件內容是有意義的，因而在數字的材料中或條件本身的一部份省略了一些東西。這在一些複雜的習題中或者是條件繁多的習題中是特別有用的，那時候，首先重要的是了解一些總的情況，然後再研究個別的細節。

接着，同樣可以運用自由轉述習題條件的方法，允許離開原文，離開習題中材料所配列的次序。有時候，用別的方法來說明條件，會使得習題變成明顯、清楚，而容易了解的。

精通條件上的工作，也應該面向着學生的家庭作業上。在課堂上解答習題時，對於精通條件方面要求用思考的態度，我們對於家庭作業也提出同樣的要求。學生們也許會說，他在家裏就不能夠詢問各個習題的解答，我們建議他：

回憶習題的基本內容；

指出他會遭遇到的困難點（“說出，你們在條件中哪些地方會發生困難，在解答中哪些地方你們不懂？”）；

提出對於解答習題所作企圖的路綫（“說明你們的草稿。說明你們對於解答習題所作的企圖”）。

在檢查家庭作業時，對於個別的學生運用這些方法，是會大大地提高了他們的責任心，而且迫使他們不斷地在習題解答上工作的。當然，這種方式只能夠個別地運用，因為不然的話，這個要佔據很多的時間，但是這種特殊的檢查，可以針對着那種不好的工作來指導，會帶來實際的效果的。

上面所述的大概意思是：條件上的工作是極多種多樣性的，而要求教師們有創造性地利用所有這裏所提出的可能方法。

第二章 習題條件的區分

初步分析

在師範學校裏，教學習題解答的過程中，我們要力求引導學生們，使得他們能在這三年中學會了對所提出的問題作充分開展的分析。每個教師從經驗中知道，要學生們給出明確的解答的分析、步驟和解釋，是有困難的。學生們對於分析方面，常常只能夠出現在解答的過程中，而把分析和步驟等等混和了。這是一點也沒有什麼奇怪的，我們在前面已經說過，關於習題的精密理解，以及要使師範學校中的學生達到這個目的，只能夠建築在長期的、細心思考的、有準備的工作基礎上。這個有準備的工作，就是在於教會學生在聯合的習題中劃分出不是獨立的簡單的、而是基本的習題，從這些習題就組成了複雜的習題。這個工作需要第一課程中立刻開始的。

問題在於：在師範學校中，這種習題已經在第一課程上佔了很大的位置了，這些習題結合了二、三個類型的習題，所以能夠區分出它們的組成部份。在很多的情況中，這些區分的可能性是這樣明顯地得出，因為我們在細心研究條件時就已經能夠看出來了。我們介紹一些這種問題的樣子，而且指出在研究這些習題的條件時候，就能夠引出初步的分析來。

我們解答第一課程中的習題：“一個旅行團體算一筆帳，如果在購

買用具上，團體的每個成員收 45 盧布，那麼不足 750 盧布，如果收 50 盧布，那麼不足 500 盧布。現在團體中每人收 50 盧布，再得到補助金 700 盧布，團體裏去採買衛生衣、運動袴、拖鞋等物，其中拖鞋付出的比運動袴的多 650 盧布，比衛生衣的大 3 倍，問衛生衣付出了多少？”在黑板上，簡要的習題條件紀錄是這樣的：

每人 45 盧布——不足 750 盧布。

每人 50 盧布——不足 500 盧布。

.....
每人 50 盧布再加補助金 700 盧布。

.....
拖鞋付出的比運動袴的多 650 盧布，又比衛生衣的大 3 倍。

.....
衛生衣付出了多少？

在重述條件以後，開始解答習題之前，建議學生們細心地看一看簡要的條件紀錄，思考一下，給我們的習題是由哪些典型習題組成的，引用（在黑板上或練習簿上）虛綫，把這些典型習題劃分開來，再寫上這些典型習題的名稱。結果，說明了我們這個習題是由三個習題組成的：

- a) 根據兩個數值的差，求出未知的數值；
- b) 求出費用的總和；
- B) 根據總和及差，以及根據總和及比值，求出未知的數值。

在提出了這個問題對於另一個問題的相依性以後，從這些問題中我們可以先解答那個不依靠別個的問題。這就是說明了我們可以先解決第一個問題，這是不依靠其餘的問題的。再說明了，在第一個問題中可以知道所收得的錢有多少，而這個答案（加上補助費 700 盧布）正是解答以後各部份習題所必需的。學生們可以很快地看出這組成

習題上各個習題的怎樣區分。

我們還要引進一些習題的形式，目的在於指出我們所選的問題，絕對不是帶着偶然的性質的，而且，相反地，大多數的習題，可以作出這樣組成問題的區分的。

習題：“採買3批木柴。第一批中，有50立方公尺橡樹的，65立方公尺松樹的，和40立方公尺白樺樹的木柴，總的重量91公噸5公担；第二批中有50立方公尺橡樹的，80立方公尺松樹的，和40立方公尺白樺樹的木柴，總重量99公噸；第三批中有50立方公尺橡樹的，70立方公尺松樹的，和80立方公尺白樺樹的木柴，總重量118公噸。所有松樹的和白樺樹的木柴裝在三部卡車上運出，第一車所運的比第三車的少19公噸而比第二車的大4倍。問第三車運出的木柴是多少重量？”

簡要的條件紀錄：

I.—50立方公尺橡樹的；65立方公尺松樹的；40立方公尺白樺樹的——91公噸5公担；

II.—50立方公尺橡樹的；80立方公尺松樹的；40立方公尺白樺樹的——99公噸；

III.—50立方公尺橡樹的；70立方公尺松樹的；80立方公尺白樺樹的——118公噸。

.....
I比III少19公噸

.....
I比II大4倍

.....
第三車運出木柴的重量是多少？

虛線表示，這整個習題可分為三個習題：

- a) 靠減法的幫助,用消去法來求出未知的數值,
- 6) 根據數值的總和及差求出數值,
- b) 根據數值的總和及比值求出數值。

習題：“木柴的倉庫中收藏有 220 立方公尺白樺樹的，和 150 立方公尺松樹的木柴，總的價值是 8 280 盧布。在另外一個同樣的倉庫中，放進了 132 立方公尺白樺樹的，和 360 立方公尺松樹的木柴，總共值 10 368 盧布。把所有白樺樹木柴重新分為兩部份，其中一部份比另一部份多 32 立方公尺，以白樺樹的較少部份和全部松樹木柴組成混合物，出賣時虧本了 305 盧布。問一立方公尺的混合木柴賣多少價錢？”

簡要的條件紀錄：

220 立方公尺白樺樹和 150 立方公尺松樹——共值 8 280 盧布。

132 立方公尺白樺樹和 360 立方公尺松樹——共值 10 368 盧布。

.....

I 比 II 多 32 立方公尺。

.....

白樺樹的較少部份和松樹的混合物

虧本 305 盧布

.....

1 立方公尺的混合木柴賣多少價錢？

虛錢把習題分為三個組成部份：

- a) 等式上的習題；
- 6) 根據兩個數值的和及差，求出兩個數值上的習題；
- B 第一類混合物上的習題。

習題：“集體農莊的攤子上出賣三批番茄，共 18 公担，每公斤都以 2 盧布的價格賣出。第二批比第一批多 75 公斤，第三批比第二批大 3 倍。農莊管理處要把第一批賣出所得的錢為俱樂部圖書館購買 12