百科小叢書第一百六十八種

從代數到微積

鄭太朴編

商務印書館發行

從代數到微積

著者 鄭太朴

編輯主幹 王雲五

商務印書館發行

識語

這本"從代數到微積"，原係德人休士德(August Schuster)所著，爲通信的體裁。後面那樣的分章及節，并每節開首先標以題目，是譯纂者所改成；蓋德文與中文語氣多有不同，原書通信體裁若照譯成中文，未必能使讀者感興味，而系統之不明白，則卻易感覺到；故不如改爲章節之較爲醒目。又因爲求其適合中國社會上一般讀者故，於取材，敍述法及措詞等方面，麤加斟酌，各處均有删節及增改，通俗書不比名著及高深的科學書，不得擅自纂改；故苟求淸楚易懂，卽無妨斟酌增删。因之，此書不曰"譯"而曰"譯纂"者，用意在是，并非敢大膽妄爲，自作聰明。

如書題所標，這是一本盡人可解的數學書；祇要有高等小學卒業的數學程度，便可由此直

窺高等數學之門徑。 緣此，這書雖不足以語大雅，然亦有他的價值在！

譯纂者誌於德國哥庭根城西之冷蘭村

目 次

從代數到微積

1. 本書之內容　“算學”二字，乃是一總名，其中所包殊爲宏富。尋常將算學列爲二部分，卽所謂“高等算學”與“初等算學”是。但在某種意義上說來，“高等”與“初等”之間殊難定其界限，故此種分別頗有可以疑問處。不過爲便利計，則亦不妨照尋常的習慣如是別之而已。本書中所欲述者，大多限於初等的方面；但在後面，則亦稍微提及些高等範圍以內者。

爲省事計，假定讀者已習過些算術，故於此方面不再提及。

2. 方程　在算術裏面，我們所用以計算的數目，都用數目字表出之，如 3, 25, 156 等等。但光用數目字爲計算之具，有時每覺得有不便，且極有限制，算學之爲用不能廣了，於是我們兼用字以代數目（以下我們均用羅馬字 $a, b, c \cdots x$,

y,z 等等爲代),如前面說過的幾個,我們可隨便用 a 以代3,用 b 以代25,用 c 以代156等等。本來用字母代數目,是可以完全隨便的,不過向來沿用慣將字母開首的數個如 a,b,c 等代已知的數目。而其末後的數個如 x,y,z 等則代未知的,我們所欲求的數目;今仍之。代數學所從事者,是在用字母代替數目,然後將已知數與未知數的關係開出;列成所謂"方程",以求其"解",即從已知數與未知數的關係上,推得未知數。簡單說來,代數學是"方程"學。

用一個"等號"(=),將相等之數目連起來,此即是所謂方程;例如三加四等於七,我們把他寫出來作 $3+4=7$,此式卽謂之"方程"。又如 $x+y=a$, $x-3y=a-b$ 等等都是方程(按"方程"二字是中國向來所用慣的,故仍採用,其實在西文均作"等,"本無待解釋而自明者)。現在我們卽舉一二個例於下,以明方程是什麽一回事,怎麽樣得到,有何用處。

例一．今有兄弟二人於此，兄年三十五歲，弟年二十五；問當幾年前，兄的年齡適等於弟的二倍？又問當幾年前兄的年齡等於弟的三倍？

這題目之第一問，比較的還容易算，我們只要如此一想，便不難得解了：即，兄的年齡較弟的既長十歲，其差數為十，如是當弟十歲時，又加上十年的差，則此時兄的年齡適等於弟的二倍了；所以我們很容易回答說：在十五年前，兄的年齡，適等於弟的二倍。

但是第二問幾年前等於弟的三倍，可就不若是之易答，至少非細細思量一下不可。現在請看我們若何求助於代數學上最簡單之方程。這裏，弟的年齡25與兄的35均是已知數，而我們所欲求的幾年前之年數則為未知數。我們現在用字母x代此未知數，將他與已知數的關係列為方程，然後由此推得此未知數x應該是什麼數目，而看他能否解答我們的題問。但我們如何寫出其關係，而得一方程呢？請看下面便知道了。

弟的年齡現在旣是25,則當x年以前,其年齡自然要小於現在x年,寫出來,此時的年齡是$25-x$;而兄的年齡此時則爲$35-x$(用話說,弟的年齡此時爲25減x;兄的則35減x)。這裏,$25-x$與$35-x$都是一個數目,因之我們亦可用括號把他括上,寫作$(25-x)$與$(35-x)$。我們所欲求者是幾年前兄之年齡適等於弟之三倍,換句話說,在這x年以前,兄之年齡是等於弟之三倍。但適才我們已得到二個數目,兄之年齡當x年以前是$(35-x)$,弟之年齡則爲$(25-x)$,如是我們自然得此方程:

$$35-x=3\times(25-x),$$

於此,等號之左爲兄x年以前之年齡,等號之右則爲弟,此時之年齡用3乘,卽表明三倍。方程旣得,現在只有若何解此方程以求得x當爲何數目的問題了。但這裏却先有一些計算上的理,不能不先弄明白,卽方程右面之$3\times(25-x)$(用三乘括號內之數),應如何算法呢?照所寫的

樣式看去，自然不難明白，其意義是25減去 x 後之餘數，用 3 去乘。不過這裏 x 乃是一個未知數，我們尚未知其值是多少，怎樣能從 25 減去，而以3乘其餘呢？

要明白這用3乘括號內數的道理，我們可暫時假定，x 是個已知數，譬如是10。於此，計算的方法自然是先將10從25減去，得餘數15，然後再用3去乘，得45；用算式寫出來是：$3\times(25-10)=45$。但是事實上我們還有一個其他的辦法，所得的結果與此完全相同：即我們不必先減後乘，先自25上減去10然後以 3 乘其餘數；我們亦可先乘後減，即我們可先用 3 遍乘括號內之兩數，然後將此二個得數相減以得其餘數，其結果與先減而後乘其餘數者無異。如前例我們先自25上減去10，然後以3乘，所得結果為45；我們若先用 3 乘25，得75，又用 3 乘10，得30，然後以75與30相減，結果亦是45，與前者無異。這樣，我們便知用一數去乘括號內之數時，其法可用

此數遍乘括號內之諸數，然後仍照其號將此諸得數相加或相減之；此法對於括號內有未知數時，亦能無困難使用了。

我們既明白此種道理，則前面所得的方程之右面$3\times(25-x)$，即不難計算了，我們於是可把他寫作$3\times25-(3\times x)$。但這裏尚有一些須一說，即一個乘號×在數目字與數目字之間，如3×25，是不可少的，要沒有他，則3乘25(3×25)變成325，為三百二十五了。若在數目字與字母之間，如$3\times x$，或在字母與字母之間，如$a\times x$或$a\times b$，則便可不必要，直寫作$3x$，或ax，ab即可了，蓋這裏不會有錯誤發生，并且3乘x，其意義原即是3倍x，故中間的乘號成為多事無用，省去為便。如是，這右面的可寫作$3\times25-3x$，而我們前面所得的方程作下式了：

$$35-x=3\times25-3x。$$

現在我們試求解此方程，以得x之值。我們第一步自然先須將未知數與已知數各分在一面，

如是將未知數一齊歸在左面，已知數一齊歸在右面，方可得解。這又什麽辦呢？在此我們可設想我們的方程猶如一天秤，兩面等重的；若單獨於一面加了些東西，其他一面不照此亦加，則其均重卽失，一面較重，一面較輕，不能相等了；但若兩面加了同重的物，則均重仍保持着，全不受影響。與此同樣的道理，我們的方程兩面是等的，只要我們於等號之兩面同樣的加上或減去某數，則其相等自然不致受影響：二個相等的數，各加上或減去某數，仍是相等，這是自明之理。根據這道理，我們可先於方程之兩面各加上 $3x$，則此方程卽成爲

$$35-x+3x=3\times25-3x+3x。$$

又因加減先後之次序，與結果之得數無關；而方程右面之 3×25，亦可把他乘出作75寫上；於是此方程又可如是寫：$35+3x-x=75+3x-3x$。這裏，等號之右面是於75上加 $3x$ 又減 $3x$，加的和減的恰相消，只存75在那裏了；其左面是於35上

加$3x$又減去一個x，如是尙存$2x$加於35上，因之左面爲$35+2x$。 這樣，此方程經歸併後，即變爲下式了：

$$35+2x=75。$$

我們仍如前法，於此方程之兩面再各減去35，卽得此式：

$$2x=40。$$

旣得了此式，我們的問題解決了；蓋我們所求的未知數x，卽幾年前之年數，現在已得其數目：此式明明的說$2x$等於40，則x等於40之半，卽是20。這就是說，我們所求的年數是20年。

現在且看這所求得的數目是否已解答了我們的問題呢？ 細細一想，實在一些也不差，因爲二十年前兄的年齡是十五，而弟的則爲五歲，算來此時兄的年齡恰長於弟的三倍，

我們爲了要使讀者能更淸楚些更明白些起見，再舉一個例於下。

例二。有線一條，長21寸。 現在我們要將

此線分成兩段，使此段等於彼段四分之三，問這兩段各長若干？

這裏，我們所欲分成的兩段，是一較長，一較短；但照題目上說，是欲使短者等於長者的四分之三，因此我們可如是算法：我們設長者一段爲 $4x$ 寸，則短者等於其四分之三，自然是 $3x$ 寸了。因爲原線長21寸，所以這所分成的兩段合起來，仍是21寸，於是我們得此方程：

$$4x+3x=21。$$

這裏，等號之右面是原線之寸數，其左面爲所分成的兩段，長者 $4x$ 寸，短者 $3x$ 寸，用加號表示其合起來之意。這方程一面是未知數，一面是已知數，所以極容易求其解：我們照此式將其左面之兩個未知數相加，即得 $7x$，如是此方程爲 $7x=21$，即是說七個 x 等於21。$7x$ 既等於21，x 自然等於3。我們前面原設長者等於 $4x$ 寸，短者等於 $3x$ 寸；今既求得 x 之值爲3，則即是長者等於12寸，短者等於9寸。如是短者恰等於長

者四分之三，而此二段合起來亦仍是原線21寸，實在一些不差，

上面所舉這二個例，自然是最簡單的，卽不求助於代數單憑頭腦亦能想得出來，但是讀者看了此，則所謂方程之意義，已可得個慨念了。

3. 方程內之項　凡方程內用加號或減號連起來之各個數目，不論爲已知者或未知者，均謂之"項"。如前節內$35+2x=75$一方程，其中35，$2x$，75三個數目均稱爲項，因而此方程之左面爲二項，其右面則祇有一項。項有相似的與不相似的之分，如$2x$與$4x$這兩個項是相似的，$2x$與35或$2y$這三個項是不相似的。方程內相似的諸項，可照他們的號或加或減的歸併起來成爲一項，如前節第二例內$4x+3x=21$一方程，其左面$4x$與$3x$兩個項是相似的，因之我們可照其間之加號併爲一項作$7x$。其不相似的項自然不能歸併。項前之加號或減號，表明此項須加於其前或減去之者，我們卽視爲此項之號，如在開首，

前面無號者，亦視作有加號；如是前所舉之式$35+2x=75$，其中$2x$一項有加號在前，35與75兩項均在開首，其前無號，但我們亦視之作有加號在前。又如$a-b=c$，此方程內之左面第一項a爲有加號在前者，第二項b則有減號在前；其右面一項c亦爲有加號在前者。加號我們亦稱爲正號，減號亦稱爲負號；因之每個項均可別爲正的或負的（按數目有正負之分，這是很易明白的；舉個例以說，爲寒暑表零度之上有一，二，三，四……等度數，零度之下亦有一，二，三，四……等度數，如是零度以上者謂之正數，零度以下者謂之負數，譬如零度以上十度，我們可稱之爲正十度，零度以下十度則可稱爲負十度。我們亦可拿0爲出發點，向前增加得1，2，3……爲正數，向後再減少則所得爲負的數-1，-2，-3，……了）。

前節內曾說過，方程猶如一天秤，等號之兩面是等重的。我們若欲於一面加上或減去某數，