九章丛书

材料力学 全程辅导

浙大·第三版

（下册）

主编　苏志平
编写　九章系列课题组

精教 精学 精练

中国建材工业出版社

材 料 力 学

（浙大·第三版）

全程辅导（下册）

主编　苏志平
编写　九章系列课题组

中国建材工业出版社

图书在版编目(CIP)数据

材料力学(浙大·第三版)全程辅导/苏志平主编. -北京:中国建材工业出版社,2004.2

ISBN 7-80159-592-0

Ⅰ.材… Ⅱ.苏… Ⅲ.材料力学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.TB301

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 010698 号

【内容简介】 本书为配合浙江大学刘鸿文主编的《材料力学》(上、下册)第三版内容而编写的配套辅导。本书是高等学校机电类课程的教学辅导书。全书由重点内容概述、经典例题解析、考研试题选编、课后习题详解四部分组成,旨在帮助读者掌握课程内容的重点、难点和疑点,提高分析问题、解决问题的能力。

本书可供使用浙江大学刘鸿文主编的《材料力学》(上、下册)第三版教材的学生和教师参考,并可作为使用其他教材的读者或考研者的参考书。

材料力学(浙大·第三版)全程辅导(下册)

主编 苏志平

出版发行:中国建材工业出版社

地　　址:北京市西城区车公庄大街 6 号院 3 号楼

邮　　编:100044

经　　销:全国各地新华书店

印　　刷:北京理工大学印刷厂

开　　本:850mm × 1168mm　1/32

印　　张:29.5

字　　数:750 千字

版　　次:2004 年 2 月第 1 版

印　　次:2004 年 2 月第 1 次印刷

印　　数:1 ~ 6000 册

书　　号:ISBN 7-80159-592-0/G · 108

定　　价:13.80 元(下册)

前　　言

《材料力学》一直是大中专院校机电类专业学生必修课程，其内容也随着科学技术的发展而日趋丰富，这就产生了一个矛盾：一方面学生因所修课程越来越多而导致课内外时间减少；另一方面因为技术的进步又要求学生去学习了解比以前更多的知识。

本书正是为了解决这一矛盾而精心编写的。作为浙江大学刘鸿文主编的教材《材料力学》（上、下册）第三版的配套辅导，本书除了有传统习题的解题过程外，主要有以下特点：

1. 知识点窍：运用公式、定理及定义来点明知识点。

2. 逻辑推理：阐述习题的解题过程。

3. 解题过程：概念清晰、步骤完整、数据准确、附图齐全。

把**知识点窍—逻辑推理—解题过程**串起来，做到融会贯通，最后给出书后习题的答案，在解题思路和解题技巧上进行精练分析和引导，巩固所学，达到举一反三的效果。

“知识点窍”和**“逻辑推理”**是本书的精华所在，是由多位著名教授根据学生答题的弱点分析而研究出来的一种新型的拓展思路的训练方法。**“知识点窍”**提纲挈领地抓住了题目核心知识，让学生清楚地了解出题者的意图，而**“逻辑推理”**则注重引导学生思维，旨在培养学生科学的思维方法，及掌握答题的思维技巧。本书在此基础上，还提供了详细的**“解题过程”**，使学生熟悉整个答题的思维技巧。

由于编者水平有限及编写时间仓促，不妥之处在所难免，希望广大读者不吝批评、指正。

编者

2004年2月

目　　录

第十章　能量法

固体力学中，把功与能有关的一些定理统称为能量原理。对构件的变形，及静不定结构的求解，能量原理都有重要作用。变形固体在受外力作用而变形时，引起外力作用点沿力作用方向的位移，外力因此做了功；另一方面，弹性固体因变形而具备了作功的能力，表明储存了变形能。若外力从零开始缓慢地增加到最终值，变形中的每一瞬间固体都处于平衡状态，动能和其他能量的变化皆可不计，则由功能原理可知，固体的变形能 U 在数值上等于外力作的功 W，即 $U = W$。

10.1　内容概要

1. 杆件变形能的计算

(1) 轴向拉伸或压缩

$$U = W = \frac{1}{2}P\Delta l = \frac{P^2 l}{2EA}$$

当沿杆件轴线轴力 N 为变量时，利用上式先求出 dx 微段内的变形能再积分求出杆件的变形能

$$U = \int_l \frac{N^2(x)\,dx}{2EA}$$

拉伸时单位体积的变形能（比能）量

$$U = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon$$

(2) 纯剪切

$$U = \frac{\tau^2}{2\sigma} = \frac{1}{2}\tau\gamma$$

(3) 扭转

$$U = W = \frac{1}{2}m\phi = \frac{m^2 l}{2GI_p}$$

当扭矩 T 沿轴线为变量时，可利用上式先求出微段 dx 内的变形能，然后经积分得整段变形能

$$U = \int_l \frac{T^2(x)\,dx}{2GI_p}$$

(4) 弯曲

$$U = W = \frac{1}{2}m\theta = \frac{m^2 l}{2EI}$$

当弯矩 M 沿轴线为变量时，可利用上式先求出微段 dx 内的变形能，然后经积分得出整段的变形能

$$U = \int_l \frac{M^2(x)}{2EI}dx$$

如果 $M(x)$ 在梁的各段内分别由不同的函数表示，上式积分应分段进行。然后求其总和，以上讨论都是线弹性的情况，对于非线性弹性固体，变形能在数值上仍然等于外力作的功，但力与位移的关系以及应力和应变的关系都不是线性的。

2. 变形能的普通表达式

线弹性的变形能等于每一外力与其相应位移乘积的二分之一的总和，这一结论称为克拉贝依隆原理。

3. 互等定理

(1) 功的互等定理

第一组力在第二组力引起的位移上所作的功，等于第二组力在第一组力引起的位移上所作的功

(2) 位移互等定理

P_1 作用点沿 P_1 方向因作用 P_2 而引起的位移，等于 P_2 作用点沿 P_1 方向因作用 P_1 而引起的位移

4. 卡氏定理

若将结构的变形能 U 表示为载荷 $P_1, P_2, \cdots, P_i, \cdots$ 的函数，则

变形能对任一载荷 P_i 的偶导数，等于 P_i 作用点沿 P_i 方向的位即 δ_i，这就是卡氏第二定理，通常称为卡氏定理，其数学表达式为

$$\frac{\partial U}{\partial P_i}=\delta_i$$

用卡氏定理求结构某处的位移时，该处需要有与所求位移相应的载荷，若没有，则可采取附加方法，最后在求导时，令其等于零。

5. 虚功原理

(1) 外力作用下处于平衡状态的杆件，若因其他原因，例如另外的外力或温度变化等又引起杆件变形，则这种位移称为虚位移。

(2) 虚位移是在平衡位置上再增加的位移，在虚位移中，杆件的原有外力和内力保持不变，且始终是平衡的。

(3) 虚位移应满足边界条件和连续条件，并符合小变形要求

(4) 在虚位移中，外力所作虚功等于内力在相应虚变形上所作虚功，这就是虚功原理。

6. 单位载荷法 莫尔积分

单位载荷法的基本方程可以根据虚功原理导出，所以该方法有时被称为虚功法，也被称为虚载荷法。称为虚功法是因为需要用虚载荷(即单位载荷)。

在单位力作用下某截面上的轴力、剪力、弯矩、扭矩分别为 $\overline{N}(x)$，$\overline{Q}(x)$，$\overline{M}(x)$，$\overline{T}(x)$，该截面在原有外力作用下的位移分别为 $d(\Delta l)$，$d\lambda$，$d\theta$，$d\varphi$，从虚功原理出发，得单位载荷法的基本方程为

$$1\times\Delta=\int\overline{M}(x)\,d(\Delta l)+\int\overline{Q}(x)\,d\lambda+\int\overline{M}(x)\,d\theta+\int\overline{T}(x)\,d\varphi$$

该方程是极为普遍的，不受任何材料或结构是否线性的限制。当结构材料服从胡克定律时，在上式中代入胡克定律，则得到材料为线弹性，且叠加原理成立时，用来求结构任一点处位移的单位载荷法，其广义位移的表达式为

$$\Delta = \int_l \frac{N(x)\overline{N}(x)}{EA}\mathrm{d}x + \int_l \frac{M(x)\overline{M}(x)}{EI}\mathrm{d}x + \int_l \frac{T(x)\overline{T}(x)}{GI_{\mathrm{p}}}\mathrm{d}x + \int_l \frac{kQ(x)\overline{Q}(x)}{GA}\mathrm{d}x$$

由于式中 $\overline{N}(x)$，$\overline{M}(x)$，$\overline{T}(x)$，$\overline{Q}(x)$ 均为由单位载荷引起的内力，故又称为单位载荷法或单位力法。

应当注意，单位载荷法中，$N(x)$，$M(x)$，$T(x)$，$Q(x)$ 是实际载荷作用下的横截面内力，而卡氏定理中 $N(x)$，$M(x)$，$T(x)$，$Q(x)$ 则有可能是实际外力与附加力共同作用下的内力。

单位载荷的施加，要由所求点及位移形式来确定，而截面的相对位移（转角）则要在对应截面施加一对单位力（力偶），具体在例题中详述。

7. 图形互乘法

图形互乘法是莫尔积分在线弹性直杆结构上的应用，是计算莫尔积分的图形解析法，因此不是一种独立的方法。其求解公式为

$$\Delta_{\mathrm{i}} = \sum_k \frac{\omega_N \overline{N}_C}{EA} + \sum_k \frac{\omega_T \overline{T}_C}{GI_{\mathrm{p}}} + \sum_k \frac{\omega_{M_y} \overline{M}_{yC}}{EI_y} + \sum_k \frac{\omega_{Mz} \overline{M}_{zC}}{EI_z}$$

上式中 ω_N，ω_T，ω_{My} 和 ω_{Mz} 分别为相应内力分量的内力图面积，而 $\overline{N}_C$，$\overline{T}_C$，$\overline{M}_{yC}$，$\overline{M}_{zC}$ 分别为内力图形心处对应的单位力产生的内力数值。

图形互乘法仅仅适用于直杆或者分段为直杆的结构，例如直梁、桁架和刚架等。

10.2 经典例题解析

例 10－1 以图 10－1 所示简支梁为例，比较弯曲和剪切两种变形能。设梁的截面为矩形。

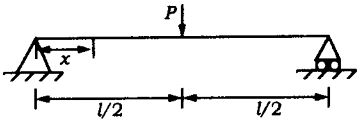


图 10－1

知识点窍　弯曲变形能和剪切变形能。

逻辑推理　弯曲变形能公式为 $U = \int_l \frac{M^2(x)\mathrm{d}x}{2EI}$

剪切变形能公式为 $U = \int_l \frac{kQ(x)}{2GA}\mathrm{d}x$

解题过程　容易求得梁的弯矩和剪力方程为

$$M(x) = \frac{P}{2}x, \quad Q(x) = \frac{P}{2}$$

代入公式得

$$U_1 = 2\int_0^{l/2} \frac{1}{2EI}(\frac{P}{2}x)^2\mathrm{d}x = \frac{P^2l^2}{96EI}$$

$$U_2 = 2\int_0^{l/2} \frac{k}{2GA}(\frac{P}{2})^2\mathrm{d}x = \frac{kP^2l}{8GA}$$

梁的变形能为

$$U = U_1 + U_2 = \frac{P^2l^2}{96EI} + \frac{kP^2l}{8GA}$$

两种变形能之比为

$$U_2 : U_1 = \frac{12EIk}{GAl^2}$$

对矩形截面梁

$$k = \frac{6}{5}, \quad \frac{I}{A} = \frac{h^2}{12}$$

又因为　$G = \frac{E}{2(1+u)}$，所以有

$$U_2 : U_1 = \frac{12}{5}(1+u)(\frac{h}{l})^2$$

可见，只有对短梁才应考虑剪切变形能，对长梁则可忽略不计

例 10 - 2 装有尾顶针的车削工件可简化成静不定梁,如图 10 - 2 所示,试利用互等定理求支座反力

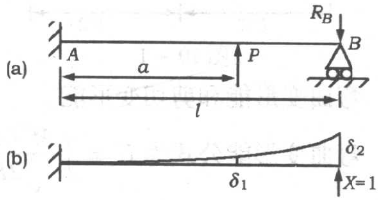


图 10 - 2

知识点窍 功的互等定理。

逻辑推理 功的互等定理为:第一组力在第二组力引起的位移上所作的功,等于第二组力在第一组力引起的位移上所做的功。因此首先要分辨出两组力,然后由各组力在另外一组力引起的位移上所做的功,最后代入公 $P_1\delta'_1 = P_2\delta'_2$ 求解。

解题过程 解除支座 B,把工件看作是悬臂梁。把工件上作用的切削力 P 和尾顶针反力 R_B 作为第一组力。然后,设想在同一悬臂梁的右端作用 $x = 1$ 的单位力(图 10 - 2b))并作为第二组力。在 $x = 1$ 作用下,不难求出 P 及 R_B 作用点的相应位移分别为

$$\delta_1 = \frac{a^2}{6EI}(3l - a), \quad \delta_2 = \frac{l^3}{3EI}$$

第一组力在第二组力引起的位移上所作的功为

$$P\delta_1 - R_B\delta_2 = \frac{Pa^2}{6EI}(3l - a) - \frac{R_B l^3}{3EI}$$

在第一组力作用下(图 10 - 2a),由于右端 B 实际上是铰支座,它沿 $x = 1$ 方向上的位移应等于零,故第二组力在第一组力引起的位移上所作的功为零。

于是由功的互等定理有

$$\frac{Pa^2}{6EI}(3l - a) - \frac{R_B l^3}{3EI} = 0$$

由此解出 $R_B = \dfrac{Pa^2}{2l^3}(3l - a)$

例 10-3 图 10-3(a) 所示刚架的 EI 为常量，在截面 B 上受力偶矩 m 作用。试求截面 C 的转角 θ_C 及 D 点的水平位移 δ_x。设轴力和剪力对变形的影响可忽略不计

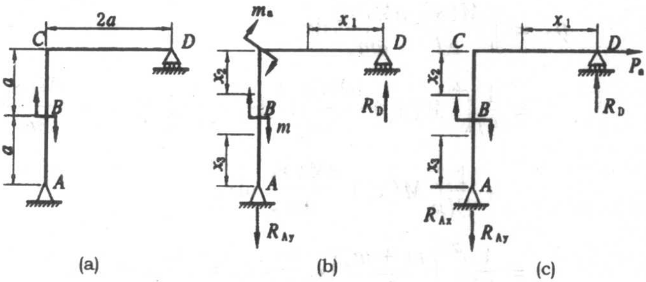


图 10-3

知识点窍 用卡氏定理求变形。

逻辑推理 用卡氏定理求结构某处的位移时，该处需要有与所求位移相应的载荷，如果没有，可采取附加力法，其公式为

$$\theta = \int \frac{M(x)}{EI} \frac{\partial M(x)}{\partial M_a} \mathrm{d}x, \delta = \int \frac{M(x)}{EI} \cdot \frac{\partial M(x)}{\partial P} \mathrm{d}x$$

解题过程 由于在截面 C 上并无力偶，所以不能直接使用卡氏定理。为此，设想在截面 C 上增加一个力偶矩 m_a（图 10-3(b)），m_a 称为附加力偶矩。在刚架截面 C 上增加了 m_a，它当然已经不同于原来的刚架。这时，求出在 m 和 m_a 共同作用下的支座反力

$$R_{Ay} = \frac{m + m_a}{2a}, R_D = \frac{m + m_a}{2a}$$

R_{Ay} 和 R_D 的方向如图 10-3(b) 所示。

求出刚架各段的弯矩方程及其对 m_a 的偏导数分别为

$$CD\text{ 段} \quad M(x_1) = R_D x_1 = \frac{m + m_a}{2a} x_1, \quad \frac{\partial M(x_1)}{\partial m_a} = \frac{x_1}{2a}$$

$$BC\text{ 段} \quad M(x_2) = R_D \times 2a - m_a = m, \quad \frac{\partial M(x_2)}{\partial m_a} = 0$$

AB 段 $\quad M(x_3) = 0, \quad \dfrac{\partial M(x_3)}{\partial m_a} = 0$

于是截面 C 的转角为

$$
\begin{aligned}
\theta_C &= \int_l \frac{M(x)}{EI} \frac{\partial M(x)}{\partial m_a} dx \\
&= \frac{1}{EI}\int_0^{2a} M(x_1) \frac{\partial M(x_1)}{\partial m_a} dx_1 + \frac{1}{EI}\int_0^{a} M(x_2) \frac{\partial M(x_2)}{\partial m_a} dx_2 \\
&\quad + \frac{1}{EI}\int_0^{a} M(x_3) \frac{\partial M(x_3)}{\partial m_a} dx_3 \\
&= \frac{1}{EI}\int_0^{2a} \left(\frac{m + m_a}{2a}\right) x_1 \frac{x_1}{2a} dx_1 = \frac{2a}{3EI}(m + m_a) \qquad (1)
\end{aligned}
$$

这里求出的 θ_C 是刚架在 m 和 m_a 共同作用下，截面 C 的转角。显然无论 m 及 m_a 的数值大小如何，上式所给出的结果都是正确的。所以在式(1) 中若令 $m_a = 0$，就得到刚架只在截面 B 上作用 m 时，截面 C 的转角为

$$
\theta_C = \frac{2ma}{3EI} \qquad (2)
$$

从这里还可看出，在(1) 式中当积分完成后令 $m_a = 0$ 可以求得(2) 式，而在积分之前就使 $m_a = 0$，所得结果仍为(2) 式。所以只有在计算弯矩的偏导数时需要附加力偶矩，以后就可以令其等于零，再进行积分。

计算 D 点的水平位移 δ_x 时，在 D 点沿水平方向增加附加力 P_a(图 10 - 3c)，求出在 m 及 P_a 共同作用下刚架的支座反力为

$$
R_{Ax} = P_a, \quad R_{Ay} = R_D = \frac{m}{2a} + P_a
$$

方向如图所示。求出刚架各段的弯矩方程及其对 P_a 的偏导数分别为

CD 段：$\quad M(x_1) = (\dfrac{m}{2a} + P_a)x_1 \quad \dfrac{\partial m(x_1)}{\partial P_a} = x_1$

CB 段： $M(x_2) = m + Pa(2a - x_2)$， $\dfrac{\partial M(x_2)}{\partial Pa} = 2a - x_2$

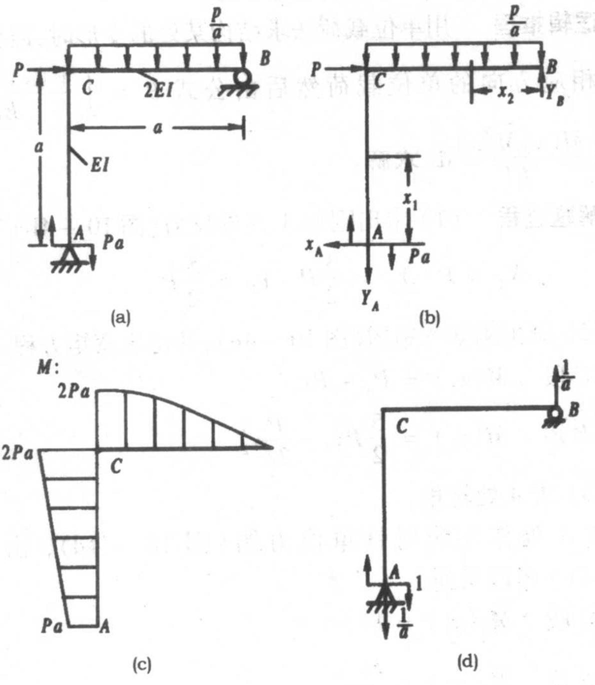
AB 段： $M(x_3) = P_a x_3$， $\dfrac{\partial M(x_3)}{\partial Pa} = x_3$

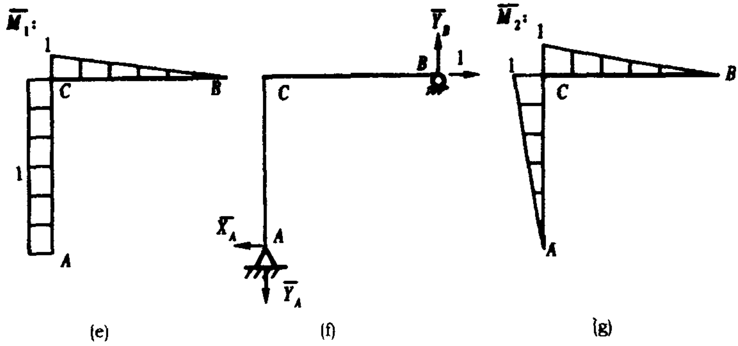
在积分前即令 $Pa = 0$，求得 D 点的水平位移为

$$\delta_x = \frac{1}{EI}\int_0^{2a} \frac{m}{2a}x_1^2 \mathrm{d}x_1 + \frac{1}{EI}\int_0^{a} m(2a - x_2)\mathrm{d}x_2$$

$$= \frac{17ma^2}{6EI}$$

例 10－4　用单位载荷法计算图 10－4(a) 所示刚架 A 处转角 θ_A 及 B 点水平位移 δ_{Bx}。





(e) (f) (g)

图 10－4

知识点窍　用单位载荷法求变形。

逻辑推理　用单位载荷法求结构某处的变形时，需要在该处施加相应方向的单位载荷然后由公式 $\theta = \int \frac{M(x)\overline{M}(x)}{EI}dx$，$\delta = \int \frac{M(x)\overline{M}(x)}{EI}dx$ 求解。

解题过程　(1) 求出刚架 A、B 处反力(图 10－4b)

$$X_A = P \quad Y_A = \frac{3}{2}P \quad Y_B = \frac{5}{2}P$$

(2) 画出刚架弯矩图(图 10－4c)，并得出弯矩方程

AC 段　$M(x_1) = P_a + Px_1$

CB 段　$M(x_2) = \frac{5}{2}Px_2 - \frac{P}{2a}x_2^2$

(3) 求 A 处转角。

在 A 处作用顺时针单位力偶(图 10－4d)，由弯矩图 10－4(e) 可以得到

AC 段　$\overline{M}_1(x_1) = 1$

CB 段　$\overline{M}_1(x_2) = \frac{x_2}{a}$

故 A 处转角

$$\theta_A = \int_{AC} \frac{M(x_1)\overline{M}_1(x_1)}{EI} dx_1 + \int_{CB} \frac{M(x_2)\overline{M}(x_2)}{EI} dx_2 = \frac{89Pa}{48EI}(顺)$$

(4) 求 B 处水平位移

在 B 处作用向右单位力(图 10－4(f)),在单位力作用下,A、B 处约束反力

$$\overline{X}_A = \overline{Y}_A = \overline{Y}_B = 1$$

弯矩图见图 10－4(g),其弯矩方程为

AC 段 $\overline{M}_2(x_1) = x_1$

CB 段 $\overline{M}_2(x_2) = x_2$

故 B 处水平位移

$$\delta_{Bx} = \int_{AC} \frac{M(x_1)\overline{M}_2(x_1)}{EI} dx_1 + \int_{CB} \frac{M(x_2)\overline{M}(x_2)}{EI} dx_2$$

$$= \frac{19Pa^3}{16EI}(\rightarrow)$$

例 10－5 图 10－5 所示为一简单桁架,其各杆的 EA 相等。在图示载荷作用下,试求 A、C 两节点间的相对位移 δ_{AC}

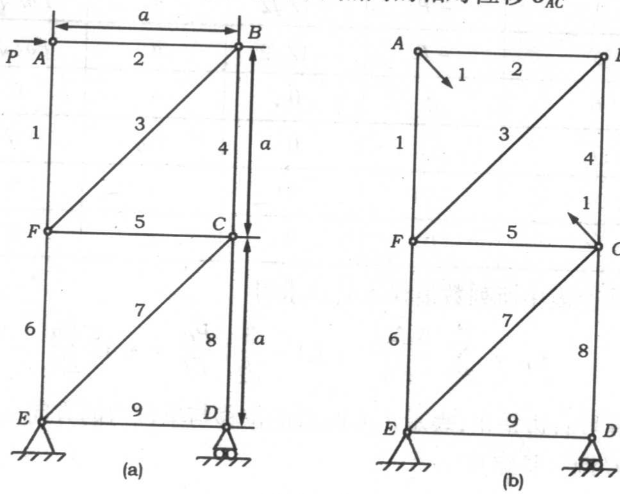


图 10－5

知识点窍 用莫尔积分法求相对位移。