数学分析习题课讲义

（下册）

谢惠民　恽自求
易法槐　钱定边　编

高等教育出版社

数学分析习题课讲义

（下　册）

谢惠民　恽自求
易法槐　钱定边　编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容简介

本书是教育部"国家理科基地创建名牌课程项目"的研究成果，其目的是为数学分析的习题课教学提供一套具有创新特色的教材和参考书.

本书以编著者们近20年来在数学分析及其习题课方面的教学经验为基础，吸取了国内外多种教材和研究性论著中的大量成果，非常注意经典教学内容中的思想、方法和技巧的开拓和延伸，在例题的讲题中强调启发式和逐步深入，在习题的选取中致力于对传统内容的更新、补充与层次化.

本书分上、下两册出版.上册内容为极限理论和一元微积分，下册内容为无穷级数和多元微积分.

本书可作为高等院校理工科教师和学生在数学分析习题课方面的教材或参考书，也可以作为研究生入学考试和其他人员的数学分析辅导书.

图书在版编目(CIP)数据

数学分析习题课讲义. 下册/谢惠民等编. —北京：高等教育出版社，2004.1

ISBN 7-04-012941-8

Ⅰ.数… Ⅱ.谢… Ⅲ.数学分析-高等学校-教材 Ⅳ.017

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第113175号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	北京人卫印刷厂		
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2004年1月第1版
印　　张	26.25	印　　次	2004年7月第2次印刷
字　　数	490 000	定　　价	30.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

策划编辑 王　瑜
责任编辑 薛春玲
封面设计 于　涛
责任印制 宋克学

郑重声明

反盗版举报电话:(010) 58581897/58581896/58581879

传　　真:(010) 82086060

E - mail:dd@hep.com.cn

通信地址:北京市西城区德外大街4号

高等教育出版社打击盗版办公室

邮　　编:100011

附: 下册内容简介

下册的前四章为无穷级数, 后十章为多元微积分. 下面将介绍各章的部分内容. 还请使用书末的两个索引, 从中可查到在目录中不易找到的许多材料.

第十三章为数项级数. 从数学史上的 4 个例子引进无穷级数. 在正项级数中介绍了用级数来判定单调数列是否收敛于 0 的 Sapagof 判别法. 研究了二项式系数 $\binom{\alpha}{n}$ 的渐近性态. 利用无穷乘积证明了正弦函数的无穷乘积展开式, 引进 Γ 函数的无穷乘积定义.

第十四章为函数项级数和幂级数. 对三分法作了详细分析. 介绍了准一致收敛性和 Arzela 控制收敛定理的 Lewin 证明. 证明了每个幂级数一定是 Taylor 级数, 还介绍了正弦和余弦函数之外的基本三角函数的幂级数展开式.

第十五章为 Fourier 级数. §15.1 节为系数的性质. §15.2 节为 Fourier 级数的各种收敛性, 其中包括点收敛、在 Cesàro 意义下的收敛、平方平均收敛与一致收敛, 讨论了 Gibbs 现象, 以及系数单调的正弦级数为 Fourier 级数的充要条件.

第十六章介绍无穷级数的几个应用. 前两节是在积分计算与级数求和中的应用, 其中求出 $\zeta(2n)$ 的值, 并得到 Bernoulli 数的几个性质. §16.3 节集中于 Weierstrass 逼近定理的证明方法及其应用. 介绍了奇异积分方法、Bernstein 证明和 Cohen 证明. §16.4 节是用无穷级数构造具有某些特殊性质的函数.

第十七章为 $\mathbf{R}^n$ 中的点集与实数基本定理的推广. 特别介绍了连通和道路连通的概念, 证明了区域必是道路连通的. 在 §17.2 节介绍 $\mathbf{R}^n$ 中的基本定理, 其中把闭区间套定理推广成比较方便的闭集套定理的形式.

第十八章为多元函数的极限与连续. 除通常对重极限与累次极限的一些讨论外介绍了多元函数连续的若干充分条件, 以集合语言刻画连续性的命题, 紧集上的连续函数性质及其应用, 以及向量值函数的压缩映射原理. 还以参考题的形式介绍了 Peano 曲线和 Tietze 扩张定理.

第十九章为偏导数与全微分. §19.3 节是求多元函数偏导数的链式法则. 在 §19.4 节介绍向量值函数的有限增量公式和拟微分平均值定理.

第二十章为隐函数存在定理与隐函数求导. 在 §20.2 节用压缩映射原理证明了局部逆映射存在定理. 在 §20.3 节对变量代换问题作了系统的讨论. 在 §20.4 节介绍隐函数 (组) 的整体存在性, 包括整体同胚的一些充分条件和充要条件.

第二十一章为偏导数在各个方面的应用. 在 §21.3 节用向量与矩阵语言重新叙述了 Taylor 公式, 并讨论了梯度为零向量时函数的最快增长方向问题 (第二组参考题 1). 在 §21.4 节对条件最值的求解作了系统与详细的讨论, 并收集了丰富的习题. 在 §21.5 节介绍了高维的 Rolle 定理, 这个材料引自**美国数学月刊**上的

论文,可以作为多元微分学应用的一个有趣的例子.

第二十二章为重积分.在二重积分中引入了平面上零面积集和零测度集的概念,给出了 Riemann 可积的充要条件.在重积分的应用中着重介绍了微元法、带重积分的不等式和重积分在不等式证明中的应用.

第二十三章为含参变量积分.对于如何证明含参变量广义积分一致收敛或不一致收敛给出了一个总结.在 §23.3 节中介绍了重要的特殊函数: B 函数和 Γ 函数,对于 Γ 函数还证明了 Bohr-Mollerup 定理和其他几个重要公式.

第二十四章为曲线积分(含 Green 公式).在 §24.2 节中介绍梯度曲线的方法,以此改进了一道美国大学 Putnam 竞赛题的结果,并证明高维中值定理.在 §24.3 节中利用 Green 公式证明了著名的等周不等式.在 §24.4 节中介绍了连续向量场的旋转度并用之证明 Brouwer 不动点定理与代数基本定理.

第二十五章为曲面积分(含 Gauss 公式与 Stokes 公式).在 §25.4 节中介绍了一些外微分的知识. §25.5 节是一个完整的习题课教案,其中证明了第一型曲面积分在正交变换下的不变性;分析了用参数方程计算第二型曲面积分时积分号前正负号的选取法则;证明了在球面上曲面积分的关系式(25.28).

第二十六章为场论初步.引入散度、旋度和 Laplace 算子,分析了各种场之间的关系.对调和函数作了一点初步的介绍.本章是多元积分的综合应用,另一方面也为进一步学习数学物理方程等课程作一些数学分析方面的准备工作.

附: 书中常用记号

为读者方便起见,将下册中常用记号列举如下(参见上册 §1.2 节):

1. $\mathbf{N}_+$ 是所有正整数所成的集合.
2. $\mathbf{R}$ 是所有实数所成的集合,同时也表示区间 $(-\infty,+\infty)$.
3. $\Longleftrightarrow$ 是等价关系的记号.
4. $[x]$ 是实数 x 的整数部分,即不超过 x 的最大整数.
5. $\square$ 表示一个证明或解的结束.
6. $\displaystyle\binom{n}{k}=\mathrm{C}_n^k=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$.
7. 记号 $\approx$ 表示近似值,例如 $\pi\approx 3.141\,592$.
8. 复合函数 $f(g(x))$ 也写成 $(f\circ g)(x)$.
9. 若 A 和 B 为两个集合,则用记号 $A-B$ 或 $A\setminus B$ 表示 A 与 B 的差集,即集合 $\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\notin B\}$.
10. 用 $O_\delta(a)$ 或 $U_\delta(a)$ 表示以 a 为中心,以 $\delta>0$ 为半径的邻域.在一维情况它就是开区间 $(a-\delta,a+\delta)$.如不必指出半径,则可简记为 $O(a)$ 或 $U(a)$.

目　录

第十三章 数项级数

本章是无穷级数理论的第一章. 在 §13.1 节中从无限项求和、部分和数列和广义积分三个角度对无穷级数的基本概念作综述. 在 §13.2 节和 §13.3 节中讲述正项级数和一般项级数的判别法与性质. §13.4 节用于介绍无穷乘积. 最后一节是学习要点和参考题. (有关级数求和的问题将在 §16.2 节集中讨论.)

§13.1 无穷级数的基本概念

13.1.1 无穷级数的多种视角

可以从几个不同角度来理解无穷级数的概念.

一、首先, 无穷级数是有限项求和的直接推广. 下面是数学发展史上的几个重要例子, 其中都涉及无穷级数问题 (参见 [30]).

例题 13.1.1 我国古代重要典籍《庄子》(约公元前 300 年) 一书中有 "**一尺之棰, 日取其半, 万世不竭**". 从数学上看, 这与下列无穷项求和有密切联系:

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots.$$

例题 13.1.2 古希腊伊利亚学派的 Zeno 提出过 4 个著名的悖论, 其中的 Achilles ① 悖论是: Achilles 永远追不上在他前面的一只乌龟, 因为 Achilles 必须首先跑到乌龟的出发点, 而在这段时间中乌龟又已经向前爬过一段距离, 因此仍然在 Archilles 的前面, 这种情况会无休止地继续下去.

若将上面提到的时间记为 t_1, 并继续下去, 问题就变成了计算 $t_1 + t_2 + \cdots$ 的和. 这是一个无穷级数求和问题. 虽然谁都知道 Achilles 一定会赶上乌龟, 而且不难直接计算出所需要的时间, 但是为了驳倒 Zeno 的说法, 就需要有关于无穷级数的概念和工具, 这超出了当时希腊数学的水平 (见下一小节的思考题 1).

例题 13.1.3 古希腊数学家 Archimedes 求得抛物线弓形的面积是同底同高的三角形面积乘以因子 $\frac{4}{3}$. 如图 13.1 所示, 其中作出了经过点 A, B, C 的抛物线弓形和对应的三角形. 由于过抛物线上点 A 的切线平行于直线段 BC, 因此它们符合同底 (BC) 同高 (AD) 的条件. 从图中可以看出在抛物线弓形中去掉上述三角形之后又得到两个较小的抛物线弓形, 于是又可以作出与它们分别同底同

---

① Achilles (阿基里斯) 是荷马史诗《伊利亚特》中的希腊名将, 以快跑著称, 在文中被称为 The great runner. 用无穷级数工具来解决 Zeno 悖论的想法最早来自 Gregory (1647).

高的两个三角形. Archimedes 证明它们的面积之和是第一个三角形面积的 $\frac{1}{4}$, 而且这个过程可以无限继续. 因此就出现了无穷级数的求和问题:

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{4^n}+\cdots=\frac{4}{3}. \tag{13.1}$$

由于当时没有无穷级数的概念和极限理论, Archimedes 在论证中只能使用 Eudoxus 的穷竭法, 否则证明可以简单得多.

例题 13.1.4 我国魏晋时代的数学家刘徽提出用 "割圆术" 来计算圆周率. 他的方法是从计算圆的内接正六边形的面积出发, 然后将内接正多边形的边数成倍增加, 将每次增加的小三角形的面积累加, 以得到越来越精确的圆面积值, 从而求出圆周率 π 的近似值. 刘徽提出: "**割之弥细, 所失弥少, 割之又割以至于不可割, 则与圆合体而无所失矣.**" 这就是说圆面积是一个无穷级数之和 (本题的分析将在本小节末完成).

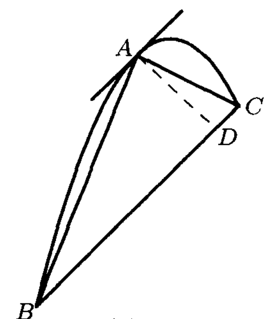

图 13.1

二、其次, 对数列的研究就会导致无穷级数. 在上册中我们已经有意识地这样做了. 在 2.2.3 小节末的注解中 (上册 24~25 页) 引入了**无穷级数**

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots \tag{13.2}$$

的基本概念, 其中包括**通项** a_n, **部分和数列** $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$, $n=1,2,\cdots$. 当部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛时, 称无穷级数 (13.2) **收敛**, 否则称 (13.2) **发散**. 当无穷级数 (13.2) 收敛时, 称极限 $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 为无穷级数 (13.2) 的**和**, 并记为

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots=S.$$

此外, 对于 S 为无穷大量, 即部分和数列 $\{S_n\}$ 有广义极限的情况, 也写为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=S$. 为简明起见, 常将无穷级数简称为**级数**, 有时还将 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 简记为 $\sum a_n$.

对收敛级数来说, 还需要有余项概念. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 则级数 $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}a_k$ 对每个 n 均收敛. 将它的和 R_n 称为收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的第 n 个**余项**. 若将级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的部分和数列记为 $\{S_n\}$, 记级数的和为 S, 则就有 $R_n=S-S_n$, 因此作为数列的余项 $\{R_n\}$ 一定是无穷小量: $\lim\limits_{n\to\infty}R_n=0$.

由级数的定义可见, 从给定的数列 $\{a_n\}$ 出发可以构造一个级数

$$a_1+\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n), \tag{13.3}$$

使得二者同时收敛或发散. 当它们收敛时, 级数 (13.3) 的和 S 就等于数列的极限: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = S$. 今后将会看到, 对于给定的数列构造级数 (13.3) 是研究数列以及计算其极限的一种有用方法.

由于级数与数列的上述联系, 关于级数的不少性质可以从数列的性质直接推出. 首先是级数收敛的必要条件:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 收敛 } \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0, \tag{13.4}$$

其证明见例题 2.2.9. 同时在那里已经指出, 这不是级数收敛的充分条件.

由数列的 Cauchy 收敛准则 (见 §3.4) 就得到**级数的 Cauchy 收敛准则**: 级数 $\sum a_n$ 收敛的充分必要条件是对每个 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得对满足条件 $n > N$ 的正整数和每个正整数 p, 成立不等式

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon. \tag{13.5}$$

注意: 若于 (13.5) 中令 $p = 1$, 就得到收敛级数的必要条件 (13.4). 此外, 例题 3.4.1 和 3.4.2 就是这个收敛准则在无穷级数上的应用.

若级数 $\sum a_n$ 的每一项同号, 则称该级数为**同号级数**. 习惯上称非负项级数为**正项级数**. 显然对同号级数只需研究正项级数就够了. 对于正项级数, 其部分和数列为单调增加数列, 因此就知道: **正项级数收敛的充分必要条件**是其部分和数列有上界.

在上册的内容中已经介绍了几个重要的正项级数. 例如, 已经用多种方法证明**调和级数** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ 发散 (见例题 2.2.6, 3.4.2), 关于 p 次幂的调和级数 (简称为 **p 级数**) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ 的敛散性结论: 当 $p \leqslant 1$ 时发散, 当 $p > 1$ 时收敛 (见 2.2.4 小节的题 10 和 2.3.2 小节的题 6). 在命题 2.5.2 中得到了自然对数的底 e 的无穷级数表示 (命题 2.5.2), 并将它用于 e 的近似计算与无理性证明中.

三、对无穷级数的第三个视角是将它与第十二章的广义积分作比较. 例如, 在级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与无穷限广义积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 的基本概念之间, 存在**离散** $\leftrightarrow$ **连续**的对应关系: $n \leftrightarrow x$, $a_n \leftrightarrow f(x)$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \leftrightarrow \displaystyle\int_a^A f(x)\,\mathrm{d}x$ 和 $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k \leftrightarrow \displaystyle\int_A^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

在敛散性判别方面级数理论为广义积分提供了以下两个工具:

命题 13.1.1 设 f 于 $[a,+\infty)$ 上内闭可积, 则广义积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛的充分必要条件是: 对于发散于正无穷大的每个数列 $\{A_n\} \subset [a,+\infty)$, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_{n-1}}^{A_n} f(x)\,\mathrm{d}x$$

收敛, 其中 $A_0 = a$.

命题 13.1.2 设 f 于 $[a,+\infty)$ 上内闭可积且不变号, 则 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛的充分必要条件是: 存在发散于正无穷大的严格单调增加数列 $\{A_n\}\subset[a,+\infty)$, 使同号级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_{n-1}}^{A_n} f(x)\,\mathrm{d}x$$

收敛, 其中 $A_0 = a$.

注 在例题 12.2.5 中实际上已经用了这个命题. 又已在 12.4.1 小节中指出, 无穷级数的性质 (13.4) 在广义积分中没有简单的平行结果.

现在用级数概念来完成对刘徽割圆术的分析.

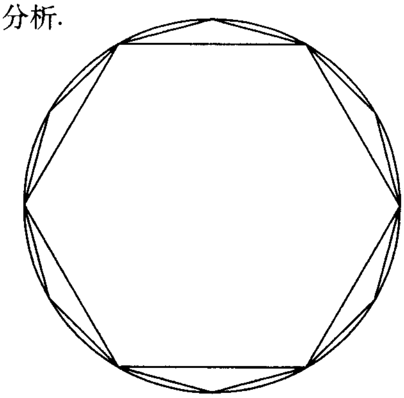

图 13.2

例题 13.1.4 (**续**) 考虑刘徽对半径为 1 的圆面积计算. 从内接正 6 边形开始, 每次边数加倍, 第 n 次的正多边形边数为 $6\cdot 2^{n-1}$, 其面积为

$$S_n = 3\cdot 2^{n-1}\sin\frac{\pi}{3\cdot 2^{n-1}}.$$

从 $\sin x\sim x\ (x\to 0)$ 可见

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \pi.$$

以 $\{S_n\}$ 为部分和数列的无穷级数是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, 其中 $a_n = S_n - S_{n-1}$ (设 $S_0 = 0$). 刘徽的方法就是将 a_n 累加以得到级数和 π 的近似值. 在图 13.2 中的正六边形的面积为 $S_1 = a_1$, 而在其每条边上的 6 个小三角形面积之和就是 $a_2 = S_2 - S_1$.

现在分析级数通项的渐近性态: 为方便起见令 $x_n = 3\cdot 2^{n-1}$, 则有

$$\begin{aligned}a_n = S_n - S_{n-1} &= x_n\left(\sin\frac{\pi}{x_n} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{x_n}\right)\\ &= x_n\sin\frac{\pi}{x_n}\left(1-\cos\frac{\pi}{x_n}\right)\\ &\sim \frac{\pi^3}{2}\cdot\frac{1}{x_n^2} = \frac{2\pi^3}{9}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n,\end{aligned}\tag{13.6}$$

因此刘徽的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 在渐近性态上相当于公比为 $\dfrac{1}{4}$ 的几何级数.

类似地可以分析每次计算后的误差, 这就是级数的余项:

$$\varepsilon_n = S - S_n = \pi\left(1-\frac{\sin\dfrac{\pi}{x_n}}{\dfrac{\pi}{x_n}}\right)\sim\frac{\pi^3}{6}\cdot\frac{1}{x_n^2}.\tag{13.7}$$