成人高校教学研究丛书

电大数学辅导课教案精选

苏步青题

微积分

（上册）

郭星英
张旭辉　主编
葛振三

广西人民出版社

成人高校教学研究丛书

电大数学辅导课教案精选

微　积　分

（上册）

郭星英　张旭辉　葛振三　　主编

刘维翰　　主审

成人高校教学研究丛书

电大数学辅导课教案精选
微积分（上册）

郭星英　张旭辉　葛振三　　主编
刘维翰　主审

☆

广西人民出版社出版
（南宁市河堤路14号）
广西新华书店发行　广西大学印刷厂印刷

开本787×1092　1/32　　印张10.125　　字数222,500
1987年12月第1版　1987年12月第1次印刷
印　数1—10,000册
书号：7113·830　　定价：2.05元
ISBN　7-219-00426-5
O·5

内 容 简 介

本书共四章。包括函数、极限与连续、导数与微分、中值定理及导数的应用。共有18个教案，4个教学意见，两份阶段复习检查题，两份期末复习自测题。

本书教案与中央电视主讲课配套。内容编排严谨、科学，重点突出，脉络清楚，文字叙述通俗。教学意见指导明确，讲授、复习与自学参考资料完整。

本书可提供电大及各类成人高校数学教师探讨教学法及撰写教案时使用，亦是学员复习及广大业余学习者无师自学的一本指导用书。也可提供普通高校师生参考使用。

《电大教学辅导课教案精选》编委

序

为了帮助成人高校学生及广大业余自学者学好高等数学，进一步提高成人数学教学质量，在交流总结各地分校数学辅导课成功经验的基础上，精选各地辅导课的最佳教案，按照成人教育各科教学大纲的要求，加工整理汇编成一套系统的《电大数学辅导课教案精选》丛书。本丛书目前共分“高等数学”（上、下），“微积分”（上、下），工科用的“工程数学”（一、二），经济类用的“数理统计”及“线性代数与线性规划”等八册。每册包含教案约20个，每一教案详细介绍教学目的、教材重点、教学难点的处理、范例分析、巩固练习题、小结、课外思考题、预习内容等。各章之后附教学意见，分别阐明学习本章所需之基础知识，教学与学习注意事项，可供选择的讲授例题，复习套题及期末复习自测题，考虑周到，论述详尽。集中体现了中央电大和全国二十余省、市、自治区许多优秀数学教师的教学经验与辛勤劳动之硕果，实为一套不可多得的教学参考书与自学指导书。本丛书的出版，必将大大有益于成人数学的执教者和广大业余的自学者，深刻理解有关课程的内容与方法，有力地促进我国成人教育发展和提高。值此丛书付梓前夕，乐为推荐如上。

上海师范大学数学系教授

应 制 夷

一九八七年七月

目　录

第一章　函　数

教　案　一

柴全战（辽宁）

课题　函数概念、经济中常用的函数

教学目的

通过本课学习，使学生加深对函数概念的理解；熟记经济中常用的八种函数的一般形式及其内在联系，能熟练地建立较简单的经济应用问题的函数关系，为今后解决经济现象中的极值问题打下基础。

重点

（1）　函数概念，求函数的定义域和函数值。

（2）　经济中常用的函数。

难点　对于实际的经济问题建立函数关系。

教学方法　提问与重点讲授相结合。

教学过程

一、电视课内容归纳

1. 函数概念

请回答下列问题：

问题 1　在某过程中有两个变量，其中一个量 x 变，另一个量 y 也变，那么变量 y 是变量 x 的函数，此话对吗?

答　不对。根据函数定义，对于变量 x 的变化范围 D 中的每一个 x 值，按照某一对应规律 f，都有变量 y 的唯一确定的值与之对应，才称变量 y 为变量 x 的函数。变量 x 变，变量 y 也变，并没有说明 y 是如何随 x 的变化而变化，也没有说明每给 x 一个值，就有唯一的 y 的值与之对应，因此还不能说 y 是 x 的函数。

问题 2　一个函数可以由哪些要素唯一确定。

答　任一函数，都可由其定义域 D 和对应关系 f 这两个要素唯一确定。有的教材讲，确定函数有三个要素：定义域、对应关系和值域。实际上，只要定义域和对应关系确定了，值域也就随之确定了。

问题 3　函数的定义域、对应关系和值域中的任意两个因素，是否可将函数唯一确定呢?

答　不一定。例如 $y=\sin x$ 与 $y=\cos x$，它们的定义域相同，值域也相同，但对应关系不同，它们不是同一个函数。

问题 4　如果 y 是 x 的函数 $y=f(x)$，是否 y 与 x 之间的关系只能用一个解析式子表示?

答　不一定。表示函数的方法有：公式法、图示法和列表法。即使对于公式法，也不一定必须用一个解析式子表示，如分段函数

$$y=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$$

y 与 x 之间的对应关系是分别用三个式子表示的。但要注意，分段函数仍是一个函数。

2．经济中常用的函数

（1） 总成本函数

总成本＝可变成本＋固定成本

即 $C(q)=C_1(q)+C_0$

其中 q：产量；$C(q)$：总成本；$C_1(q)$：可变成本；C_0：固定成本。

固定成本 C_0 与产量 q 无关，在产品生产过程中，它是一个常量。可变成本 C_1 与产量 q 有关，当产量 q 增大时，C_1 也增大。因此总成本 C 是产量 q 的函数，随产量 q 的增大而增大。当产量 $q=0$ 时，总成本就是固定成本。

（2） 价格函数

消费者在一定的价格条件下对某种商品的需要称为需求。一般说来，商品的价格与需求量有关，需求量增加时，价格下降；需求量减少时，价格上升，价格是需求量的函数。设 q 为需求量，p 为价格，则

$$p=p(q)$$

（3） 需求函数

需求量 q 与商品的价格 p 之间存在一定的依存关系。设 p 为自变量，q 为因变量，则 q 为 p 的函数 $q=q(p)$

一般地，需求量随价格的提高而减少。当 $p=0$ 时的需求量为最大需求。

（4） 供应函数

供给是指在某一时期内，生产者在一定的价格条件下，愿意并可能出售的产品。供给量 q 与价格 p 之间存在着函

数关系。设 p为自变量，q 为因变量，则供给量 q 可表示为价格 p 的函数　　$q=f(p)$

上面的函数称为供给函数。一般地，当商品的价格 p 提高时，供给量 q 将增加，这是因为价格越高，生产者越愿意向市场多提供产品。

（5）　收益函数

收益$R=$价格 $p\times$销售量 q

若销售量 q 是价格 p 的函数　$q=q(p)$，则 $R=p\cdot q(p)$

若价格 p 是销售量 q 的函数　$p=p(q)$，则 $R=p(q)\cdot q=R(q)$，即收益可表示为销售量的函数。当 $q=0$ 时，$R=0$，即未销售商品时，总收益的值为0。

（6）　利润函数

利润$L=$收益$R-$成本C

由于收益R与成本C都是产量 q 的函数，因此利润 L 也是产量 q 的函数，即

$$L(q)=R(q)-C(q)$$

如果当 $q=q_0$时，$R(q)=C(q)$，称 q_0 为损益分歧点。一般地，$q>q_0$时，盈利；$q<q_0$ 时，亏损。当 $q=0$ 时，$L(0)=R(0)-C(0)=-C_0$，这里C_0是固定成本。第四章将研究最大利润问题。

（7）　平均成本函数

平均成本函数　　$AC=\dfrac{C(q)}{q}$　　（$q>0$）

其中　q 为产量，$C(q)$ 为总成本。生产者关心的是产量为何值时，平均成本最低。这个问题也将在第四章得到解

决.

（8） 库存问题

我们所研究的库存问题是指“均匀消耗、批量进货、不许缺货”的数学模型．设

Q：计划期内的总需求量．

a：每批进货（生产准备）费．

b：计划期内单位商品的库存费．

x：批量，即每批数量．

则 总费用 E = 进货（生产准备）费 + 库存费

$$\begin{aligned}&= \text{批次} \times a + \text{平均库存量} \times b\\&= \frac{Q}{x} \cdot a + \frac{x}{2} \cdot b\\&= \frac{aQ}{x} + \frac{b}{2}x\end{aligned}$$

注意：由于库存问题的特点，仓库中所存贮的商品的数量应以平均库存量计算，而平均库存量是批量的一半．库存问题存在总费用最低的问题，这也是第四章所解决的内容．

二、例题分析

例 1 求下列函数的定义域

（1） $y=\sqrt{\dfrac{x-2}{x+2}}+\lg(9-x^2)$

（2） $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}+\dfrac{1}{x(x-1)}$

分析 （1） $y=\sqrt{\dfrac{x-2}{x+2}}+\lg(9-x^2)$由$\sqrt{\dfrac{x-2}{x+2}}$与$\lg(9-x^2)$两项构成，因此定义域是这两项定义域的公共部分．第一项$\sqrt{\dfrac{x-2}{x+2}}$，需要根号里的分式$\dfrac{x-2}{x+2}\geqslant 0$，且分母$x+2\neq 0$；第二项$\lg(9-x^2)$，需要真数$9-x^2>0$．

（2） 函数的表达式由两项组成，因此定义域是这两项定义域的公共部分。第一项，反正弦符号下的式子的绝对值应不超过1；第二项$\dfrac{1}{x(x-1)}$，分母不能为零．

解 （1） 由 $\dfrac{x-2}{x+2}\geqslant 0$ 且 $x+2\neq 0$ $\Rightarrow$

$$\begin{cases}x-2\geqslant 0\\x+2>0\end{cases} \text{或} \begin{cases}x-2\leqslant 0\\x+2<0\end{cases} \Rightarrow x\geqslant 2 \text{ 或 } x<-2.$$

由$9-x^2>0 \Rightarrow x^2<9 \Rightarrow |x|<3$，即 $-3<x<3$.

故定义域为 $-3<x<-2$ 或 $2\leqslant x<3$

即 $D(f)$： $(-3,-2)\cup[2,3)$

（2） 由 $\left|\dfrac{x-1}{2}\right|\leqslant 1 \Rightarrow -2\leqslant x-1\leqslant 2 \Rightarrow -1\leqslant x\leqslant 3$．由 $x(x-1)\neq 0 \Rightarrow x\neq 0$ 且 $x\neq 1$，

故定义域为

$-1\leqslant x<0$ 或 $0<x<1$ 或 $1<x\leqslant 3$

即

$D(f)$：$[-1,0)\cup(0,1)\cup(1,3]$

例 2 设 $f(x)=2^x$，$g(x)=x^2$，求 $f(0)$，$f\left(\frac{1}{x-1}\right)$，$f[g(x)]$，$g[f(x)]$.

分析 函数 $f(x)=2^x$ 的函数关系是 $f(\ )=2^{(\ )}$，等号左端的括号内是什么，相应地右端的括号内就填什么。$f(x)$是函数，$f(0)$是函数在 $x=0$ 处的值.

解 $f(0)=2^0=1$；$f\left(\frac{1}{x-1}\right)=2^{\frac{1}{x-1}}$；

$f[g(x)]=2^{g(x)}=2^{x^2}$；

$g[f(x)]=[f(x)]^2=(2^x)^2=2^{2x}$.

注意：$2^{x^2}\neq 2^{2x}$，而 $2^{2x}=4^x$.

例 3 设函数

$$f(x)=\begin{cases}1-x, & x\leqslant 1\\ x^2, & x>1\end{cases}$$

求：（1）定义域 （2） $f(0)$，$f(1)$，$f[f(0)]$，$f[f(-1)]$.

分析 分段函数的定义域是各段定义域的并集. 求分段函数在某点的函数值，应视该点属于 $x\leqslant 1$，还是属于 $x>1$. 若属于 $x>1$，就将该点代入 x^2，求函数值；若该点属于 $x\leqslant 1$，则代入 $1-x$ 求函数值. 如计算 $f(1)$时，由于 $x=1\in(-\infty,1]$，因此应将 $x=1$ 代入表达式 $f(x)=1-x$ 中，就可以求出 $f(1)$.

解 （1） 定义域 $D(f)$：$(-\infty,1]\cup(1,+\infty)$，即 $(-\infty,+\infty)$.

（2） $f(0)=1-x|_{x=0}=1-0=1$； $f(1)=1-x|_{x=1}=1-1=0$；由于 $f(0)=1$，因此 $f[f(0)]=f(1)=0$； 由于 $f(-1)=1-x|_{x=-1}=1-(-1)=2$，而 $2\in(1,+\infty)$，因此 $f[f(-1)]=f(2)=x^2|_{x=2}=4$。

例4 设某厂生产某种产品的固定成本为4900，可变成本是产量的二次函数，当产量为0、2、4时，可变成本为0、17、36，如果价格 p 是需求量 x 的函数 $p=157-\frac{3}{4}x$，并且假定产品可以全部销售，求利润函数。

分析 由于假定产品可以全部销售，因此产量就是需求量 x。利润函数＝收益函数－总成本函数，若求利润函数，需先求出收益函数和总成本函数。收益＝价格×产量，而价格函数 $p=157-\frac{3}{4}x$，因此收益 $R=(157-\frac{3}{4}x)\cdot x$。本题给出了固定成本，但可变成本没有明确给出，需要根据题给条件求出可变成本。根据题设，可变成本可表示为产量的二次函数，即 $C_1(x)=ax^2+bx+d$，利用产量 $x=0$，2，4时，$C_1(x)=0$、17、36，可建立方程组确定系数 a，b，d，进而可确定可变成本 $C_1(x)$。

解 设产量为 x。先求总收益函数。 $R(x)=p\cdot x=(157-\frac{3}{4}x)\cdot x=157x-\frac{3}{4}x^2$。再求总成本函数 $C(x)$。由于总成本 $C(x)$＝可变成本 $C_1(x)$＋固定成本 C_0，$C_0=4900$，而可变成本 $C_1(x)$ 是变量 x 的二次函数，因此设 $C_1(x)=ax^2+bx+d$，利用题设条件 $x=0$，2，4时，

$C_1(x)=0$，17，36，可得线性方程组

$$\begin{cases} a\cdot 0^2+b\cdot 0+d=0 \\ a\cdot 2^2+b\cdot 2+d=17 \\ a\cdot 4^2+b\cdot 4+d=36 \end{cases} \Rightarrow a=\frac{1}{4},\ b=8,\ d=0$$

因此可变成本 $C_1(x)=\frac{1}{4}x^2+8x$。

总成本 $C(x)=C_1(x)+C_0=\frac{1}{4}x^2+8x+4900$

利润函数

$$\begin{aligned} L(x)&=R(x)-C(x) \\ &=\left(157x-\frac{3}{4}x^2\right)-\left(\frac{1}{4}x^2+8x+4900\right) \\ &=-x^2+149x-4900 \qquad (x\geqslant 0) \end{aligned}$$

例 5 某厂生产电冰箱，年产量1000台，每台成本800元，每季度每台电冰箱的库存费是成本的5%；若分批生产，每批生产准备费5000元，试把全年的库存费与生产准备费的和E表示为批量x的函数。

分析 这是一个库存函数，它的模式是：总费用＝总的生产准备费＋总的库存费，因此要分别求出这两种费用；由题设可知一年的生产批数为$\frac{1000}{x}$，故年生产准备费为$\frac{1000}{x}\cdot 5000$（元）；又由题设可知每台季度的库存费为$800\times 5\%=40$（元），故每台年库存费为$40\times 4=160$（元），由于分期分批生产，一般库存量按$\frac{x}{2}$计算，故年总的库存费为：$800\times 5\%\times 40\cdot\frac{x}{2}$（元）。