

国家级骨干教师通解

中学教材

创新

红本



讲解

主编 洪鸣远

高一数学 (上)

吉林人民出版社

总策划：龍門書局



中学教材

创新 红本 讲解

高一数学 (上)

本册编者：尹彦普

吉林人民出版社

(吉)新登字 01 号

严查盗版,奖励举报 (010)68001964

举报(订货)热线: (010)68001963

中学教材创新讲解·高一数学(上)

责任编辑 关铁宁
责任校对 陈洁美

封面设计 孙明晓
版式设计 洪 铭

出版者 吉林人民出版社(中国·长春人民大街 4646 号 邮编:130021)
网 址 www.jlpph.com
发 行 者 各地新华书店
制 版 北京佳佳图文制作中心
印 刷 者 河北衡水蓝天印刷有限责任公司

开 本 880 × 1230 1/32
印 张 9.25
字 数 306 千字
版 次 2004 年 5 月第 2 版第 1 次印刷
印 数 00001 - 30100

标准书号 ISBN 7 - 206 - 04248 - 4/G·1357
定 价 11.50 元

如图书有印装质量问题,请与承印工厂调换。

再版前言

《中学教材创新讲解》又重新修订、出版了。

感谢全国各地广大师生一年来对本丛书的关注和厚爱。大量的读者来信使我们充满信心，许多极富创意的良言善策也是我们改进、提高本书的有效捷径。2004年《中学教材创新讲解》在秉承讲深、讲细，以全面解读教材的基础上，加入了适量的分层递进式配套练习题，便于学生边学边练，随时巩固。修订后的丛书具有以下特点：

同步 以课(节)为单位编写，严格依照课本的章节顺序，逐字、逐句、逐图、逐表、逐题地全面透视和深度解析教材。着力体现对教材的辅导与教师的授课进度同步、与学生的学习节奏同步、与中学测验考试同步，充分体现了对学生全程学习的关爱、帮助与精心呵护。

全面 通过对教材面的聚焦、点的展开，全面实现教材知识间的左右贯通，前后纵横，既高屋建瓴，又细致入微。其重点是：对教材线索脉络的梳理，对知识概念的阐释与运用，对知识间内涵本质的挖掘与联系，对各学科、各知识点学习方法的培养和引导。确保学生能关注的各知识点无遗漏。

创新 以人为本，以学为本，以学生的发展为本；充分体现新一轮中、高考改革精神，注重学生学科综合能力的培养与提高。依据新教材、提供新材料、开启新视野、引发新思路，激活学生的灵感，开发学生的潜能。思路新、栏目新、材料新。

权威 丛书各科均由国家级、省级骨干教师领衔主笔，强强联合，精英聚会。名师对教材内在精神

领会深,重点、难点摸得准,讲解有奇招、指导针对性强。他们的讲解直指学生学习的疑问点、易忘点、错解点,颇有独到之处,令教师、学生心领神会、心到神知。

本丛书在修订过程中,得到全国各地诸多教研室、学校及广大师生的帮助,在此一并致谢。尽管我们从策划到编写极尽努力,但书中可能仍有一些不足之处,望广大读者继续批评指正。

主编:洪鸣远

目 录

mu lu

第一章 集合与简易逻辑	1
一 集合	1
1.1 集合	1
1.2 子集、全集、补集	9
1.3 交集、并集	15
1.4 含绝对值的不等式解法	24
1.5 一元二次不等式解法	34
二 简易逻辑	49
1.6 逻辑联结词	49
1.7~1.8 四种命题 充分条件与必要条件	56
本章总结	68
本章检测	71
第二章 函数	76
一 函数	76
2.1~2.2 函数、函数的表示法	76
2.3 函数的单调性	94
2.4 反函数	106
二 指数与指数函数	117
2.5 指 数	117
2.6 指数函数	124
三 对数与对数函数	135

2.7 对数	135
2.8 对数函数	142
2.9 函数的应用举例	152
本章总结	168
本章检测	176
期中检测	181
第三章 数列	186
3.1 数列	186
3.2 等差数列	199
3.3 等差数列的前 n 项和	212
3.4 等比数列	226
3.5 等比数列的前 n 项和	240
研究性学习课题:数列在分期付款中的应用	256
本章总结	269
本章检测	275
期末检测	281

第一章 集合与简易逻辑

一 集 合

1.1 集 合

1. 集合与元素——在课堂上要记住它们的定义并明确二者的关系.
2. 常用数集及其专用记号——记牢.
3. 集合中元素的三个特性——不仅要透彻理解,而且要灵活运用它们解题.
4. 集合的分类及表示方法——要记住三种表示方法并能针对不同的问题选择合适的表示法,有时要注意它们之间的相互转化.

教 材 全 解

知识点 1:集合

某些指定的对象集在一起就成为一个集合,也简称集.集合理论的创始人康托尔称集合为一些确定的不同的东西的总体.集合是数学中的原始概念,就像几何中的点、线、面等概念一样,不加定义,只作描述性说明.集合常用大写的拉丁字母 A, B, C, \dots 表示.

知识点 2:集合的元素

集合中的每个对象叫做这个集合的元素.集合中的元素常用小写的拉丁字母 a, b, c, \dots 表示.

知识点 3:元素与集合间的关系

如果 a 是集合 A 的元素,就说 a 属于集合 A ,记作 $a \in A$,读作 a 属于集合 A ;如果 a 不是集合 A 的元素,就说 a 不属于集合 A ,记作 $a \notin A$,读作 a 不属于集合 A .

提醒 (1) $a \in A$ 与 $a \notin A$ 取决于 a 是不是集合 A 中的元素.对于任何 a 与 A ,在 $a \in A$ 与 $a \notin A$ 这两种情况中必有一种且只有一种成立.

(2) 符号“ \in ”、“ \notin ”是表示元素与集合之间的关系的,别无它用,请大家要记住了!

知识点 4:集合的分类与几种常见的数集

(1) 含有有限个元素的集合叫做有限集;

(2) 含有无限个元素的集合叫做无限集;

(3) 不含任何元素的集合叫做空集. 例如, 方程 $x^2 + 1 = 0$ 在实数范围内解的集合就为空集, 空集记作 \emptyset ;

为了书写的方便, 我们规定常见的数集用特定的字母表示, 下面是几种常见数集的记法, 请大家记住.

(4) 全体非负整数的集合简称非负整数集(或自然数集), 记作 \mathbf{N} ;

(5) 非负整数集内排除 0 的集合, 简称正整数集, 记作 \mathbf{N}^* (或 \mathbf{N}_+);

(6) 全体整数的集合简称为整数集, 记作 \mathbf{Z} ;

(7) 全体有理数的集合简称为有理数集, 记作 \mathbf{Q} ;

(8) 全体实数的集合简称为实数集, 记作 \mathbf{R} .

知识点 5: 集合中元素的特性

► 重点

(1) 确定性. 设 A 是一个给定的集合, a 是某一具体对象, 则 a 或者是 A 的元素, 或者不是 A 的元素, 两种情况必有一种且只有一种成立;

(2) 互异性. 集合中的元素必须是互异的, 也就是说, 对于一个给定的集合, 它的任何两个元素都是不同的;

(3) 无序性. 集合与其中元素的排列次序无关, 如集合 $\{a, b\}$ 与 $\{b, a\}$ 是同一集合.

知识点 6: 集合的表示方法

► 难点

(1) 列举法

把集合中的元素一一列举出来, 写在大括号内表示集合的方法.

提醒 (1) 元素间用分隔号“,”;

(2) 元素不重复不遗漏;

(3) 元素可无顺序;

(4) 对于含较多元素的集合, 如果构成该集合的元素有明显规律, 可用列举法.

(2) 描述法

把集合中的元素的公共属性描述出来, 写在大括号内表示集合的方法. 它的一般形式是 $\{x | p(x)\}$, 其中 x 为代表元素, $p(x)$ 是集合中元素 x 所具有的特征性质.

提醒 使用描述法时:

(1) 写清楚该集合中元素的代号;

(2) 说明该集合中元素的性质;

(3) 不能出现未被说明的字母;

(4) 多层描述时, 要准确使用好“且”、“或”等字眼;

(5) 所有描述的内容都要写在集合符号内;

(6) 用于描述的语句或符号力求简洁、准确.

(3) 图示法

为了形象地表示集合, 有时常画一条封闭的曲线, 用它的内部来表示一个集合.

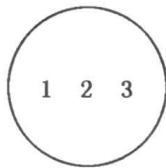


图 1-1-1

例如,如图 1-1-1 表示集合 $\{1,2,3\}$.

解题能力培养 / 基础篇

例 1 下列各组对象能构成集合的是 _____

(1)正三角形的全体;(2)充分接近于零的实数的全体;(3)血压很高的人;(4)“奥运会中的比赛项目”;(5)所有不大于 3,且不小于 0 的整数”.

[解] “充分接近”、“很高”均无明确的标准,无法确切地辨别某个对象是或不是这个范畴的标准,因此构不成集合.而(1)、(4)、(5)都有明确的确定的对象,故可构成集合.

例 2 用列举法表示下列集合

(1) $A = \{(x, y) | x + y = 6, x \in \mathbf{N}, y \in \mathbf{N}\}$

(2)若 a, b, c 均不为零, A 的元素为:

$\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|} + \frac{abc}{|abc|}$ 的值.

[解析] (1)二元一次方程 $x + y = 6$ 有无穷多解,因为 $x \in \mathbf{N}, y \in \mathbf{N}$,所以 $y = 6 - x$,

当 $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ 时, $y = 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0$,故

$A = \{(0, 6), (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1), (6, 0)\}$.

(2)若 a, b, c 三数中三个都小于 0,则结果为 -4 ;

若一正二负,则结果为 0;

若二正一负,则结果为 0;

若三正,则结果为 4.

[解] (1) $A = \{(0, 6), (1, 5), (2, 4), (3, 4), (4, 2), (5, 1), (6, 0)\}$;

(2) $A = \{-4, 0, 4\}$.

例 3 用符号 \in 或 \notin 填空

(1) $2\sqrt{5}$ _____ $\{x | x < \sqrt{19}\}$, $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ _____ $\{x | x \leq 2 + \sqrt{3}\}$;

(2) 3 _____ $\{x | x = n^2 + 1, n \in \mathbf{N}\}$, 5 _____ $\{x | x = n^2 + 1, n \in \mathbf{N}\}$.

[解] (1) $\because 2\sqrt{5} = \sqrt{20} > \sqrt{19}$, $\therefore 2\sqrt{5} \notin \{x | x < \sqrt{19}\}$;

$\because (\sqrt{2} + \sqrt{5})^2 = 7 + 2\sqrt{10} = 7 + \sqrt{40} < 7 + \sqrt{48} = 7 + 4\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^2$,

$\therefore \sqrt{2} + \sqrt{5} < 2 + \sqrt{3}$.

故 $\sqrt{2} + \sqrt{5} \in \{x | x \leq 2 + \sqrt{3}\}$;

(2) 令 $n^2 + 1 = 3$, 得

$n = \pm\sqrt{2} \notin \mathbf{N}$;

令 $n^2 + 1 = 5$, 得

$$n = \pm 2, \pm 2 \in \mathbf{N},$$

故填 \neq, \in .

【点拨】 确定元素是否在集合中,要根据元素是否满足代表元素所适合的条件来判定.

例 4 已知 $A = \{a - 3, 2a - 1, a^2 + 1\}$, 其中 $a \in \mathbf{R}$,

- (1) 若 $-3 \in A$, 求实数 a 的值;
 (2) 当 a 为何值时, 集合 A 的表示不正确.

【解】 (1) 显然 $-3 \neq a^2 + 1, \therefore -3 = a - 3$ 或 $-3 = 2a - 1$

解得 $a = 0$ 或 $a = -1$;

(2) 当三个元素之间出现两个或两个以上的元素相等的情况时, A 的表示不正确; 由于 $a \in \mathbf{R}$

\therefore 当 $a = -2$ 时, A 的表示不正确.

【点拨】 解(2)时充分利用集合元素的互异性.

综合创新与应用 / 提高篇

【综合思维培养】

集合与简易逻辑是高中数学的基础内容之一,在高考中大多是与“集合”这一部分的内容知识综合.

例 5 设集合 $A = \{x \mid x = 2k, k \in \mathbf{Z}\}, B = \{x \mid x = 2k + 1, k \in \mathbf{Z}\}, C = \{x \mid x = 4k + 1, k \in \mathbf{Z}\}$, 又有 $a \in A, b \in B$, 试判断 $a + b$ 与 A, B, C 的关系.

【解】 $\because a \in A, \therefore a = 2k_1 (k_1 \in \mathbf{Z}),$

又 $\because b \in B, \therefore b = 2k_2 + 1 (k_2 \in \mathbf{Z}). \therefore a + b = 2(k_1 + k_2) + 1$

又 $\because k_1 + k_2 \in \mathbf{Z}, \therefore a + b$ 为奇数

$\therefore a + b \in B, a + b \notin A.$

当 $k_1 + k_2$ 为偶数时, $a + b \in C$;

当 $k_1 + k_2$ 为奇数时, $a + b \notin C.$

例 6 设 A 是数集, 且满足条件: 若 $a \in A, a \neq 1$, 则 $\frac{1}{1-a} \in A.$

- (1) 若 $2 \in A$, 则 A 中必还有另外两个元素;
 (2) 集合 A 不可能是单元素集;
 (3) 集合 A 中至少有三个不同元素.

【解】 由 $a \in A, a \neq 1$, 则 $\frac{1}{1-a} \in A.$

(1) 若 $2 \in A$, 则 $\frac{1}{1-2} = -1 \in A$, 于是 $\frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2} \in A$

故集合 A 中还有 $-1, \frac{1}{2}$ 两个元素.

(2) 若 A 为单元素集, 则 $a = \frac{1}{1-a}$,

即 $a^2 - a + 1 = 0$ 方程无实数解, $\therefore a \neq \frac{1}{1-a}$.

$\therefore a$ 与 $\frac{1}{1-a}$ 都为集合 A 的元素, 则 A 不是单元素集.

(3) 由已知, $a \in A \Rightarrow \frac{1}{1-a} \in A \Rightarrow \frac{1}{1-\frac{1}{1-a}} \in A$

即 $\frac{1-a}{-a} \in A$. 现只需证明 $a, \frac{1}{1-a}, \frac{1-a}{-a}$ 三数互不相等, ①若 $a = \frac{1}{1-a} \Rightarrow a^2 - a + 1 = 0$, 此方程无解, $\therefore a \neq \frac{1}{1-a}$;

②若 $a = \frac{1-a}{-a}$ 则 $a^2 - a + 1 = 0$, 方程无解; $\therefore a \neq \frac{1-a}{-a}$;

③若 $\frac{1}{1-a} = \frac{1-a}{-a}$ 则 $a^2 - a + 1 = 0$, 方程无解, $\therefore \frac{1}{1-a} \neq \frac{1-a}{-a}$, 故集合 A 中至少有三个元素.

【点拨】 解此题的关键在于会应用集合中元素的互异性. 由已知 $a \in A$, 则 $\frac{1}{1-a}$

$\in A \Rightarrow \frac{1}{1-\frac{1}{1-a}} \in A$, 即 $\frac{1-a}{-a} \in A \Rightarrow \frac{1}{1-\frac{1-a}{-a}} \in A$, 即 $a \in A$ 这样循环往返, 因此说明 $a, \frac{1}{1-a}, \frac{1-a}{-a}$ 互不相等.

【创新应用思维培养】

学好本节内容需做到如下三点:

一是加深对集合基本概念的理解和认识, 如集合的表示方法, 集合的三个特性、元素与集合的关系等; 二是集合的应用, 如方程的解, 不等式(组)的解用集合表示; 三是正确使用集合语言和符号解决相关问题.

例 7 已知集合 $A = \{x \in \mathbf{R} \mid ax^2 + 2x + 1 = 0\}$ 其中 $a \in \mathbf{R}$.

(1) 1 是 A 中的一个元素, 用列举法表示 A ;

(2) 若 A 中有且只有一个元素, 求 a 的值组成的集合 B ;

(3) 若 A 中至多有一个元素, 试求 a 的取值范围.

【解】 (1) $\because 1 \in A$, $\therefore 1$ 是方程 $ax^2 + 2x + 1 = 0$ 的一个根.

$\therefore a \cdot 1^2 + 2 \times 1 + 1 = 0$. 即 $a = -3$.

\therefore 方程为 $-3x^2 + 2x + 1 = 0$, 解得 $x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{3}$.

\therefore 此时集合 $A = \{-\frac{1}{3}, 1\}$.

(2) 若 $a = 0$, 方程化为 $2x + 1 = 0$, 此时有且仅有一个根 $x = -\frac{1}{2}$.

若 $a \neq 0$, 则当且仅当 $\Delta = 4 - 4a = 0$, 即 $a = 1$ 时

方程有两个相等的实根 $x_1 = x_2 = -1$, 此时, 集合 A 中有且仅有一个元素,

\therefore 所求集合 $B = \{0, 1\}$;

(3) 集合 A 中至多有一个元素包括两种情况:

① A 中有且只有一个元素, 由(2)知此时 $a = 0$ 或 $a = 1$,

② $A = \emptyset$, 此时 $a \neq 0$, 且 $\Delta = 4 - 4a < 0 \therefore a > 1$

综合①②知所求 a 的取值范围是 $|a| \geq 1$ 或 $a = 0$



实 力 检 测

一、选择题

1. 数 0 与集合 \emptyset 的关系是()

- A. $0 \in \emptyset$ B. $0 = \emptyset$ C. $\{0\} = \emptyset$ D. $0 \notin \emptyset$

[同类提高题] 已知平面内的点 $M(1, 2), N(0, 3)$, 集合:

$A = \{(x, y) | 2x - y = 0\}, B = \{(x, y) | x + 2y = 5\}, C = \{(x, y) | 2x + 3y = 9\}$, 那么 M, N 与 A, B, C 的关系是()

- A. $M \in A, N \in B$ B. $M \in B, N \in A$
C. $M \in C, N \in C$ D. $M \in B, N \notin B$

2. 给出下列 5 种说法:

- (1) 任意一个集合的正确表示方法都是唯一的;
(2) 集合 $\{0, -1, 2, -2\}$ 与集合 $\{-2, -1, 0, 2\}$ 是同一个集合;
(3) 若集合 P 是满足不等式 $0 \leq 2x \leq 1$ 的 x 的集合, 则这个集合是一个无限集;
(4) 若 $a \in \mathbf{R}$, 则 $a \in \mathbf{Q}$;
(5) 集合 $\{x | x = 2k - 1, k \in \mathbf{Z}\}$ 与集合 $\{y | y = 2m + 1, m \in \mathbf{Z}\}$ 表示的是同一个集合.

其中正确的说法有_____.

[同类提高题] 下列语句① \emptyset 中与 $\{0\}$ 表示同一集合; ② 由 1, 2, 3 组成的集合可表示为 $\{1, 2, 3\}$ 或 $\{2, 3, 1\}$; ③ 方程 $(x - 1)^2(x - 2) = 0$ 的所有解的集合可表示为 $\{1, 1, 2\}$; ④ 集合 $\{x | 1 < x < 3\}$ 是有限集, 其中正确的是()

- A. ①与② B. ②与③ C. ② D. 以上语句都不对.

二、填空题

3. 集合 $\{3, x, x^2 - 2x\}$ 中, x 应满足的条件是_____.

[同类提高题] 已知集合 $M = \{a, a + d, a + 2d\}, N = \{a, aq, aq^2\}$, 且 M, N 为同一集合, 试求实数 d, q , 并写出集合 M .

4. 用列举法表示

(1) $A = \{x | x = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}, a, b \text{ 为非零实数}\}$;

(2) $A = \{x | \frac{6}{3-x} \in \mathbf{Z}, x \in \mathbf{N}\}$.

5. 若集合 $A = \{x \mid x^2 + ax + b = x\}$ 中仅有一个元素 a , 求 a, b 的值.

[同类提高题] 已知集合 $A = \{x \mid ax + b = 1\}$, $B = \{x \mid ax + b > 4\}$, 其中 $a \neq 0$. 若 A 中的元素必为 B 中的元素, 求实数 b 的取值范围.

6. 设 $A = \{2, 3, a^2 + 2a - 3\}$, $B = \{|a + 3|, 2\}$, 若已知 $5 \in A$ 且 $5 \notin B$, 求实数 a 的值.

[同类提高题] 已知 $M = \{2, a, b\}$, $N = \{2a, 2, b^2\}$ 且 $M = N$, 求 a, b 的值.

7. 已知集合 $M = \{p \in \mathbf{R} \mid \text{关于 } x \text{ 的方程 } x^2 + 2(p-1)x + 1 = 0 \text{ 有实数解}\}$, 求函数 $y = 2x - 1 (x \in M)$ 的取值范围.

[同类提高题] 已知数集 M 满足条件: 若 $a \in M$, 则 $\frac{1+a}{1-a} \in M$ ($a \neq \pm 1, a \neq 0$)

(1) 设 $3 \in M$, 试把由此确定的 M 的其它元素全部求出来, 并指出这时 M 中共有多少元素;

(2) 自己设计一个数属于 M , 再把由此确定的 M 中其他元素全部求出来;

(3) 比较(1)(2)的结论, 你能悟出什么道理吗? 试写出你的发现, 并大胆尝试如何给出证明.



实力检测参考答案

1. D 点拨: 数 0 为元素, \emptyset 为空集且不含任何元素, 故选 D.

[同类提高题] D 点拨: 集合 A, B, C 都为点集, 因此只要将 M, N 两点的坐标分别代入方程即得 $M \in B, N \notin B$, 故选 D.

2. (2)、(3)、(5) 点拨: 由于集合 $\{1\}$ 可以表示为 $\{x \mid x - 1 = 0\}$ 可知(1)是错误的; 再从无限集合及集合中元素的无序性分析可知(2)、(3)正确; a 为实数, 依然有可能为无理数, (4)是错误的; 而(5)中的两个集合, 它们都表示由全集奇数组成的集合, (5)是正确的, 故正确的说法有(2)、(3)、(5).

[同类提高题] ② 点拨: 由集合元素的互异性、无序性及集合的分类知正确语句只有②

3. $x \neq 0$ 且 $x \neq -1$ 且 $x \neq 3$. 点拨: 由集合元素的互异性知, x 应满足 $\begin{cases} x \neq 3, \\ x^2 - 2x \neq 3, \text{ 解} \\ x^2 - 2x \neq x. \end{cases}$

之, 得 $\begin{cases} x \neq 0, \\ x \neq -1, \\ x \neq 3. \end{cases}$

$\therefore x$ 应满足的条件是: $x \neq 0$ 且 $x \neq -1$ 且 $x \neq 3$.

[同类提高题] 点拨: 由集合元素的互异性知, $a \neq a + d, a \neq aq^2$, 得 $a \neq 0, d \neq 0, q \neq \pm 1$, 再由集合元素的特性得:

(1) $\begin{cases} a + d = aq, \\ a + 2d = aq^2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a + d = aq^2, \\ a + 2d = aq. \end{cases}$

$$\text{解(1)} \begin{cases} d = a(q-1), \\ 2d = a(q^2-1). \end{cases} \therefore \frac{2d}{d} = \frac{a(q^2-1)}{a(q-1)}, \text{即 } 2 = q+1, q=1, \therefore q \neq \pm 1, \therefore \text{舍去.}$$

$$\text{解(2)} \begin{cases} d = a(q^2-1) & \text{①} \\ 2d = a(q-1) & \text{②} \end{cases} \Rightarrow \frac{d}{2d} = \frac{a(q^2-1)}{a(q-1)}, \text{即 } \frac{1}{2} = q+1, \text{解得 } q = -\frac{1}{2}, \text{代入①得}$$

$$d = -\frac{3}{4}a.$$

于是 $M = N = \{a, -\frac{1}{2}a, \frac{1}{4}a\}$.

4. 点拨: (1) $x = \frac{|a|}{a} + \frac{|b|}{b}$, 当 $a > 0, b > 0$ 时, $x = 2$, 当 $a < 0, b < 0$ 时 $x = -2$; 当 a, b 异号时, $x = 0$. 故 $A = \{-2, 0, 2\}$.

(2) 由 $\frac{6}{3-x} \in \mathbf{Z}$ 且 $x \in \mathbf{N}$, 得到 x 的值, x 所取的自然数, 要使 $3-x$ 整除 6, 故 $3-x = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$, 所以 $x = 2, 4, 1, 5, 6, 0, -3, 9$. 而 $x = -3 \notin \mathbf{N}$, 故舍去, 因此 $A = \{0, 1, 2, 4, 5, 6, 9\}$.

5. 点拨: 由题意知, a 为方程 $x^2 + (a-1)x + b = 0$ 的相等实根.

$$\therefore \begin{cases} (a-1)^2 - 4b = 0, \\ a^2 + (a-1)a + b = 0. \end{cases} \text{解得} \begin{cases} a = \frac{1}{3}, \\ b = \frac{1}{9}. \end{cases}$$

[同类提高题] 点拨: A 中的元素是 $x = \frac{1-b}{a}$, 由 $\frac{1-b}{a} \in B, \therefore a \cdot \frac{1-b}{a} - b > 4$.

$$\therefore b < -\frac{3}{2}, \text{即为所求范围.}$$

6. 点拨: $\because 5 \in A$ 且 $5 \notin B, \therefore \begin{cases} a^2 + 2a - 3 = 5, \\ |a+3| \neq 5. \end{cases}$

$$\text{即} \begin{cases} a = -4 \text{ 或 } a = 2, \\ a \neq 2 \text{ 且 } a \neq 8. \end{cases} \therefore a = -4.$$

[同类提高题] 点拨: $\because M = N \therefore \begin{cases} a = 2a, \\ b = b^2, \end{cases} \text{或} \begin{cases} a = b^2, \\ 2a = b. \end{cases}$

$$\therefore \begin{cases} a = 0, \\ b = 0, \end{cases} \text{或} \begin{cases} a = 0, \\ b = 1, \end{cases} \text{或} \begin{cases} a = \frac{1}{4}, \\ b = \frac{1}{2}. \end{cases} \text{而} \begin{cases} a = 0, \\ b = 0 \end{cases} \text{不符合集合元素的互异性.}$$

$$\therefore \begin{cases} a = 0, \\ b = 1, \end{cases} \text{或} \begin{cases} a = \frac{1}{4}, \\ b = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

7. 点拨: 由已知, 得 $\Delta = 4(p-1)^2 - 4 \geq 0$, 解得 $p \geq 2$ 或 $p \leq 0$.

$$\therefore M = \{p \mid p \geq 2 \text{ 或 } p \leq 0\}.$$

$$\because x \in M, \therefore x \geq 2 \text{ 或 } x \leq 0.$$

$$\therefore 2x - 1 \geq 3 \text{ 或 } 2x - 1 \leq -1.$$

$\therefore y$ 的取值范围是 $\{y \mid y \leq -1 \text{ 或 } y \geq 3\}$.

[同类提高题] 点拨: (1) 若 $3 \in M$, 则 $\frac{1+3}{1-3} = -2 \in M$, 则 $\frac{1+(-2)}{1-(-2)} = -\frac{1}{3} \in M$,

$$\frac{1+(-\frac{1}{3})}{1-(-\frac{1}{3})} = \frac{1}{2} \in M, \frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 3 \in M, \text{以后循环, 于是 } M = \{3, -2, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\}, \text{共4个}$$

元素.

(2) 取 $a=4 \in M$, 仿上得 $M = \{4, -\frac{5}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{3}{5}\}$.

(3) 猜想: 集合 M 只含 4 个元素, 证明如下: 因为若 $a \in M$, 则 $\frac{1+a}{1-a} \in M (a \neq 0, a \neq \pm 1)$

所以对 $\frac{1+a}{1-a} \in M$, 有 $\frac{1+\frac{1+a}{1-a}}{1-\frac{1+a}{1-a}} = -\frac{1}{a} \in M$.

$\frac{1+(-\frac{1}{a})}{1-(-\frac{1}{a})} = \frac{a-1}{a+1} \in M, \frac{1+\frac{a-1}{a+1}}{1-\frac{a-1}{a+1}} = a \in M$ 以后循环, 故 M 中只有以下四个元素, 即

$$M = \{a, \frac{1+a}{1-a}, -\frac{1}{a}, \frac{a-1}{a+1}\}.$$

1.2 子集、全集、补集

教材全解

知识点 1: 子集、真子集的概念

► 重点

一般地, 对于两个集合 A 与 B , 如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素, 我们说集合 A 包含于集合 B , 或集合 B 包含集合 A , 记作 $A \subseteq B$ (或 $B \supseteq A$), 这时我们也说集合 A 是集合 B 的子集.

对于两个集合 A 与 B , 如果 $A \subseteq B$, 并且 $A \neq B$ 我们就说 A 是 B 的真子集, 记作 $A \subsetneq B$ (或 $B \supsetneq A$)

提醒 (1) 子集、真子集这两个概念是由讨论集合与集合间关系引起的, 它们的定义是从元素的从属关系角度叙述的, 两个集合 A 与 B , 当 A 是 B 的子集时, 有如下关系如图 1-2-1、图 1-2-2.

由(1)知: 不能把子集理解为由一个集合的部分元素组成的新集合. 其后两种情况时: $A \subsetneq B$, 即在 B 中至少存在一个元素不在 A 中, “ \subsetneq ”也可理解为“ $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$ ”.

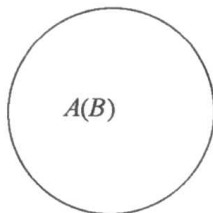

 $A = B$

图 1-2-1

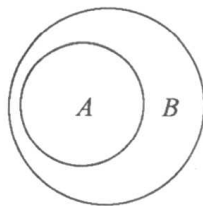

 A, B 非空

图 1-2-2

(2) 空集与其他集合的关系:

- ① 空集是任何集合的子集;
- ② 空集是任何非空集合的真子集.

知识点 2: 子集的性质

- (1) 自反性: $A \subseteq A$;
- (2) 传递性: 若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq C$ 则 $A \subseteq C$;
若 $A \subsetneq B$ 且 $B \subsetneq C$ 则 $A \subsetneq C$;
- (3) 集合相等: 若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$, 则 $A = B$.

该性质常用于判断集合相等.

知识点 3: 子集个数问题

单个元素集 $\{a\}$ 有两个子集: $\emptyset, \{a\}$; 两个元素集 $\{a, b\}$ 有四个子集: $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$; 三个元素的集合 $\{a, b, c\}$ 有八个子集: $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}$; …… 可归纳出: 若一个集合共有 n 个元素, 则它有 2^n 个子集, 有 $2^n - 1$ 个真子集, 有 $2^n - 2$ 个非空真子集.

知识点 4: 全集与补集的概念

如果集合 S 含有我们要研究的各个集合的全部元素, 这个集合就可以看作一个全集, 常用 U 来表示.

提醒 全集是把所有的要研究的对象集在一起组成的大集合, 它是相对的, 人为规定的概念, 不能理解为最大的集合.

一般地设 S 是一个集合, A 是 S 的一个子集 (即 $A \subseteq S$), 由 S 中所有不属于 A 的元素组成的集合, 叫做 S 中子集 A 的补集 (或余集), 记作 $\complement_S A$, 即: $\complement_S A = \{x \mid x \in S, \text{ 且 } x \notin A\}$.

提醒 (1) 在谈补集时, 一定要清楚是在哪个全集中的补集, 对不同的全集, 同一个集合的补集也不同. 例如:

$U = \{1, 2, 3, 4\}, S = \{1, 2, 3, 4, 5\}, A = \{1, 2, 3\}$ 则 $A \subseteq U$ 且 $A \subseteq S$ 但是 $\complement_U A = \{4\}, \complement_S A = \{4, 5\}$.