普通工科高等院校辅导教材

高等数学习题课教程

（配同济《高等数学》第四、五版）

蒋福民　徐建平　编

同济大学出版社

普通工科高等院校辅导教材

高等数学习题课教程

（配同济《高等数学》第四、五版）

蒋福民　徐建平　编

同济大学出版社

内 容 提 要

本书是根据高等工科院校“高等数学课程教学基本要求”(教学大纲),并按照同济大学应用数学系主编的《高等数学》(第五版)(高教版)的章节顺序编写而成,也是编者多年来在同济大学教学、辅导工作的结晶.全书共12章分27次习题课,供两学期高等数学习题课教学辅导使用.每次习题课由知识要点、教学要求、主要内容、概念辨析、例题分析和习题选析组成,并安排了适量的课内与课外练习题(附有简答和提示),可供读者自我检查.

本书可与《高等数学》教材配合使用,也可作为专科升本科或者(非数学类)硕士研究生入学考试前的复习资料.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题课教材/蒋福民,徐建平编.—上海:同济大学出版社,2004.9

普通高等院校辅导教材,配同济四、五版

ISBN 7-5608-2888-4

Ⅰ.高… Ⅱ.①蒋… ②徐… Ⅲ.高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第059526号

高等数学习题课教程(配同济《高等数学》第四、五版)

蒋福民 徐建平 编

责任编辑 李炳钊 责任校对 李 彪 封面设计 李志云

出版发行 同济大学出版社

(上海四平路1239号 邮编200092 电话021-65985622)

经 销 全国各地新华书店

印 刷 同济大学印刷厂印刷

开 本 787 mm×960 mm 1/16

印 张 32 字 数 640 000

印 数 1—5 100

版 次 2004年9月第1版 2004年9月第1次印刷

书 号 ISBN 7-5608-2888-4/O·255

定 价 36.00元

前　言

高等数学是高等工科院校最重要的基础理论课之一，习题课是复习巩固基本概念、加深理解基本理论、提高学生运算和论证能力的重要环节.我们深切感到要加强习题课教学，十分需要有一本供教师和学生参考使用的习题课教材，为此我们编写了本书.

本书是根据高等工科院校“高等数学课程教学基本要求”(教学大纲)，并按照同济大学应用数学系主编的《高等数学》(第五版)(高等教育出版社出版)的章节顺序编写而成.读者可将此书与各自的《高等数学》教材(尤其是同济大学主编的第五版)配合使用.全书共 12 章 27 次习题课，分两个学期安排习题课教学.每次习题课由“知识要点”、“教学要求”、“主要内容”、“概念辨析”、“例题分析”和“习题选析”组成。

在“知识要点”和“教学要求”中，一开始向读者提出本次习题课所要明确的学习重点和要求;“主要内容”则扼要复习有关定义、定理、公式等，依据“教学大纲”要求，着重叙述本次习题应注意的问题;“概念辨析”采用问答形式，指明概念中的难点和容易误解的疑点，澄清在学习中常见的一些概念性似是疑非的难点;“例题分析”中，除对典型问题进行详解外，还在题末给出解同类题目的一般方法及注意事项;“习题选析”选取教材中有一定难度的习题进行剖析。我们在每次习题课中都安排了适量的课内练习题与课外练习题(这些习题均与教材上的题目不同)，附有简答，可供读者自我检查.

本书具有相对的独立性，每次有一个中心内容，因此，它不仅可以作为习题课参考教材，还可作为报考硕士研究生和自学高等数学的读者复习参考使用书.

本书是作者多年的教学实践经验的总结.由于编者水平有限，书中不周全甚至错误之处在所难免，还望同行们和广大读者不吝批评指正.

编　者

2004.6

目　　录

第一章　函数与极限

第一次　映射与函数

一、知识要点

1. 集合、映射、函数与函数定义域.
2. 函数的几种特性：有界性，单调性，奇偶性，周期性.

二、教学要求

1. 了解集合及集合的运算.
2. 理解函数概念和函数符号的意义，能熟练地求出给定函数的定义域.
3. 理解反函数、复合函数、分段函数.
4. 掌握函数的有界性、单调性、奇偶性和周期性及其图形特征.
5. 熟悉基本初等函数的性质及图形，了解初等函数.

三、主要内容

1. 函数

(1) 映射　设 X 和 Y 是两个非空集合，如果存在一个法则 f，使得对 X 中每个元素 x，按法则 f，在 Y 中有惟一确定的元素 y 与之对应，则称 f 为从 X 到 Y 的**映射**.

(2) 函数　设数集 $D\subset\mathbf{R}$，则称映射 $f: D\to\mathbf{R}$ 为定义在 D 上的**函数**，通常简记为 $y=f(x)$, $x\in D$，其中 D 称为函数 f 的**定义域**，记作 D_f. $R_f=\{y\mid y=f(x),\ x\in D_f\}$ 称为函数 f 的**值域**，$C=\{(x,\ y)\mid y=f(x),\ x\in D_f\}$ 称为函数 f 的**图形**.

2. 函数特性

(1) 函数的有界性　若函数 f 的定义域为 D，数集 $X\subset D$. 若存在数 k_1，对于任意 $x\in X$ 有 $f(x)\leqslant k_1$，则称函数 $f(x)$ 在 X 上有**上界**，而 k_1 称为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个上界；若存在数 k_2，对于任意 $x\in X$ 有 $f(x)\geqslant k_2$，则称函数 $f(x)$ 在 X 上有**下界**，而 k_2 称为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个下界.

若存在正数 M，对于任意 $x\in X$ 有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 X 上**有界**，而 M 称为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个界；否则称函数 $f(x)$ 在 X 上**无界**，即对任意正数

M,存在 $x \in X$,使得 $|f(x)| > M$.

函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是函数 $f(x)$ 既有上界又有下界.

(2) 函数的单调性　若函数 $f(x)$ $(x \in D)$ 对于 D 内的区间 I 上任意两点 x_1,x_2,若 $x_1 < x_2$ 时必有 $f(x_1) < f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上**单调增加**;若 $x_1 < x_2$ 时必有 $f(x_1) > f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上**单调减少**.

(3) 函数的奇偶性　若函数 $f(x)$的定义域 D 关于原点**对称**(即 $x \in D$ 时,必有 $-x \in D$),且对于 D 内任意一点 x,恒有 $f(-x) = f(x)$,则称 $f(x)$ 为 D 上的偶函数;若恒有 $f(-x) = -f(x)$,则称 $f(x)$ 为 D 上的奇函数.

奇函数的图形关于原点对称,偶函数的图形关于 y 轴对称.

(4) 函数的周期性　若函数 $f(x)$ 在 D 上有定义,且存在非零常数 l,使得对 D 中任意 x,有 $x \pm l \in D$,而且 $f(x \pm l) = f(x)$ 恒成立,则称 $f(x)$ 为**周期函数**,l 称为 $f(x)$ 的**周期**,如果存在最小的正数 l,使得 l 是 $f(x)$ 的周期,则称 $f(x)$ 有最小正周期 l.

3. 反函数

函数 $f(x)$的定义域为 D,值域为 W,对 W 中任意的 y,至少可以确定一个 $x \in D$(适合 $f(x) = y$) 与之对应,由此构成的函数 $f^{-1}(y)$ 称为 $f(x)$ 的**反函数**.

直接函数 $y = f(x)$ 与其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称;

若 $y = f(x)$ 单值、单调,则其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 也是单值、单调.

4. 复合函数

设函数 $y = f(u)$ 定义域为 D_1,函数 $u = \varphi(x)$ 的定义域为 D,值域为 W,若 $W \subset D_1$,则对 D 内任意一点 x,有确定的值 $u = \varphi(x)$ 与之对应,由于 $u = \varphi(x) \in W \subset D_1$,又有确定的值 y 与之对应,由此确定的函数称为 $y = f(u)$ 与 $u = \varphi(x)$ 的**复合函数**,记作 $y = (f \circ \varphi)(x) = f[\varphi(x)]$.

5. 分段函数

在自变量的不同变化范围中对应法则用不同算式表示的函数通常称为**分段函数**.

6. 基本初等函数和初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数统称为**基本初等函数**.

由常数及基本初等函数经过有限次四则运算及有限次复合步骤所构成的能用一个算式表示的函数称为**初等函数**.

一般,分段函数不作为初等函数处理.

四、概念辨析

问题 1　为什么说函数的定义域与对应规律是确定函数的两个要素?

根据函数定义,只要定义域和对应规律确定了,函数的值域也就确定了,从而函

数就完全确定. 因而函数的定义域与对应规律是确定函数的两个要素.

问题 2 两个函数应满足什么条件,才能构成复合函数?

按照复合函数定义,数集 B 上的函数 $y=f(u)$ 与数集 A 上的函数 $u=\varphi(x)$ 能构成数集 A 上的复合函数 $y=f[\varphi(x)]$,应要求 $u=\varphi(x)$ 的值域 $B_\varphi\subseteq B$,如果这个条件不满足,它们就不能构成数集 A 上的复合函数.

例如, $y=\sqrt{1-u^2}$ 与 $u=3+\sin x$ 就不能构成复合函数,这是因为 $y=\sqrt{1-u^2}$ 的定义域为 $-1\leqslant u\leqslant 1$,而 $u=3+\sin x\ (-\infty<x<+\infty)$ 的值域为 $2\leqslant u\leqslant 4$,它不在 $y=\sqrt{1-u^2}$ 的定义域中.

但应注意,如果在数集 $A^*\ (A^*\subset A)$ 上, $u=\varphi(x)$ 的值都属于 $y=f(u)$ 的定义域 B,那么 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 在 A^* 上可构成复合函数.

问题 3 分段函数能不能看作几个函数或看作几段函数相加?

分段函数是一个函数,有其确定的定义域及对应规律,切不可看作几个函数,也不能看作几段函数相加.

例如

$$f(x)=\begin{cases}1+x^2, & x\leqslant 0\\ x-2, & x>0,\end{cases}$$

是一个分段函数,其定义域为 $(-\infty,+\infty)$,其对应规律是:当自变量 $x\leqslant 0$ 时,因变量由 $1+x^2$ 确定;当自变量 $x>0$ 时,因变量由 $x-2$ 确定,它是一个函数而不是两个函数,它也不能看作两段函数 $f_1(x)=1+x^2(x\leqslant 0)$ 与 $f_2(x)=x-2\ (x>0)$ 相加. 因为函数相加是指在共同定义域内自变量同一处的函数值相加,而 $f_1(x)=1+x^2(x\leqslant 0)$, $f_2(x)=x-2\ (x>0)$ 是两个定义域不同的函数,它们不能相加.

至于两个分段函数能不能相加,这要由具体情况而定.

例如 $f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ x, & x\geqslant 0\end{cases}$ 与 $g(x)=\begin{cases}x+1, & x<1\\ x, & x\geqslant 1\end{cases}$ 就能相加,因为它们的定义域相同,此时

$$f(x)+g(x)=\begin{cases}x+1, & x<0\\ 2x+1, & 0\leqslant x<1\\ 2x, & 1\leqslant x\end{cases}$$

而 $f(x)=\begin{cases}0, & -1\leqslant x<0\\ x, & 0\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$ 与 $g(x)=\begin{cases}x+1, & x<1\\ x, & 1\leqslant x\end{cases}$ 就不能相加,因为它们的定义域不同.

五、例题分析

例 1 证明:对任意两个集 A, B,下面三个关系等价:

(1) $B\subseteq A$；　(2) $A\cup B=A$；　(3) $A\cap B=B$.

解 用循环证法，(1)⇒(2)⇒(3)⇒(1). 集合等式的证明方法，一般用两边的属于法.

(1)⇒(2)：因$A\cup B$的元素是A的元素或是B的元素，由(1)，B的元素也是A的元素. 故$A\cup B$的元素总是A的元素，即$A\cup B\subseteq A$.

另一方面，显然有$A\subseteq A\cup B$，故$A\cup B=A$.

(2)⇒(3)：因$A\cap B$的元素既是A的元素又是B的元素. 故$A\cap B\subseteq B$. 又因$A\cup B=A$，即B的元素也是A的元素. 故B的元素一定为$A\cap B$的元素. 故$B\subseteq A\cap B$，故$A\cap B=B$.

(3)⇒(1)：因为$B=A\cap B\subseteq A$即$B\subseteq A$.

例 2 设A_n是恰被2^n整除的自然数(可表示成$2^n x$奇数的自然数)之集，对集族$\mathscr{F}=\{A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots\}$的并集$\bigcup\limits_{A_n\in\mathscr{F}}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$是什么集?

解 A_n的元素必是正偶数，故$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$是全体正偶数之集$A$；反之，任意正偶数可表示成$2^n x$奇数的形式，故属于某个$A_n$，因而属于$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$.

由以上可见，$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$，即所求之集是全体正偶数之集.

例 3 设$A_x=[0, x)$，对满足$x>1$的所有A_x形成的集族$\mathscr{F}$，求交集$\bigcap\limits_{A_x\in\mathscr{F}}A_x=(=\bigcap\limits_{x>1}A_x)$. **解** 设$A=[0, 1]$.

若$x>1$，则$A\subseteq A_x$，故A的元素属于所有$A_x(x>1)$，即$A\subseteq\bigcap\limits_{x>1}A_x$.

反之，若$t\in\bigcap\limits_{x>1}A_x$，则对所有$x>1$有$t\in A_x$，即$0\leqslant t<x$，因此必有$0\leqslant t\leqslant 1$，即$t\in A.\Rightarrow\bigcap\limits_{x>1}A_x\subseteq A$.

由以上可见，$\bigcap\limits_{x>1}A_x=A$，故所求集是$[0, 1]$.

例 4 设$A_n=(n, +\infty)$ $(n=0, \pm1, \pm2, \cdots)$，全体$A_n$所成的集族为$\mathscr{F}$，求$\bigcup\limits_{\mathscr{F}}A_n$，$\bigcap\limits_{\mathscr{F}}A_n$.

解 对任意实数x，存在整数$n<x$. 因此存在n，使$x\in A_n$，从而$x\in\bigcup\limits_{\mathscr{F}}A_n\Rightarrow\bigcup\limits_{\mathscr{F}}A_n=(-\infty, +\infty)$.

其次，对任意实数x，必存在整数m，使$m>x$，$x\notin A_m$，从而$x\notin\bigcap\limits_{\mathscr{F}}A_n$，即任何实数都不属于$\bigcap\limits_{\mathscr{F}}A_n$，因此，$\bigcap\limits_{\mathscr{F}}A_n=\varnothing$.

例 5 设$\mathscr{F}$是集族，A是集，证明：

(1) $A-\bigcup\limits_{X\in\mathscr{F}}X=\bigcap\limits_{X\in\mathscr{F}}(A-X)$；

(2) $A-\bigcap\limits_{X\in\mathscr{F}}X=\bigcup\limits_{X\in\mathscr{F}}(A-X)$.

解 (1) 先证明$A-\bigcup\limits_{X\in\mathscr{F}}X\subseteq\bigcap\limits_{X\in\mathscr{F}}(A-X)$.

若$x\in A-\bigcup\limits_{X\in\mathscr{F}}X$，则$x\in A$且$x\overline{\in}\bigcup\limits_{X\in\mathscr{F}}X$. 即$x$不属于任何$X\in\mathscr{F}$，即对任何$X\in\mathscr{F}$有$x\overline{\in}X$. 因此对任意$X\in\mathscr{F}$，有$x\in A-X$；即$x\in\bigcap\limits_{X\in\mathscr{F}}(A-X)\Rightarrow A-\bigcup\limits_{X\in\mathscr{F}}X\subseteq\bigcap\limits_{X\in\mathscr{F}}(A-X)$. 其次，若$x\in\bigcap\limits_{X\in\mathscr{F}}(A-X)$，则对所有$X\in\mathscr{F}$，有$x\in A-X$，即$x\in A$，$x\overline{\in}X$. 因为对所有$X\in\mathscr{F}$有$x\overline{\in}X$. 故$x\overline{\in}\bigcup\limits_{X\in\mathscr{F}}X$. 因此$x\in A-\bigcup\limits_{X\in\mathscr{F}}X$，$\Rightarrow A-\bigcup\limits_{X\in\mathscr{F}}X\supseteq\bigcap\limits_{X\in\mathscr{F}}(A-X)$ 从而$A-\bigcup\limits_{X\in\mathscr{F}}X=\bigcap\limits_{X\in\mathscr{F}}(A-X)$. 类似可证(2).

例 6 求下列函数的定义域.

(1) $y=f(\sin 2x)$，其中$f(x)$的定义域为$[0, 1]$；

(2) $y=f(x+a)+f(x-a)$，其中，$f(x)$的定义域为$[0, 2]$；

(3) $f_n(x)=\underbrace{f(f(\cdots(f}_{n\text{次}}(x)))\cdots)$，其中，$f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

解 (1) $y=f(\sin 2x)$的定义域满足$0\leqslant\sin 2x\leqslant 1$，故$D=\left\{x\middle|x\in\left[n\pi,\dfrac{2n+1}{2}\pi\right]\right\}$ $(n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$.

(2) $y=f(x+a)+f(x-a)$的定义域满足

$$\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 2\\ 0\leqslant x-a\leqslant 2,\end{cases}$$

故当$a\leqslant 1$时，定义域$[a, 2-a]$；当$a>1$时，这个函数的定义域$D=\phi$.

(3) 由$f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$，$x\in(-1, 1)$，得

$$f_2(x)=f(f(x))=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\Big/\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}=\frac{x}{\sqrt{1-2x^2}},$$

由数学归纳法可证得$f_n(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-nx^2}}$，则定义域为$D=\left\{x\middle|x\in\left(-\dfrac{1}{\sqrt{n}},\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\right\}$.

例 7 设$f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$，$f(g(x))=1-x$，且$g(x)\geqslant 0$. 求$g(x)$的解析表达式及定义域.

解 由$f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$可知

$$f(g(x))=\mathrm{e}^{g^2(x)},$$

又由$f(g(x))=1-x$，得$\mathrm{e}^{g^2(x)}=1-x$. 于是

$$g^2(x)=\ln(1-x).$$

注意到$g(x)\geqslant 0$，可得

$$g(x)=\sqrt{\ln(1-x)}.$$

其定义域满足 $\ln(1-x)\geqslant 0$，即 $D=\{x\mid x\leqslant 0\}$.

例 8 设 $f(x)=\ln x$，且

$$g(x)=\begin{cases}x^2, & |x|\leqslant 1\\ \dfrac{1}{x^2}, & |x|>1,\end{cases}$$

试求 $g[f(x)]$ 与 $f[g(x)]$.

解 因为当 $x>\mathrm{e}$ 时 $\ln x>1$，当 $0<x<\mathrm{e}^{-1}$ 时 $\ln x<-1$，当 $\mathrm{e}^{-1}\leqslant x\leqslant \mathrm{e}$ 时 $-1\leqslant \ln x\leqslant 1$，所以

$$g[f(x)]=g(\ln x)=\begin{cases}\ln^2 x, & |\ln x|\leqslant 1\\ \dfrac{1}{\ln^2 x}, & |\ln x|>1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\ln^2 x, & \mathrm{e}^{-1}\leqslant x\leqslant \mathrm{e}\\ \dfrac{1}{\ln^2 x}, & x>\mathrm{e}\text{ 或 }0<x<\mathrm{e}^{-1},\end{cases}$$

而

$$f[g(x)]=\ln f(x)=\begin{cases}\ln x^2, & 0<|x|\leqslant 1\\ -\ln x^2, & |x|>1.\end{cases}$$

例 9 若函数 $f(x)(-\infty<x<+\infty)$ 满足

$$f(x+T)=kf(x),\ (k,\ T\text{ 均为正常数})$$

证明：$f(x)=a^x\varphi(x)$，其中，a 为大于零的常数，且 $a\neq 1$，$\varphi(x)$ 为以 T 为周期的周期函数.

证 由于 $a^x>0$，记 $\dfrac{f(x)}{a^x}=\varphi(x)$，于是对任何函数 $f(x)(-\infty<x<+\infty)$ 可表为 $f(x)=a^x\varphi(x)$，据已知条件，有

$$a^{x+T}\varphi(x+T)=ka^x\varphi(x)$$

记 $k=a^T$，即有 $a^{x+T}\varphi(x+T)=a^{x+T}\varphi(x)$，即得 $\varphi(x+T)=\varphi(x)$，至此命题得证.

例 10 证明：若函数 $f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ 的图形关于两条直线 $x=a$ 和 $x=b$ $(b>a)$ 对称，则函数 $f(x)$ 必为周期函数.

证 由条件知

$$f(x)=f(2a-x),\ f(x)=f(2b-x).$$

故 $$f(x)=f(2a-x)=f(2b-(2a-x))=f(x+(2b-2a))$$

记 $T=2b-2a$，则 $f(x)=f(x+T)$.

所以，$f(x)$ 是周期函数且周期为 $2b-2a$.

例 11 设 当 $x \neq 0$ 时函数 $f(x)$ 满足

$af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x}$ (a, b, c 为常数，$|a| \neq |b|$)，且 $f(0)=0$.

证明：$f(x)$ 为奇函数.

证 先求出 $f(x)$的解析表达式，当 $x \neq 0$ 时，以"$\frac{1}{x}$"代换式中的"x"，得

$$af\left(\frac{1}{x}\right)+bf(x)=cx.$$

与原式 $af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}$ 联立，得

$$f(x)=\frac{1}{a^2-b^2}\left(\frac{ac}{x}-bcx\right) \quad (|a| \neq |b|)$$

因此由

$$f(-x)=\frac{1}{a^2-b^2}\left(\frac{ac}{-x}-bc(-x)\right)$$
$$=\frac{-1}{a^2-b^2}\left(\frac{ac}{x}-bcx\right)=-f(x).$$

及 $f(0)=0$，故 $f(x)$ 为奇函数.

例 12 设 $\varphi(x)$, $g(x)$, $f(x)$ 均为单调增加函数. 试证：
若 $\varphi(x)<f(x)<g(x)$，则 $\varphi(\varphi(x))<f(f(x))<g(g(x))$.

证 由 $\varphi(x)<f(x)<g(x)$，得

$$\varphi(\varphi(x))<f(\varphi(x))<g(\varphi(x)).$$

$f(x)$ 单调增加及 $\varphi(x)<f(x)$，有 $f(\varphi(x))<f(f(x))$，因此有

$$\varphi(\varphi(x))<f(f(x)).$$

同理 $f(f(x))<g(g(x))$，由此得 $\varphi(\varphi(x))<f(f(x))<g(g(x))$.

例 13 已知函数 $f(x)$ ($x \in (-\infty,+\infty)$) 满足 $z=\sqrt{y}+f(\sqrt[3]{x}-1)$ 且当 $y=1$ 时 $z=x$，试写出 $f(x)$ 及 z 的解析表达式.

解 将 $y=1$, $z=x$ 代入 $z=\sqrt{y}+f(\sqrt[3]{x}-1)$ 得

$$x=1+f(\sqrt[3]{x}-1).$$

令 $\sqrt[3]{x}-1=t$，则 $x=(1+t)^3$，于是

$$f(t)=(1+t)^3-1$$

即得 $f(x)=(1+x)^3-1$, $z=\sqrt{y}+x-1$.

例 14 证明：若对任何实数 x, y 有

$$|f(x)-f(y)|=|x-y|$$

且 $f(0)=0$,则(1) $f(x)f(y)=xy$;(2) $f(x+y)=f(x)+f(y)$.

证 (1) 令 $y=0$,由 $f(0)=0$,方程 $|f(x)-f(y)|=|x-y|$ 成为 $|f(x)|=|x|$ 即 $f^2(x)=x^2$. 又知

$$(f(x)-f(y))^2=(x-y)^2,$$

$$f^2(x)-2f(x)f(y)+f^2(y)=x^2-2xy+y^2.$$

即得 $f(x)f(y)=xy$.

(2) 令 $y=1$ 代入 $f(x)f(y)=xy$,得 $f(x)f(1)=x$,从而有

$$f(x+y)f(1)=x+y=f(x)f(1)+f(y)f(1)=[f(x)+f(y)]f(1).$$

注意到 $f^2(1)=1\neq 0$,故有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$.

例 15 设对任意实数 x, y. 函数 $f(x)$满足

$$\frac{f(x)+f(y)}{2}\leqslant f\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

且 $f(x)\geqslant 0$, $f(0)=C$ (其中,C 为非负常数),证明 $f(x)=C$.

分析 不等式 $\frac{f(x)+f(y)}{2}\leqslant f\left(\frac{x+y}{2}\right)$表明在任意区间$[a, b]$上,中点处函数值大于或等于两端点函数值的算术平均值. 故知曲线 $y=f(x)$ 的图形是凸的或者是一条直线,由 $f(x)\geqslant 0$ 知曲线只能是一条水平直线 $f(x)=f(0)=C$.

证 先证 $f(x)\geqslant C$,用反证法,设存在点 a, $f(a)<C=f(0)$.

记 $h=f(0)-f(a)>0$. 在不等式中令 $x=0$, $y=2a$ 代入有

$$2f(a)\geqslant f(0)+f(2a),$$

即 $$f(2a)\leqslant 2f(a)-f(0)=-2(h-f(0))-f(0)=f(0)-2h,$$

由归纳法知

$$f(na)\leqslant f(0)-nh,$$

对任何自然数n成立. 由$h>0$,当n充分大时,便知$f(na)<0$. 矛盾!故必有$f(x)\geqslant C$.

再证 $f(x)\equiv C$,令 $y=-x$,由题设不等式,有

$$2f(0)=2C\geqslant f(x)+f(-x),$$

因 $f(x)\geqslant C$ $(x\in(-\infty, +\infty))$,故 $f(-x)\geqslant C$,由上式必有

$$f(x)=f(-x)=C, \text{即 } f(x)\equiv C.$$

例 16 证明:$f(x)=x-[x]$ $(x\in(-\infty, +\infty))$ 是以 1 为周期的周期函数.

证 因 $f(x+1)=(x+1)-[x+1]=x+1-[x]-1$

$$= x-[x]$$
$$= f(x).$$

故 $f(x)$ 是以 1 为周期的周期函数.

例 17 证明：函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在$(0, 1)$内无界.

证 对任意给定的 $M>0$，由于$\dfrac{1}{M+1}\in(0, 1)$，若取 $x_1=\dfrac{1}{M+1}$，则有 $|f(x_1)|=\left|\dfrac{1}{\dfrac{1}{M+1}}\right|=M+1>M$. 因此 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在$(0, 1)$内无界.

注意：若设 $0<a<1$，则 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在$(a, 1)$内有界. 这是因为取 $M=\dfrac{1}{a}$，对任意 $x\in(a, 1)$，有 $|f(x)|=\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{a}=M$.

课内练习 1-1

1. 选择题：

(1) 函数 $f(x)=\sqrt{\dfrac{3-x}{2+x}}$ 的定义域是________；

(A) $[-2, 3]$；　　(B) $(-2, +\infty)$；

(C) $(-\infty, -2)$；　　(D) $(-2, 3]$.

(2) 设函数 $f(x)=\arccos(\lg x)$，则 $f\left(\dfrac{1}{10}\right)=$ ________；

(A) 0；　　(B) -1；　　(C) π；　　(D) $\dfrac{\pi}{2}$.

(3) 函数 $y=\dfrac{1-x}{1+x}\ (x\neq-1)$ 的反函数是________；

(A) $y=\dfrac{1+x}{1-x}$；　　(B) $y=\dfrac{x+1}{x-1}$；

(C) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$；　　(D) $y=\dfrac{x-1}{x+1}$.

(4) 下列函数中为偶函数的是________；

(A) $f(x)=x^3+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$；　　(B) $f(x)=\ln\sqrt{x+(1+x)^2}$；

(C) $f(x)=x^2+|\sin x|$；　　(D) $f(x)=\dfrac{[x(e-1)]^x}{(e+1)^x}$.

(5) 下列函数中为 $\mathbf{R}$ 上有界函数的是________；

(A) $x\sin x$； (B) $x\sin\dfrac{1}{x}$；

(C) $\dfrac{\sin x}{x}$； (D) $\sin(2x)$.

(6) 下列函数中为周期函数的是________.

(A) $y = x\sin x$； (B) $y = \sin x\cos x$；

(C) $y = x\cos x$； (D) $y = \sin\dfrac{1}{x}$.

2. 设 $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & |x| \leqslant 2 \\ 0, & |x| > 2, \end{cases}$ 求函数 $f(x-1)$, $f(f(x))$.

3. 设函数 $f(x) = 2^x + 3$,求函数 $g(x)$ 使 $f[g(x)] = \sqrt{x} + 4$.

4. 设对于任何两个实数 u, v,函数 $f(x)$满足 $\dfrac{f(u)+f(v)}{2} = f\left(\dfrac{u+v}{2}\right)$. 证明:$f(x)$ 是一次函数.

5. 设在函数 $y = \dfrac{b+ax^2}{1+x^2}$, $x \in (-\infty, +\infty)$ 中,a, b 为常数,且 $a < b$,求其反函数定义域.

课外练习 1 - 1

1. 下列函数哪些是相同的?

$f_1(x) = \sqrt{1+4x+4x^2}$； $f_2(x) = |1+2x|$；

$f_3(t) = 1+2t$； $f_4(y) = 1+2y$；

$f_5(x) = 1+2x\ \left(x \neq -\dfrac{1}{2}\right)$； $f_6(x) = \dfrac{(1+2x)^2}{1+2x}$.

2. 函数 $y = \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2}}$ 与 $y = \sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}}$ 是否是相同的函数?为什么?

3. 对于满足下列条件的函数 $f(x)$各举一例,但其中 $f(x)$不能是常数.

(1) $f(ax) = af(x)$； (2) $f(x+2) = f(x)$；

(3) $f(x+y) = f(x)f(y)$.

4. 已知一次函数 $y = ax + b$ 的反函数仍为 $y = ax + b$,试确定常数 a, b.

5. 设对任何 x 值都有

$$[f(x)]^2 + [g(x)]^2 = 1,\ g(x) > 0.$$

并设 $f(x)$ 是周期函数,其周期为 P,这时 $g(x)$ 是否为周期函数?

6. (1) 用 $y=g(x)$ 表示 $y=f(x)$ 的反函数,则有恒等式

$$f[g(x)]=g[f(x)]=x \tag{1}$$

试以函数 $f(x)=\dfrac{3x-2}{2x+1}$ 为例,求出 $g(x)$,并验证恒等式(1).

(2) 设函数 $f(x)$ 对于自变量的任意两个值 x, x' 都满足

$$f(x)+f(x')=f(xx').$$

证明其反函数 $g(x)$ 满足

$$g(x+x')=g(x)g(x').$$

7. 设函数 $f(x)=\dfrac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}$, $(a>0, a\neq 1)$ 试用 $f(x)$ 及 $f(y)$ 表示 $f(x+y)$.

简答和提示

课内练习 1-1

1. 选择题

(1) (D); (2) (C); (3) (C); (4) (C); (5) (D); (6) (B).

2. $f(x-1)=\begin{cases}3-x^2+2x, & -1\leqslant x\leqslant 3\\ 0, & x<-1 \text{ 或 } x>3,\end{cases}$

$f(f(x))=\begin{cases}4-(4-x^2)^2, & \sqrt{2}\leqslant|x|\leqslant 2\\ 4, & |x|>2\\ 0, & |x|<\sqrt{2}.\end{cases}$

3. $g(x)=\log_2(\sqrt{x}+1)$.

4. 利用对任意 $u, v, \frac{u+v}{2}$二点连线函数斜率相等.

5. $[a, b]$.

课外练习 1-1

1. $f_1(x)$与 $f_2(x)$, $f_3(x)$与 $f_4(x)$.

2. 不同,因定义域不相同.

3. (1) $f(x)=kx\ (k\neq 0)$. (2) $f(x)=\sin\pi x$. (3) $f(x)=3^x$.

4. $a=-1$, b 为任意实数.

5. $[g(x+P)]^2=1-[f(x+P)]^2=1-f^2(x)=[g(x)]^2$,又 $g(x)>0$.

从而 $g(x+P)=g(x)$. 故 $g(x)$也是以 P 为周期的周期函数.

6. 因对任意值 u 有