数学奥林匹克教练丛书

（初中三年级用）

主编 魏超群

黑龙江教育出版社

数学奥林匹克教练丛书

（初中三年级用）

主编　魏超群

宫长泰　李　伟　编　著
张贵刚　赵　伟

黑 龙 江 教 育 出 版 社

1991年·哈尔滨

数学奥林匹克教练丛书

初中三年级用

主编 魏超群

责任编辑：韩殿发

封面设计：冯春兰

黑龙江教育出版社出版(哈尔滨市道里区九站街 1 号)

哈尔滨龙华印刷厂印刷·黑龙江省新华书店发行

开本787×1092毫米1/32·印张 10.125 ·字数 190 千

1991年7月第1版·1991年7月第1次印刷

印数：1—19,404

ISBN 7-5316-1436-7/G·1067 定价：3.30元

前　言

数学竞赛是数学课外活动的主要形式之一，它可以扩大学生的视野，锻炼学生的智慧，帮助学生理解数学在现实生活、生产、科技中的地位和作用，促进学生个性品质的形成和数学才能的发挥，有利于培养人才。

数学竞赛活动在世界各国都很活跃，迄今为止，国际数学奥林匹克（*IMO*）已经进行了31届大赛。自1985年我国首次参加第26届“*IMO*”以来，逐年取得优异的成绩，现已进入世界强国之列。为使这项活动更加深入更加广泛地开展，有计划分层次地对不同年级的学生进行训练，我们编写了《数学奥林匹克教练丛书》。全书共三册，分别供初中一、二、三年级用。

本套教练丛书以《中学数学教学大纲》为依据，参考了《中学数学竞赛大纲》（草案），以现行初中代数、几何课本为基础，考虑到学生的实际水平，通俗易懂地渗透数学思想，数学方法，强化数学技能与技巧的训练，培养学生既能提高数学成绩，又能掌握参加各类数学竞赛的基本常识和解题要领。

每册书按相应的教科书内容同步精选专题，介绍基本原理，范例与方法，给出相关的练习题与答案。

参加本册编写的有：官长秦、李伟、张贵刚、赵伟。统

稿官长泰。

借本书出版的机会，敬请广大读者提出批评指正。在此深表谢意！

编　者

1991年1月

目　　录

一 函 数

（一）基本原理

1. 基本概念

（1）平面直角坐标系；（2）函数的概念；（3）正比例函数；（4）反比例函数；（5）一次函数；（6）二次函数。

2. 两点间距离公式

（1）有序实数对与坐标平面内的点是一一对应的。

（2）同一数轴上两点间的距离 设 $A(x_A)$、$B(x_B)$为同一数轴上任意两点，则有向线段 AB的长度为
$|AB|=|X_B-X_A|$。

（3）坐标平面内任意两点间的距离 设两点$P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_{21},y_2)$，则P_1、P_2两点间的距离为

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

3. 正比例函数$y=kx$ $(k\neq0)$的图象和性质

（1）图象：经过原点的直线。

（2）性质：$k>0$，直线$y=kx$在一、三象限，y随x增大而增大。$k<0$，直线$y=kx$在二、四象限，y随x的增大而减小。

4. 反比例函数 $y=\frac{x}{k}(k\neq0)$的图象和性质

(1) 图象：双曲线。

(2) 性质：$k>0$，双曲线的两支分别在第一、三象限内，y 随 x 的增大而减小；当 $k<0$ 时，双曲线的两支分别在第二、四象限内，y 随 x 的增0而增大。

双曲线的两个分支都无限接近 x 轴、y 轴，但永远不与 x 轴、y 轴相交。

5. 一次函数 $y=kx+b(k\neq 0)$ 的图象和性质

(1) 图象：过点 $(0, b)$ 与直线 $y=kx$ 平行的直线。

(2) 性质：$k>0$，y 随 x 的增大而增大；$k<0$，y 随 x 的增大而减小。

6. 二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的图象和性质

(1) 图象：抛物线。

(2) 性质：

①对称轴为直线 $x=-\dfrac{b}{2a}$；

② 顶点为 $\left(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$；

③$a>0$，抛物线开口向上；$a<0$，开口向下。

④当 $a>0$ 时，在对称轴的左侧，y 随着 x 的增大而减小；在对称轴右侧，y 随着 x 的增大而增大。当 $a<0$ 时，在对称轴的左侧，y 随着 x 的增大而增大；在对称轴的右侧，y 随着 x 的增大而减小。

⑤若 $a>0$，则当 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 时，$y_{最小值}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$；

若 $a<0$，则当 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 时，$y_{最大值}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$。

为了方便、在数学上常用 $f(x)$ 表示一个 x 的函数，用 $f(a)$ 表示当 $x=a$ 时，函数 $f(x)$ 的值。

（二）范例与方法

1. 求函数的解析式

例1 已知一次函数的自变量的取值范围是 $2\leqslant x\leqslant 6$，函数值的范围是 $13\geqslant y\geqslant 9$，求这个一次函数。

思路：运用一次函数的解析式 $y=kx+b(k\neq 0)$，当 $x=2$ 时，$y=13$ 及当 $x=6$ 时，$y=9$，来确定 k 和 b 的值即可。

解：设 $y=kx+b$，则依题意，得 $\begin{cases}2k+b=13\\6k+b=9,\end{cases}$

解得 $k=-1$，$b=15$。 $\therefore$ $y=-x+15(2\leqslant x\leqslant 6)$。

【说明】 在函数自变量 x 的取值范围里，x 每取一个值，函数 y 就有一个确定的值与它对应的关系来建立方程(组)，再解这个方程（组），常是确定解析式中的某些常数的常用方法。

例2 已知抛物线 $y=f(x)$，当 $x=2$ 时有最小值 -9，且 $f(x)=0$ 的两个根的平方和是26，求 $f(x)$ 的解析式。

思路：求二次函数 $f(y)=ax^2+bx+c$，也就是应用题中条件，求 a、b、c 的值。

解一：令 $f(x)=ax^2+bx+c$，则依题意，得

$$\begin{cases}-\dfrac{b}{2a}=2\\ \dfrac{4ac-b^2}{4a}=-9\\ x_1{}^2+x_2{}^2=\left(-\dfrac{b}{a}\right)^2-\dfrac{2c}{a}=26,\end{cases}$$

解得$a=1$，$b=-4$，$c=-5$。∴ $f(x)=x^2-4x-5$。

解二：由题设，可得顶点是 $(2,-9)$，故可设$f(x)=a(x-2)^2-9=ax^2-4ax+4a-9$。因两根的平方和是26，故 $x_1^2+x_2^2=16-2\cdot\frac{4a-9}{a}$，即$16-2\cdot\frac{4a-9}{a}=26$，解得$a=1$，∴$f(x)=x^2-4x-5$。

【说明】 题给的条件不同，常设不同形式的解析式，以使解题过程简化。二次函数的表达式有下列三种形式：

①一般式：$y=ax^2+bx+c$，若已知三点坐标求解析式，常用一般式确定a、b、c。

②顶点式：$y=a(x+m)^2+k$，若给定的条件与函数图象的对称轴、顶点、函数的极值有关时，常用顶点式确定a、m、k，再化为一般式。

③交点式：$y=a(x-x_1)(x-x_2)$，若给定的条件和图象与x轴的交点有关时，常设交点式确定a，再化为一般式。

例3. 已知抛物线$y=ax^2+bx+c$的顶点在直线$y=x$上，且这个顶点和原点的距离为$\sqrt{2}$。又知抛物线与x轴两交点的距离为$2\sqrt{2}$，求此抛物线的解析式。

思路：设抛物线为$y=a(x+m)^2+k$，则顶点$(-m,k)$在$y=x$上，可得一方程；又顶点到原点的距离为$\sqrt{2}$可得第二个方程；再由抛物线与x轴两交点的距离为$2\sqrt{2}$得第三方程，由这三个方程可确定m、k、a的值。

解：令 $y=a(x+m)^2+k$，由题设，得

$$\begin{cases}-m=k\\ m^2+k^2=2,\end{cases}$$

因此抛物线的顶点为(1，1)或(－1，－1)。

当顶点在（1，1）时，$y=a(x-1)^2+1$

$$=ax^2-2ax+a+1.$$

因两根之差为$2\sqrt{2}$，故$\dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\dfrac{\sqrt{-4a}}{|a|}=2\sqrt{2}$.

解得 $a=-\dfrac{1}{2}$，$\therefore y=-\dfrac{1}{2}x^2+x+\dfrac{1}{2}$.

当顶点在(－1，－1）时，$y=a(x+1)^2-1$

$$=ax^2+2ax+a-1.$$

同理可得，$a=\dfrac{1}{2}$，$\therefore\ y=\dfrac{1}{2}x^2+x-\dfrac{1}{2}$.

【说明】 要注意二次函数、一元二次方程、二次三项式之间的密切联系。

例4 已知不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集是 $-2<x<-\dfrac{1}{2}$，而 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的图象与y轴的交点的纵坐标是方程 $y^2-y-2=0$ 的正数解，求此二次函数表达式中的 a、b、c的值。

思路： 抓住一元二次不等式、二次函数、一元二次方程之间的联系，即可确定 a、b、c 的值。

解： $\because\ y^2-y-2=0\Rightarrow y_1=2, y_2=-1$.

又 $\because\ ax^2+bx+c<0$ 的解集为 $-2<x<-\dfrac{1}{2}$，

而 $y=ax^2+bx+c$的图象与y轴的交点的纵坐标是 2。

$\therefore\ y=ax^2+bx+c$ 的图象大致如图(1－1)。

∴ 图象过三点 $A(-2,\ 0)$、$B\left(-\frac{1}{2},0\right)$、$C(0,2)$。

则 $\begin{cases} 4a-2b+c=0 \\ \frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b+c=0 \\ c=2。\end{cases}$

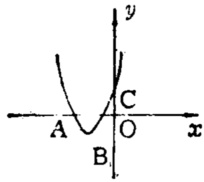

图 1—1

解得$a=2, b=5, c=2$。

2. 二次函数的极值

对于二次函数 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq0$，自变量 x 的取值范围是全体实数）的极值求法，常见的初等方法有三种：

1. 配方法

$$\because \quad y=ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

∴ 若$a>0$，则当 $x=-\dfrac{b}{2a}$时，$y_{最小值}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$，

若$a<0$，则当 $x=-\dfrac{b}{2a}$时，$y_{最大值}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$。

2. 公式法

直接使用顶点坐标公式求具体函数的极值。

3. 判别式法

在二次函数$y=ax^2+bx+c$中，把 y 看作是参数，得到关于 x 的二次方程 $ax^2+bx+(c-y)=0$。

要使 x 为实数，则应有 $b^2-4a(c-y)\geqslant0$，

即$4ay\geqslant4ac-b^2$。

当　$a>0$ 时，$y\geqslant\dfrac{4ac-b^2}{4a}$，此时$y_{最小值}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$；

当　$a<0$时，$y\leqslant\dfrac{4ac-b^2}{4a}$，此时 $y_{最大值}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$。

如果需要求出取得极值时相应的 x 值，则只需要将 $y=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$代入 $ax^2+bx+(c-y)=0$ 求出 x 的值即可。

例5　x 为何值时，函数$y=\dfrac{5}{x^2-4x+5}$有最大值？并求最大值。

思路： 先求$z=x^2-4x+5$的最小值。

解： 令$z=x^2-4x+5=(x-2)^2+1$，当$x=2$时，$z_{极小值}=1$。

$\therefore$　$y_{极大值}=5$，此时$x=2$。

例6　求函数 $y=\dfrac{m}{3x^2+\sqrt{3}x+2}$的极值($m\neq0$)。

思路： 先求$z=3x^2+\sqrt{3}x+2$的极值，再按$m>0$，$m<0$两种情况分别研究。

解： 令$z=3x^2+\sqrt{3}x+2=\left(\sqrt{3}x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4}$，

当$x=-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$时，$z_{极小值}=\dfrac{7}{4}$。

当 $m>0$ 时，$y_{极大值}=\dfrac{4}{7}m$，此时 $x=-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$；

当$m<0$ 时，$y_{极小值}=\dfrac{4}{7}m$。

例7 求函数 $y=x\sqrt{1-x^2}$ 的极值。

解：当 $x>0$ 时，$y=\sqrt{x^2-x^4}$。令 $z=x^2-x^4=-\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$。当 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$时，$y=\sqrt{z}=\frac{1}{2}$是极大值。

当 $x<0$时，$y=-\sqrt{x^2-x^4}$。当 $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$时，

$y=-\frac{1}{2}$是极小值。

例 8 求函数 $y=x+\sqrt{10ax-23a^2-x^2}$ 的最大值。

解：令 $y=x+\sqrt{10ax-23a^2-x^2}$，

则 $y-x=\sqrt{10ax-23a^2-x^2}$。

平方整理得 $2x^2-2(y+5a)x+y^2+23a^2=0$ ………①

$\because$ x为实数，$\therefore \Delta=(y+5a)^2-2(y^2+23a^2)\geqslant 0$，即 $(y-3a)(y-7a)\leqslant 0$。当$a>0$时，$3a\leqslant y\leqslant 7a$；当 $a<0$ 时，$7a\leqslant y\leqslant 3a$。又$\because 10ax-23a^2-x^2\geqslant 0$，$\therefore a>0$ 时，$(5-\sqrt{2})a\leqslant x\leqslant(5+\sqrt{2})a$；$a<0$时，$(5+\sqrt{2})a\leqslant x\leqslant(5-\sqrt{2})a$。

当 $a>0$ 时，$y=7a$代入①，得$x=6a$；

$a<0$时，$y=3a$代入①，得$x=(4\pm\sqrt{5})a$，满足上式。

$\therefore$ $a>0$时，$y_{最大值}=7a$；

$a<0$时，$y_{最大值}=3a$。

例8 如图(1—2)在$\triangle ABC$中，已知$BC=4$，$AC=2\sqrt{3}$，$\angle ACB=60°$，在 BC 边上有一动点P，过P作$PD//AB$，与AC相交于 D，连 AP，设 $BP=x$，

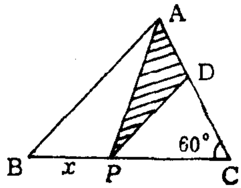

图 1—2

当 x 取何值时，$\triangle APD$ 的面积有最大值，并求出最大值。

思路： 利用 $S_{\triangle APD}=S_{\triangle APC}-S_{\triangle DPC}$，即可得到解决。

解： $\because\ PD//AB,\therefore \triangle PCD\backsim\triangle ABC$.则 $\dfrac{CP}{CB}=\dfrac{CD}{CA}$.

$$\therefore\quad \frac{4-x}{4}=\frac{CD}{2\sqrt{3}},\quad CD=\frac{\sqrt{3}(4-x)}{2}.$$

因此，$\triangle APD$ 的面积 $y=S_{\triangle APC}-S_{\triangle DPC}=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}$

$(4-x)\sin60^\circ-\frac{1}{2}\cdot(4-x)\cdot\frac{\sqrt{3}\ (4-x)}{2}\sin60^\circ=-\frac{3}{8}u^2$

$+\frac{3}{2}x$.

$$当\quad x=-\frac{\frac{3}{2}}{2\times\left(-\frac{3}{8}\right)}=2\ 时，\quad y_{最大值}=\frac{-\left(\frac{3}{2}\right)^2}{4\times\left(-\frac{3}{8}\right)}$$

$$=\frac{3}{2}.$$

因此，当 $x=2$ 时，$\triangle APD$ 的面积最大，最大面积是 $\frac{3}{2}$。

【说明】 求解最值的实际问题，首先要根据题意画出图形，并由图形的性质列出函数的表达式（解析式），求出 y 的极值时，还要注意自变量是否在它的取值范围内，并符合实际意义。

3. 根的分布问题

利用二次函数的图象抛物线与 x 轴交点的位置关系，可

以解决一些二次方程根的分布问题。

例9 m 取何实数时，已知函数 $y=(m-2)x^2-(3m+6)x+6m(m\neq2)$ 的图象与 x 轴的：(1) 两个交点都在原点的右侧；(2) 两个交点分别在原点两侧；(3) 两个交点中的一个必是原点。

思路 将已知二次函数图象与 x 轴交点的位置与原点的位置关系，转化成相应的一元二次方程 (1) 有两个正根；(2) 有一个正根和一个负根；(3) 有一个根是0.来解决则较顺。

解：(1) 函数图象与 x 轴两个交点都在原点右侧，则应满足

$$\begin{cases} m-2\neq0 \\ \Delta>0 \\ x_1+x_2>0 \\ x_1\cdot x_2>0 \end{cases} \text{即} \begin{cases} m\neq2 \\ -3(5m+2)(m-6)>0 \\ \dfrac{3m+6}{m-2}>0 \\ \dfrac{6m}{m-2}>0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m\neq2 \\ -\dfrac{2}{5}<m<6 \\ m<-2\text{或}m>2 \\ m<0\text{或}m>2 \end{cases} \Rightarrow 2<m<6.$$

(2) 依题意，同理可得

$$\begin{cases} m-2\neq0 \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m\neq2 \\ \dfrac{6m}{m-2}<0 \end{cases} \Rightarrow 0<m<2.$$