



数学奥林匹克竞赛编辑部编

数学奥林匹克竞赛专家委员会审定

<http://www.ao-lin.com.cn>

数学奥林匹克竞赛

标准教材

七年级



北京教育出版社
天津出版社



数学奥林匹克竞赛编辑部编

数学奥林匹克竞赛专家委员会审定

数学奥林匹克竞赛 标准教材

七年级

北京教育出版社
天津出版社

责任编辑：吕心鹏 解重庆

图书在版编目 (CIP) 数据

数学奥林匹克竞赛标准教材. 七年级/数学奥林匹克
竞赛编辑部编. —北京：文津出版社，2004

ISBN 7-80554-456-5

I. 数… II. 数… III. 数学课—初中 教学参
考资料 IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2004) 第 062577 号

数学奥林匹克竞赛标准教材

七年级

数学奥林匹克竞赛编辑部编

*

北京教育出版社 出版
文津出版社

(北京北三环中路 6 号)

邮政编码：100011

网 址：www.hph.com.cn

北京出版社出版集团总发行

北京奥林文化艺术中心经销

北京乾沣印刷有限公司印刷

*

880×1230 毫米 32 开本 7.25 印张 187 千字

2004 年 6 月第 1 版 2004 年 6 月第 1 次印刷

ISBN 7-80554-456-5/G · 62

定价：10.00 元

前言

奥林匹克知识竞赛是国内外著名的高水平知识竞赛。

自改革开放以来，奥林匹克知识竞赛传入我国，在全国各地广泛开展。近年来，各地的奥校、奥班更如雨后春笋，层出不穷，市场上各类辅导读物、练习卷、教材更是名目繁多、良莠不齐。

为使广大读者能够获得真正科学、规范的奥林匹克教材和相应的试卷及辅导读物，使众多学子能够真正学习到科学、规范的奥林匹克各学科知识，我们特约请我国奥林匹克知识竞赛最早的倡议者、潜心于此事业的各学科专家以及长年从事奥林匹克知识教学的优秀教练员组成“数学奥林匹克竞赛编辑部”和“数学奥林匹克竞赛专家委员会”，双方通力合作，编写了这套《数学类奥林匹克竞赛标准教材》系列丛书。

本丛书的编写遵循了以下几条基本的科学原则：

一、它遵循了奥林匹克知识竞赛所一贯提倡和推行的科学、严密、规范的基本原则；

二、它涵盖了国家教育部新课程标准所规定的各年级、各主要学科的全部知识内容；

三、它在涵盖新课标内容的基础上，科学地加宽、扩大了知识内容；

四、它在加宽、扩大各学科知识内容的基础上，科学地加深、加难了知识内容；

五、它在各学科例题遴选上以我国各地奥赛经验为基础，向国际奥林匹克知识竞赛课程靠拢；

六、它在各学科知识论述上深入浅出，清晰透彻，以便于读者自学。

本丛书在体例编排上力求务实、高效，使读者能用较短的时间获得较高的学习成绩，同时本丛书偏重于开拓解题思路和解题技巧，使读者通过本丛书的学习和训练，找到规律性的东西，从而达到举一反三的目的，并进而提高其整体素质。

集百花于一枝，汇群芳于一卷，是我们多年的夙愿。本丛书汇集和渗透了初高中各学科专家和奥校优秀教练员多年教学经验和成果，特别是解题思路和方法，是他们多年教学经验的结晶，我们为能有这样高水平的专家、学者加盟这套丛书的撰写感到振奋和骄傲，同时这也是广大中学生的幸事。由于我们水平有限、加之时间仓促，在编辑成书过程中难免会存在一些缺陷和遗漏，恳请广大读者和有关专家学者提出宝贵意见，以使本丛书成为广大读者喜爱的一套有益的书籍。

参加本书的编写人员有：乔家瑞 高尔柳 方磊 郑力等

数学奥林匹克竞赛编辑部

2004年5月



使用说明

本教材经过一年多的紧张撰写，终于付梓了。为了更好地发挥本教材的作用，我们提出下面建议，以供同学们参考：

一、何时使用本书

本教材是按国家教育部 2000 年春季颁布的最新《九年义务教育教学大纲》（修订版）所规定的初中各年级数学知识内容，在进一步体现 2001 年教育部颁发实施的“新课程标准”精神的基础上，按教学大纲顺序编写的，并以教科书中的章为编写单位，每章都是由下述三部分内容组成的：

1. 课内知识的总结、概括；
2. 课内知识的延伸、拓广；
3. 课外知识的选讲。

例如，第一册第五单元“二元一次方程组”中，利用换元法解一次方程组、解一次方程组的相反问题、与一次方程组有关的综合题等内容属于课内知识的总结、概括；待定系数法的简单应用、应用题选解等内容属于课内知识的延伸、拓广；而行列式浅说、一次不定方程则属于课外知识选讲。

显而易见，同学们在课堂上学习到哪个章节，就可以选读本教材中的相应内容。学习有困难的同学，应集中精力学习课内知识的总结、概括部分的内容，以便扫清学习中的障碍，迅速提高学习成绩；学习成绩较好的同学可选读课内知识的总结、概括及延伸、拓广两部分内容，从而在学习知识的同时，不断地改进学习方式及学习方法，逐步领略并掌握科学的思维方法；有余力的同学还可以进

一步学习一部分课外知识，以便开扩眼界；参加数学奥林匹克学习的同学，还应精读课外知识选讲部分，掌握课外知识的精髓及与课内知识的内在联系，以避免参加课外学习走过场的不良倾向。

二、怎样使用本书

1. 聘请家庭教师辅导的同学，可要求辅导老师按本教材的相关内容进行辅导，以加强针对性，避免盲目性，使掌握知识和提高能力并重，从而提高家庭辅导的效果。

2. 多数同学是通过自学，系统地掌握本教材的相关内容，开始自学时会遇到重重困难，最大的困难就是读不懂、读得慢。解决这个问题的灵丹妙药就是“坚持”，只有持之以恒才能逐渐读懂一些，读得快一些。再坚持一段时间就会产生飞跃，出现喜人的效果，达到读得懂、读得快的境界。

在自学过程中，要注意：

(1) 先分段阅读，再整体阅读。主要明确新知识有哪些，并列出简单的提要；新知识与课内哪些知识有联系，并归纳出主要的联系内容；新知识中有哪些疑难问题。

(2) 在认真阅读的基础上，应深钻细研、分析综合、抽象归纳，重点解决以下三个问题：新知识产生的背景；新知识的本质特征；使用新知识的方法，力求全面掌握新知识，把书本上的知识转化成为自己的知识。

(3) 在把每章的内容学完之后，要演练一定数量的题目，并着重总结知识间的纵横关系，知识中所蕴涵的数学思想和方法，要尝试从更高的思维起点，更多的思维指向去认识课内所学习的知识，要学习用写“专题”的方法进行对比、归纳。

通过自学一章的内容后，要及时地总结自学方法、考查自学效果。

“理想的书籍是智慧的钥匙”，我们希望本教材能使同学们“学会”并“会学”，掌握开启知识宝库的金钥匙。

数学奥林匹克竞赛编辑部

2004年5月

目 录

代数部分

第一章 代数初步知识 (2)

- § 1.1 从算术到代数的过渡 (2)
 - 一、学习用归纳的方法观察事物 (2)
 - 二、学习从不同角度思考问题 (5)
 - 三、要学习阅读数学书 (7)
- § 1.2 数的整除 (9)

第二章 有理数 (21)

- § 2.1 有理数的意义与运算 (21)
 - 一、比较有理数大小的特殊方法 (21)
 - 二、有理数计算的常用技巧 (23)
- § 2.2 整数的奇偶性 (26)
- § 2.3 简单的染色问题 (29)

第三章 整式的加减 (41)

- § 3.1 整式的加减 (41)
 - 一、单项式与多项式的次数 (41)
 - 二、代数式的值的常用求法 (43)

§ 3.2	质数与合数	(45)
-------	-------------	------

第四章 一元一次方程 (59)

§ 4.1	一元一次方程的解法与应用	(59)
	一、换元法的形成背景	(59)
	二、用参数法解答应用题	(62)
§ 4.2	整数的分类	(65)

第五章 二元一次方程组 (79)

§ 5.1	一次方程组的解法与应用	(79)
	一、利用换元法解一次方程组	(79)
	二、解一次方程组的相反问题	(81)
	三、与一次方程组有关的综合题	(82)
	四、待定系数法的简单应用	(84)
	五、应用题选解	(86)
§ 5.2	行列式浅说	(89)
	一、从解二元一次方程组中发现规律	(89)
	二、用行列式解三元一次方程组	(92)
	三、行列式的性质	(95)
§ 5.3	一次不定方程	(100)
	一、一般概念	(100)
	二、二元一次不定方程的一般解法	(102)
	三、三元一次不定方程的解法	(103)

第六章 一元一次不等式和一元一次不等式组 (118)

§ 6.1	不等式的性质及解法	(118)
	一、求解不等式的相反问题	(118)
	二、用分类讨论思想解一元一次不等式组	(119)
	三、与不等式及不等式组有关的综合题	(120)
	四、与不等式有关的应用题	(123)

§ 6.2 抽屉原则	(125)
------------------	-------

第七章 整式的乘除

(139)

§ 7.1 乘法公式	(139)
一、完全平方公式 $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ 的 推广	(139)
二、乘法公式的变形使用	(142)
§ 7.2 完全平方数	(144)
一、完全平方数的定义和性质	(144)
二、相邻平方数	(148)
§ 7.3 简单数列的求和	(149)
一、等差数列	(151)
二、等比数列	(155)

平面几何部分

第一章 线段、角

(170)

§ 1.1 求作直线的总条数的方法	(170)
§ 1.2 求图形个数的一般方法	(173)
一、求线段的总条数	(173)
二、求三角形的总个数	(175)
三、求正方形的总个数	(175)
§ 1.3 客观题的解法 (一)	(178)

第二章 相交线、平行线

(196)

§ 2.1 几何命题的证明	(196)
§ 2.2 简单的逻辑推理	(201)
§ 2.3 客观题的解法 (二)	(205)

代数部分

429

第一章 代数初步知识

本章主要内容有代数式、公式和简易方程等。

代数式: algebraic expression
公 式: formula

首先,要正确理解“字母表示数”的意义,这是实现从算术到代数的过渡的关键步骤,是学好初中代数的基础。从知识上看,用字母表示数体现了从算术到代数的过渡,是处于知识转折点的关键内容;从思维方法上看,用字母表示数体现了直观形象思维向抽象思维的过渡,是认识上的一次飞跃。

其次,列代数式是运用代数方法解决数学问题的前提,是本章的重点内容。列代数式时,应弄清楚语句中各种数量的意义及相互关系,特别要抓住关键词语。求代数式的值时,应认清运算顺序,熟练地掌握求代数式的值的基本方法。

同时,还要掌握列方程解答应用问题的基本思路,有意识培养应用所学数学知识解决实际问题的能力。

通过本章的学习要注意提高观察能力和归纳能力。

§1.1 从算术到代数的过渡

一 学习用归纳的方法观察事物

通过对特殊事例的观察、分析、归纳,得出一个关于这类事物

的一般规律,然后再用其他特殊事例加以验证.

例1 从1开始,连续的奇数相加,和的情况如下:

$$1=1=1^2,$$

$$1+3=4=2^2,$$

$$1+3+5=9=3^2,$$

$$1+3+5+7=16=4^2,$$

$$1+3+5+7+9=25=5^2,$$

奇数: odd number

请你推测出,从1开始, n 个连续的奇数相加,它们的和 S 的公式是什么?并计算:

$$1+3+5+7+9+11+13;$$

$$1+3+5+7+9+11+13+15+17+19;$$

$$11+13+15+17+19+21+23+25;$$

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=225, \text{求整数 } n.$$

解: $\because$ 从1开始,1个奇数的和是 1^2 ;前2个奇数的和等于2的平方,即 2^2 ;前3个奇数的和等于3的平方,即 3^2 ;前4个奇数的和等于4的平方,即 4^2 ;……

$\therefore$ 从1开始, n 个连续的奇数相加,它们的和 $S=n^2$.

$\therefore 1+3+5+7+9+11+13$ 是由1开始,7个连续的奇数相加,

$$\therefore 1+3+5+7+9+11+13=7^2=49.$$

同样, $1+3+5+7+9+11+13+15+17+19$ 是由1开始,10个连续的奇数相加,

$$\therefore 1+3+5+7+9+11+13+15+17+19=10^2=100.$$

$$\therefore 11+13+15+17+19+21+23+25=(1+3+5+7+\cdots+25)-(1+3+5+7+9)$$

$$=13^2-5^2$$

提示:

应该是从1开始, n 个连续的奇数相加,而不是从别的奇数开始,并且是“连续”的奇数相加,而不是 $1+5+11+17+\cdots$.

注意转化成从1开始, n 个连续的奇数相加的形式.

由 $1+3+5+\cdots+(2n-1)=225=15^2$ 求 n ,这是求从1开始, n 个连续的奇数相加的相反问题.

$$=169-25$$

$$=144.$$

$$\therefore 1+3+5+\cdots+(2n-1)=225=15^2,$$

$\therefore 2n-1$ 是由 1 开始, 第 15 个奇数, 即 29.

$$\therefore n=15.$$

偶数: even number

练一练

从 2 开始, 连续的偶数相加, 和的情况如下:

$$2=1 \times 2,$$

$$2+4=6=2 \times 3,$$

$$2+4+6=12=3 \times 4,$$

$$2+4+6+8=20=4 \times 5,$$

$$2+4+6+8+10=30=5 \times 6,$$

答案:

$$S=n(n+1).$$

$$\textcircled{1} 110;$$

$$\textcircled{2} 12 \times 13 - 5 \times 6 = 126;$$

$$\textcircled{3} 2550.$$

请你推测出, 从 2 开始, n 个连续的偶数相加, 它们的和 S 的公式是什么? 并计算:

$$\textcircled{1} 2+4+6+8+10+12+14+16+18+20;$$

$$\textcircled{2} 12+14+16+18+20+22+24;$$

$$\textcircled{3} 2+4+6+8+10+\cdots \text{ (共 50 个偶数)}.$$

例 2 找出每列数的排列规律, 然后用代数式表示第 n 个数:

$$(1) 1, 2, 3, 4, 5, \cdots;$$

$$(2) 1 \times 2, 2 \times 3, 3 \times 4, 4 \times 5, 5 \times 6, \cdots;$$

$$(3) \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \cdots.$$

解: 和例 1 相同, 也是一个由特殊到一般的归纳过程.

(1) $\therefore$ 第 1 个数是 1, 第 2 个数是 2, 第 3 个数是 3……

$\therefore$ 第 n 个数是 n .

(2) $\therefore$ 第 1 个数的被乘数是 1, 第 2 个数的被乘数是 2, 第 3 个数的被乘数是 3……

而第 1 个数的乘数是 2, 第 2 个数的乘数是 3, 第 3 个数的乘数是 4……即比相应的被乘数大 1,

∴ 第 n 个数的被乘数是 n , 乘数是 $n+1$,

∴ 第 n 个数是 $n(n+1)$.

(3) 这些分数的分子依次是 1, 2, 3, 4, ..., 分母依次是 2, 3, 4, 5, ...,

∴ 第 n 个数是 $\frac{n}{n+1}$.

练一练

写出下述每列数的第 n 个数:

- ① 5, 6, 7, 8, 9, ...;
- ② 0, 1, 2, 3, 4, ...;
- ③ 1, 4, 9, 16, 25, ...;
- ④ 2, 5, 10, 17, 26,

二 学习从不同角度思考问题

例 1 我国著名的数学家苏步青先生, 年轻时曾经做过下面的一道思考题, 请同学们也来试一试, 原题如下:

甲和乙二人从东、西两地同时出发, 相对而行, 两地相距 100 里, 甲每小时走 6 里, 乙每小时走 4 里.

如果甲带了一条小狗, 狗的奔跑速度是每小时跑 10 里. 小狗随甲同时出发, 并向乙跑去, 当它遇到乙后, 就立即回头向甲跑去; 遇到甲后又立即回头向乙跑去, ..., 直到甲、乙二人相遇狗才停住. 这条小狗一共跑了多少里路?

解: 设甲、乙二人经过 x 小

提示:

应从每列数中的位置号数与相应的数值关系入手. 如

位置号数	1	2	3	4	5	...
数值	1×2	2×3	3×4	4×5	5×6	...
	$1 \times (1+1)$	$2 \times (2+1)$	$3 \times (3+1)$	$4 \times (4+1)$	$5 \times (5+1)$	...

答案:

- ① $n+4$;
- ② $n-1$;
- ③ n^2 ;
- ④ n^2+1 .

分析:

如果我们从小狗奔跑的路线去寻找解题思路, 则会陷入困境而不能自拔, 这恰好中了命题人设置的陷阱.

事实上, 我们已经知道了小狗的奔跑速度, 只要知道小狗奔跑的时间, 就可以求出小狗所跑的路程. 而小狗奔跑的时间恰好是甲、乙二人相遇时所用的时间. 这样求甲、乙二人相遇时所用的时间, 便成了解决问题的关键.

时相遇。

$$\text{则 } (6+4)x=100.$$

解之，得 $x=10$ 。

因此，两人同时相向出发 10 小时后相遇，而小狗在这 10 小时内一直不停地奔跑，它的速度是每小时跑 10 里，所以这条小狗一共跑了 100 里。

透过现象看本质，不被表面现象所迷惑，而我们必须汲取的就是抓住问题的本质属性去解答问题。

例 2 小学时我们就会解答著名的“鸡兔同笼”问题，如：今有鸡兔同笼共 50 只，共有 180 条腿，求鸡兔各有多少只。

解：设有鸡 x 只，则有兔 $(50-x)$ 只。

$$\text{于是有 } 2x+4(50-x)=180.$$

$$\text{即 } 2x+200-4x=180.$$

解之，得 $x=10$ 。

$$\therefore 50-x=50-10=40.$$

答：有鸡 10 只，兔 40 只。

我们虽然找到了解答方法，但这不是最终目的，让我们换个角度继续深入地思考这个问题：

如果让每只鸡都抬起一条腿，让每只兔都抬起两条腿，即让它们表演“优美动人”的“金鸡独立”和“玉兔拜月”，这样它们一共抬起了 90 条腿，并且只有 90 条腿着地了。

请同学们快点跟着思考，因为鸡和兔的“优美动作”都坚持不了多长时间。

接着让鸡都飞向蓝天，让兔练习“金鸡独立”，也就是每只兔只有一条腿着地了，这样着地的腿数又减少了 50 条，而只有 40 条腿着地了，并且有一条腿着地就有一只兔，所以应该有 40 只兔，10 只鸡。

想一想：

我国古代传统的计算鸡兔同笼问题的两个公式如下：

兔数（或龟数）=（总足数 - 总头数的 2 倍）÷ 2；

鸡数（或鹤数）=（总头数的 4 倍 - 总足数）÷ 2。

请你考虑这两个公式是怎么得出来的。

可见，换个角度思考问题，就会摆脱单纯地记忆和模仿，从而达到有创造性地解答应用题的水平。

练一练

请你按照此方法快速求解下面的问题：

今有鸡兔同笼共 80 只，共 220 条腿，鸡兔各有多少只？

今有鸡兔同笼共 100 只，共 280 条腿，鸡兔各有多少只？

答案：

鸡 50 只，兔 30 只；

鸡 60 只，兔 40 只。

三 要学习阅读数学书

我们先看一个简单问题的求解过程：

如图 1-1，已知正方形的边长是 a ，以 B 为圆心， a 为半径画弧，求阴影部分的面积。

由于阴影部分的图形是一个不规则图形，很难直接求出它的面积。解决这类问题的途径，就是将它用规则图形面积的和、差来表示。在寻求和确定使用哪些规则图形面积的和、差时，要注意克服图形的交错性。本题是使用正方形 $ABCD$ 的面积减去扇形 BAC 的面积来表示阴影部分的面积。

解：∵ $S_{\text{正方形}ABCD} = a^2$ ，

$$S_{\text{扇形}BAC} = \frac{1}{4}\pi a^2,$$

∴ $S_{\text{阴影}} = S_{\text{正方形}ABCD} - S_{\text{扇形}BAC}$

$$= a^2 - \frac{1}{4}\pi a^2.$$

面积：area

弧：arc (of a circle)

圆心：centre of a circle

半径：radius

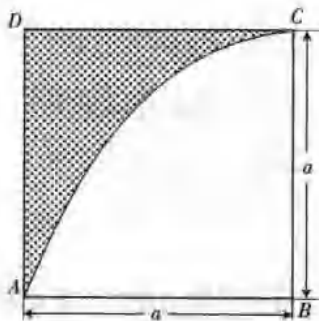


图 1-1

扇形：sector

这个题目虽然简单，但它的结论及相应图形却非常重要。

我们知道，任何一个复杂的数学问题，都是由若干个简单问题