大学数学名师导学丛书

概率统计
名师导学

《大学数学名师导学丛书》编写组　编

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

大学数学名师导学丛书

概率统计

名师导学

《大学数学名师导学丛书》编写组　编

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内容提要

本书是以大学文科的《概率论与数理统计》的教学大纲为依据，结合大学数学教学大纲并参考最主流教材编写而成。内容简练明确，解决问题透彻明了，易学易用。本书的结构特点是，在每章的开头，首先列出本章的知识要点，然后扼要论述知识要点分析和学习要求，随后通过丰富的典型例题，详细讲述解析方法和答案，最后附有极具针对性的习题与自测。

本丛书具有三“导”合一的特点：集中知识要点“导”学，典型例题与习题“导”讲，知识点学习和自测紧密“导”练。

本书适合学习《概率论与数据统计》的大学文科学生使用。

图书在版编目(CIP)数据

概率统计名师导学/《大学数学名师导学丛书》编写组编．—北京：中国水利水电出版社，2004

（大学数学名师导学丛书）

ISBN 7-5084-2231-7

Ⅰ．概… Ⅱ．大… Ⅲ．①概率论-高等学校-教学参考资料②数理统计-高等学校-教学参考资料 Ⅳ．021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 081259 号

书　　名	概率统计名师导学
作　　者	《大学数学名师导学丛书》编写组
出版、发行	中国水利水电出版社(北京市三里河路 6 号　100044)
	网址：www.waterpub.com.cn
	E-mail：sales@waterpub.com.cn
	电话：(010) 63202266（总机）、68331835（营销中心）
经　　售	全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　　版	北京安锐思技贸有限公司
印　　刷	北京市优美印刷有限责任公司
规　　格	787mm×1092mm　16 开本　9 印张　161 千字
版　　次	2004 年 8 月第 1 版　2004 年 8 月第 1 次印刷
印　　数	0001—6000 册
定　　价	12.50 元

凡购买我社图书，如有缺页、倒页、脱页的，本社营销中心负责调换

《大学数学名师导学丛书》编写组

主　　编： 牛庆银

副 主 编： 董玉才

编写人员： 牛庆银　董玉才　杨万利

郑素文　刘文学　陈建华

前 言

大学数学是理工科院校的重要基础课程。在教学改革后，由于授课时间的减少，很多学生陷入了“上课能听懂，课后解题却不知如何下手，考试更无所适从”的困境。为帮助学生摆脱困境，我们对辅导方式进行了积极创新，希望以有效的名师指导式辅导，使学生轻松学数学，牢固并灵活地掌握知识，从而取得优异的考试成绩。

本丛书根据目前大学数学教学大纲并参考最主流教材编写而成，由数位工作在教学一线的、教授级的中青年教师编写。内容简练明确，解决问题透彻明了，易学易用。本套丛书的结构特点是，在每章的开头，首先列出本章的知识要点，然后扼要论述知识要点分析和提出学习要求，随后通过丰富的典型例题，详细讲述解析方法和答案，最后附有极具针对性的习题与自测，学生灵活运用所学知识进行实践，使学生“知其然，更知其所以然”，巩固所学知识，从而能够协助学生顺利通过相应的日常学习和严格的考核。

本丛书具有三“导”合一的特点：

1)集中知识要点“导”学。通过把知识要点串联在一起，将大纲和知识要点分层讲解，方便学生查找，有的放矢地学习，避免遗漏。

2)典型例题与习题“导”讲。针对典型例题和习题，结合知识点进行精讲，给出多种解题思路、方法，使学生能触类旁通，从而轻松学习、解题和通过考试。

3)知识点学习和自测紧密“导”练。结合老师课堂练习必考和可能考的知识点以及考试要求，给出极具针对性的习题与自测，方便学生自我测试和掌握学习情况 。

由于编者水平有限，时间仓促，不妥之处在所难免，书中如有错漏之处，敬请广大读者批评、指正。

编　者

2004年6月

目录

第一章 随机事件和概率

一、知识要点

随机试验　样本空间　随机事件　频率　事件的关系　事件的运算　概率的定义　概率的基本性质　等可能概型　条件概率　全概率公式　贝叶斯公式　事件的独立性

二、知识要点分析

1. 样本空间与随机事件

在相同的条件下可以重复进行，并且每次试验有多种结果，而结果事先不可预知，称这样的试验为**随机试验**，一般用字母 E 表示．

随机试验中每一种可能的试验结果，称为一个**样本点**或**基本事件**，用 ω 表示；样本点的全体组成的集合，称为**样本空间**，记作 Ω.

在随机试验中，把一次试验中可能出现也可能不出现，而在重复独立试验中具有某种统计规律性的样本空间的一个子集称为**随机事件**，简称**事件**．一个随机事件 A 发生当且仅当 A 的一个样本点 ω 发生．

只含一个样本点的随机事件称为**基本事件**．

必然发生的事件称为**必然事件**，必然事件包含所有的样本点，因而它等于样本空间 Ω.

不可能发生的事件称为**不可能事件**，它不能包含任何样本点，所以为空集，记作 ϕ.

常用大写字母 A，B，C 等表示随机事件．

2. 事件之间的关系与运算

(1) 包含关系　如果事件 A 发生，则事件 B 一定发生，即属于事件 A 的每一样本点都属于事件 B，称事件 B **包含**事件 A，记为 $B\supset A$.

(2) 相等关系　如果事件 A 和事件 B 满足 $A\supset B$ 和 $B\supset A$，即事件 A 和事件 B 同时发生或不发生，称事件 A，B **相等**，记为 $A=B$.

(3) 互不相容关系　如果事件 A 和事件 B 不能同时发生，称事件 A 与 B **互不相容**(或**互斥**)，记为 $AB=\phi$.

(4) 事件的逆　如果事件 A 发生必然导致事件 B 不发生，反之亦然，称事件 A 和 B **互逆**(或**互余**)，此时称 B 是 A 的逆事件，记为 $B=\overline{A}$.

(5) 事件的和　"事件 A 与事件 B 至少有一个发生"的事件称为事件 A 与 B 的**和事件**(或并事件)，记为 $A\cup B$(或 $A+B$). 它可推广到 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

(6) 事件的积　"事件 A 和 B 同时发生"的事件称为事件 A 与 B 的**积事件**(或交事件)，记为 $A\cap B$(或 AB). 它可推广到 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

(7) 事件的差　"事件 A 发生而事件 B 不发生"的事件称为事件 A 与 B 的**差事件**，记为 $A-B$(或 $A\overline{B}$).

事件之间的运算具有下述性质：

(1) 交换律　$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

(2) 结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$；

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

(3) 分配律　$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$；

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

(4) 德·摩根律　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$；

$\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap\limits_{i=1}^{n}\overline{A_i}$，$\overline{\bigcap\limits_{i=1}^{n}A}=\bigcup\limits_{i=1}^{n}\overline{A_i}$；

$\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}\overline{A_i}$，$\overline{\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A}=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\overline{A_i}$.

(5) 双重否定定律　$\overline{\overline{A}}=A$.

(6) 排中律　$A\cup\overline{A}=\Omega$.

(7) 矛盾律　$A\cap\overline{A}=\phi$.

(8) 差积转换率　$A-B=A\cap\overline{B}=A-(A\cap B)$.

3. 概率的定义及基本性质

(1) 概率的统计定义

在一组不变的条件 S 下，重复作 n 次试验，设 n 次试验中，事件 A 发生 m 次，如果当 n 很大时，频率 $\frac{m}{n}$ 稳定的在某一数值 p 附近摆动，一般说来，随着 n 的增大，这种摆动的振幅越小，则称数值 p 为事件 A 的**概率**，记作 $P(A)=p$. 这样定义的概率称为**统计概率**.

(2) 概率的古典定义

如果随机试验满足下述三个条件：

1）样本空间是有限的，即$\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$；

2）基本事件$\{\omega_1\}$，$\{\omega_2\}$，…，$\{\omega_n\}$两两互不相容；

3）基本事件$\{\omega_1\}$，$\{\omega_2\}$，…，$\{\omega_n\}$发生的可能性相等；

称这个随机试验为**古典型试验**.

在古典型实验中，随机事件A的概率为$P(A)=\frac{m}{n}$，其中n为Ω中包含的基本事件总数，m为事件A中包含的基本事件数，该计算事件概率的数学模型称为**等可能概型**或**古典概型**.

（3）概率的几何定义

如果随机试验满足下述两个条件：

1）试验的结果是无限且不可数的；

2）每个试验结果出现的可能性是均匀的.

称这个随机试验为**几何型试验**.

在几何概型随机试验中，如果Ω中的所有基本事件可以用一个有界闭区域来描述，而其中一部分区域可以表示事件A所包含的基本事件，那么随机事件A发生的概率定义为$P(A)=\frac{L(A)}{L(\Omega)}$，其中$L(\Omega)$和$L(A)$分别为$\Omega$和$A$的几何测度，该计算事件概率的数学模型称为**几何概型**.

（4）概率的基本性质

1）对于任何事件A，$0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

2）$P(A)=1$，$P(\phi)=0$；

3）有限可加性：设A_1，A_2，…，A_n两两互不相容，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i);$$

4）完全可加性：设A_1，A_2，…两两互不相容，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i);$$

5）若$A\subset B$，则$P(A)\leqslant P(B)$.

4. 条件概率和事件的独立性

设A，B为两个事件，且$P(A)>0$，称

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在事件A发生的条件下B的**条件概率**.

如果$P(AB)=P(A)P(B)$，则称A与B**相互独立**. 设n个事件A_1，A_2，…，A_n，如果对任意$i\neq j$，A_i与A_j相互独立，则称这n个**事件两两相互独立**.

注 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立与 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两相互独立是两个不同的概念．前者蕴含后者，但反之不真．

当 $P(A)>0$ 时，A 与 B 相互独立当且仅当 $P(B \mid A)=P(B)$.

若 A 与 B 相互独立，则 A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 B，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也都相互独立．

5. 概率的计算公式

(1) $P(\overline{A})=1-P(A)$.

(2) $P(A-B)=P(A)-P(AB)$，当 $B\subset A$ 时，$P(A-B)=P(A)-P(B)$.

(3) 加法公式

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

一般地，有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)-\sum_{i<j} P(A_iA_j)+\sum_{i<j<k} P(A_iA_jA_k)$$
$$-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

(4)乘法公式

设 $P(A)>0$，则

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B \mid A).$$

$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1A_2)\cdots P(A_n \mid A_1A_2\cdots A_{n-1})$.

特别的，当 A，B 互相独立时，

$$P(AB)=P(A)P(B).$$
$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B).$$

当 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立时，

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n).$$

关于条件概率有相同的计算公式，如

$$P(\overline{A} \mid D)=1-P(A \mid D).$$
$$P((A-B) \mid D)=P(A \mid D)-P(AB \mid D).$$
$$P((A+B+C) \mid D)=P(A \mid D)+P(B \mid D)+P(C \mid D)-P(AB \mid D)$$
$$-P(AC \mid D)-P(BC \mid D)+P(ABC \mid D).$$

(5)全概率公式

如果 n 个事件 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 是一个完备事件组，且 $P(B_i)>0$，$(i=1, 2, \cdots, n)$，则对于任意的事件 $A\subset\Omega$，

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A \mid B_i)$$

称公式为**全概率公式**．

(6) 贝叶斯(Bayes)公式

设 B_1，B_2，…，B_n 是一个完备事件组且 $P(B_i)>0$，$i=1$，2，…，n，又设 $P(A)>0$，则对于每个 $k(1\leqslant k\leqslant n)$，

$$P(B_k \mid A)=\frac{P(B_k)P(A \mid B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A \mid B_i)},$$

称公式为贝叶斯公式或逆概公式．

6. 伯努利(Bernoulli)概型

对于随机试验 $E_i(i=1, 2, \cdots, n)$，设 A_i 是随机试验 E_i 中任一随机事件，如果

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n),$$

则称随机试验 $E_i(i=1, 2, \cdots, n)$是相互独立的．

如果在一次随机试验中，仅关心随机事件 A 是否发生，即只考虑 A 和$\overline{A}$ 两个实验结果，称这种试验为**伯努利实验**．

设在一次伯努利试验中事件 A 发生的概率为 p，则在 n 重伯努利试验中事件 A 发生(用 μ 表示)k 次的概率为

$$P(\mu=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},(k=0,1,2,\cdots,n).$$

由上式计算概率的数学模型称为**二项概型**，二项概型也成为**伯努利概型**或**独立试验序列概型**．

三、学习要求

1. 理解随机事件的概念、样本空间的概念，掌握随机事件的关系和运算；
2. 理解概率、条件概率的概念；
3. 掌握概率的基本性质，掌握古典概型的计算方法，掌握概率的加法公式；
4. 掌握乘法公式、全概率公式以及贝叶斯公式及其应用；
5. 理解事件的独立性的定义，掌握事件独立性的应用．

四、典型例题与方法解析

例 1 设 A，B 为两个相互独立的事件，$P(A)=0.2$，$P(B)=0.4$，求$P(A+B)$.

解 因为 A 与 B 独立，所以

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=0.52.$$

例 2 事件 A 与 B 相互独立，$P(A)=0.4$，$P(A+B)=0.7$，求 $P(B)$.

解 因为 A 与 B 相互独立，所以

$$\begin{aligned}P(A+B)&=P(A)+P(B)-P(A)P(B)\\&=P(A)+P(B)[1-P(A)]\\&=P(A)+P(B)P(\overline{A}),\end{aligned}$$

于是

$$P(B)=\frac{P(A+B)-P(A)}{P(\overline{A})}=\frac{0.7-0.4}{0.6}=0.5.$$

例 3 设 A，B 为两个事件，$P(A)=0.9$，$P(AB)=0.36$，求 $P(A\overline{B})$.

解 因为

$$A\overline{B}=A-B=A-AB,$$

而 $A\supset AB$，所以

$$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB).$$

于是

$$P(A\overline{B})=0.9-0.36=0.54.$$

例 4 已知 A_1，A_2，A_3 为一完备事件组，且 $P(A_1)=0.1$，$P(A_2)=0.5$，$P(B\mid A_1)=0.2$，$P(B\mid A_2)=0.6$，$P(B\mid A_3)=0.1$，求 $P(A_1\mid B)$.

解 因为 $A_1+A_2+A_3=\Omega$ 且 A_1，A_2，A_3 两两互不相容，所以

$$P(A_3)=1-P(A_1)-P(A_2)=1-0.1-0.5=0.4.$$

$$P(A_1\mid B)=\frac{P(A_1)P(B\mid A_1)}{\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B\mid A_i)}=\frac{1}{18}.$$

例 5 证明：对任意的随机事件 A 和 B 有 $P(A+B)\cdot P(AB)\leqslant P(A)\cdot P(B)$.

证 在 $A\subset B$，$A\supset B$，$AB=\phi$，$P(A)=0$，$P(B)=0$ 等特殊情况下，不等式显然成立.

设 $P(A)>0$，$P(B)>0$，$P(AB)>0$，$P(\overline{A}B)>0$. 由于有 $AB\subset A$，故有

$P(AB)\leqslant P(A)$,

$P(\overline{A}B)P(AB)\leqslant P(A)\cdot P(\overline{A}B)$,

$P(A)\cdot P(AB)+P(\overline{A}B)\cdot P(AB)\leqslant P(A)\cdot P(AB)+P(A)\cdot P(\overline{A}B)$,

$[P(A)+P(\overline{A}B)]P(AB)\leqslant P(A)[P(AB)+P(\overline{A}B)]$,

$P(A+\overline{A}B)\cdot P(AB)\leqslant P(A)P(AB+\overline{A}B)$.

因而

$$P(A+B)\cdot P(AB)\leqslant P(A)\cdot P(B).$$

例 6 4 男 4 女去跳舞，抽签选舞伴，求 4 男的舞伴均为女的概率．

解 设 A="4 男的舞伴均为女"，样本点总数为

$$C_8^2C_6^2C_4^2C_2^2/4!,$$

而 A 所包含的样本点的个数可以这样考虑，将 8 人分为男、女两组，每组 4 人，在男子组选 1 人，在女子组选 1 人，两人搭伴．在从男子组选 1 人，女子组选 1 人，令其搭伴，因此 A 包含的样本点的个数为

$$(C_4^1)^2\cdot(C_3^1)^2(C_2^1)^2(C_1^1)^2/4!,$$

故有

$$P(A)=\frac{C_4^1C_3^1C_2^1C_1^1}{C_7^1C_5^1C_3^1C_1^1}=\frac{8}{35}.$$

例 7 一列火车共有 n 节车厢，由 $k(k\geqslant n)$ 位旅客上了车并随意选择车厢，求每一节车厢内至少有 1 位旅客的概率．

解 令

A="至少有一节车厢无旅客"，

A_i="第 i 节车厢中无旅客"$(i=1,2,\cdots,n)$，

如果 A_i 发生意味着旅客全到其余 $n-1$ 节车厢，因此

$$P(A_i)=\frac{(n-1)^k}{n^k}=(1-\frac{1}{n})^k,$$

$$P(A_{i_1}A_{i_2})=\frac{(n-2)^k}{n^k}=(1-\frac{2}{n})^k,\ i_1\neq i_2,$$

$$\cdots$$

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_{n-1}})=\frac{[n-(n-1)]^k}{n^k}=(1-\frac{n-1}{n})^k,\text{（诸 } i_s \text{ 不相等）}.$$

由于必须有一节车厢不空，因此 $A_1A_2\cdots A_n=\phi$.

$$\begin{aligned}P(A)=&\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i_1\neq i_2}P(A_{i_1}A_{i_2})+\sum_{1\leqslant i_1<i_2<i_3\leqslant n}P(A_{i_1}A_{i_2}A_{i_3})\\&+\cdots+(-1)^n\sum P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_{n-1}})\\=&C_n^1\left(1-\frac{1}{n}\right)^k-C_n^2\left(1-\frac{2}{n}\right)^k+C_n^3\left(1-\frac{3}{n}\right)^k\\&+\cdots+C_n^{n-1}(-1)^n\left(1-\frac{n-1}{n}\right)^k.\end{aligned}$$

所求概率为

$$P(\overline{A})=1-P(A)$$
$$=1-\left[C_n^1\left(1-\frac{1}{n}\right)^k-C_n^2\left(1-\frac{2}{n}\right)^k+\cdots+C_n^{n-1}(-1)^n\left(1-\frac{n-1}{n}\right)^k\right].$$

例 8 在 5 双不同的鞋中任取 4 只，求(1)恰有 2 只配成一双的概率；(2)至少有 2 只配成 1 双的概率．

解 令

A=“恰有 2 只配成 1 双”，

B=“至少有 2 只配成 1 双”．

5 双鞋子共 10 只．从中取 4 只，样本点总数为 C_{10}^4，事件 A 发生相当于从 5 双鞋中选 1 双，有 C_5^1 种可能，再从剩下的 4 双中选 2 双，选法为 2^2，因此

$$P(A)=\frac{C_5^1C_4^2\cdot 2^2}{C_{10}^4}=\frac{4}{7}.$$

事件 B 发生，除了包含恰有 2 只鞋子配成一双的情况外，还包括取到的 4 只鞋子恰好是 2 双的情况，有 C_5^2 种可能，故有

$$P(B)=\frac{C_5^1C_4^2\cdot 2^2+C_5^2}{C_{10}^4}=\frac{13}{21}.$$

例 9 10 个提签中有 4 个是难题，甲、乙、丙 3 位学生，按甲先乙次丙最后的顺序进行抽签考试，这种考试是否公平？

解 所谓考试是否公平实际上是问 3 位学生抽到难题的可能性是否相同，设 A=“甲抽得难签”，B=“乙抽得难签”，C=“丙抽得难签”，则有

$$P(A)=\frac{C_4^1}{C_{10}^1}=0.4,$$

$$P(B)=P(AB)+P(A\overline{B})=P(A)\cdot P(B\mid A)+P(\overline{A})\cdot P(B\mid\overline{A})$$
$$=\frac{C_4^1}{C_{10}^1}\cdot\frac{C_3^1}{C_9^1}+\frac{C_6^1}{C_{10}^1}\cdot\frac{C_4^1}{C_9^1}=0.4,$$

$$P(C)=P(ABC)+P(\overline{A}BC)+P(A\overline{B}C)+P(\overline{A}\,\overline{B}C)$$
$$=P(A)\cdot P(B\mid A)\cdot P(C\mid AB)+P(\overline{A})\cdot P(B\mid\overline{A})$$
$$\cdot P(C\mid\overline{A}\,\overline{B})+P(A)\cdot P(B\mid\overline{A})\cdot P(C\mid A\overline{B})$$
$$+P(\overline{A})\cdot P(\overline{B}\mid\overline{A})\cdot P(C\mid\overline{A}\,\overline{B})$$
$$=\frac{C_4^1}{C_{10}^1}\cdot\frac{C_3^1}{C_9^1}\cdot\frac{C_2^1}{C_8^1}+\frac{C_6^1}{C_{10}^1}\cdot\frac{C_4^1}{C_{10}^1}\cdot\frac{C_3^1}{C_8^1}+\frac{C_4^1}{C_{10}^1}\cdot\frac{C_6^1}{C_9^1}\cdot\frac{C_3^1}{C_8^1}+\frac{C_6^1}{C_{10}^1}\cdot\frac{C_5^1}{C_9^1}\cdot\frac{C_4^1}{C_8^1}$$
$$=0.4.$$

从而可以看出尽管 3 位学生抽签的先后顺序不同，但他们抽到难签的可能性相同，因此考试是公平的．

例 10 甲、乙两人独立地对同一目标射击一次，其命中概率分别为 0.6

和 0.5．现已知目标被命中，求它是甲射中的概率．

解 设A={甲射击}，B={乙射击}，C={目标被击中}. 则

$$P(A)=P(B)=\frac{1}{2}\text{ , }P(C|A)=0.6\text{ , }P(C|B)=0.5.$$

由贝叶斯公式得

$$\begin{aligned}P(C|A)=0.6&=\frac{P(AC)}{P(C)}\\&=\frac{P(A)P(C|A)}{P(A)P(C|A)+P(B)P(C|B)}\\&=\frac{0.5\times0.6}{0.5\times0.6+0.5\times0.5}=\frac{6}{11}.\end{aligned}$$

例 11 已知 100 件产品中有 10 件是正品，每次使用绝对不会发生故障，其有 90 件非正品，每次使用有 0.1 的可能性发生故障．现从 100 件产品中任取 1 件，使用n次均未发生故障．问n为多大时，才能有 70%的把握认为所取的产品是正品?

解 令

A="所取的产品是正品"，

B="使用n次无故障"，

则有

$$P(A)=0.1,\quad P(\overline{A})=0.9,$$
$$P(B\mid A)=1,\quad P(B\mid\overline{A})=0.9^n.$$

由全概率公式有

$$\begin{aligned}P(B)&=P(A)\cdot P(B\mid A)+P(\overline{A})\cdot P(B\mid\overline{A})\\&=0.1+0.9^{n+1}.\end{aligned}$$

由贝叶斯公式

$$P(A\mid B)=\frac{P(A)\cdot P(B\mid A)}{P(B)}=\frac{0.1}{0.1+0.9^{n+1}}\geqslant0.7.$$

于是

$$(0.9)^{n+1}\leqslant\frac{0.03}{0.7}=\frac{3}{70},$$
$$n\geqslant\frac{\lg3-\lg70}{\lg0.9}-1\approx29,$$

即n至少为 29，才能有 70%的把握认为所取的产品为正品．

例 12 10 个球中只有一个红球，又放回地抽取，每次取一球，求直到第n次取得k次($k\leqslant n$)红球的概率．

解 因为实验室有放回地抽取，所以n次取球为n次相互独立的实验，每

次实验取到红球的概率均为$\frac{1}{10}$，取不到红球的概率为$\frac{9}{10}$. 又因为取了 n 次，第 n 次是第 k 次取的红球，说明前 $n-1$ 次取的红球，同时第 n 次取的红球. 设 $A=$“前 $n-1$ 此中恰好有 $k-1$ 次取的红球”，则

$$P(A)=P_{n-1}(k-1)=C_{n-1}^{k-1}\left(\frac{1}{10}\right)^{k-1}\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1-(k-1)}$$

$$=C_{n-1}^{k-1}\left(\frac{1}{10}\right)^{k-1}\left(\frac{9}{10}\right)^{n-k}.$$

设 $B=$“第 n 次取的红球”，则 $P(B)=\frac{1}{10}$，A 与 B 相互独立，设 $C=$“直到第 n 次才取的 k 次红球”，得 $C=AB$，所以

$$P(C)=P(A)(B)=C_{n-1}^{k-1}\left(\frac{1}{10}\right)^{k}\left(\frac{9}{10}\right)^{n-k}.$$

例 13 甲、乙二人做掷硬币的游戏，甲先乙后，轮流每人各掷一次，先掷出正面者胜，问甲、乙取胜的概率各为多少?

解 (方法一)令

$A_i=$“甲第 i 次掷出正面”$(i=1, 2, \cdots)$,

$B_i=$“乙第 i 次掷出正面”$(i=1, 2, \cdots)$,

$A=$“甲取胜”,

$B=$“乙取胜”,

由题意知各 A_i，B_i 均独立，因此

$$P(A)=P(A_i)+P(\overline{A_1}\,\overline{B_1}A_2)+\cdots+P(\overline{A_1}\cdots\overline{A_{n-1}}B_1\cdots\overline{B}_{n-1}A_n)+\cdots$$

$$=P(A_1)+P(\overline{A}_1)P(\overline{B}_1)P(A_2)+\cdots+P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_{n-1})P(\overline{B}_1)\cdots P(B_{n-1})P(A_n)+\cdots$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\cdots+(\frac{1}{2})^{2n-1}+\cdots$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{2}{3}.$$

$$P(B)=P(\overline{A}_1B_1)+P(\overline{A}_1B_1\,\overline{A}_2B_2)+\cdots+P(\overline{A}_1\cdots\overline{A}_n\,\overline{B}_1\cdots B_{n-1}B_n)+\cdots$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\cdots+(\frac{1}{2})^{2n-1}+\cdots$$

$$=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}.$$