高等学校教材
基础课程系列

概率论与数理统计应用

丁正生　主编

Fundamental Courses

西北工业大学出版社

概率论与数理统计应用

GAILULUN YU SHULITONGJI YINGYONG

主编 丁正生
编者 丁正生 刘叶玲 廖登洪 丁雪芳

西北工业大学出版社

【内容提要】本书是为工科大学本科生及研究生编写的教材，内容包括概率论、数理统计两部分。概率论部分包括随机事件及其概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理等内容；数理统计部分是根据教育部颁布的“工学硕士研究生应用统计课程教学基本要求”编写的，除包括“基本要求”所规定的内容，即基本概念、参数估计、假设检验、方差分析、回归分析、正交设计以外，还补充了实用多元统计分析简介、统计计算与统计软件简介等内容。

本书也可供科技工作者及报考工科类硕士研究生人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计应用/丁正生主编. —西安：西北工业大学出版社，2003.2

ISBN 7－5612－1607－6

Ⅰ.概...　Ⅱ.丁...　Ⅲ.①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材
Ⅳ.O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 006282 号

出版发行：西北工业大学出版社

通信地址：西安市友谊西路 127 号，邮编 710072　　**电话**：029－88493844

网　址：www.nwpup.com

印刷者：陕西友盛印务有限责任公司印刷

开　本：787 mm×1 092 mm

印　张：19

字　数：470 千字

版　次：2003 年 2 月第 1 版　2004 年 2 月第 2 次印刷

印　数：3 001～6 000

定　价：26.00 元

前　言

本书是根据教育部颁布的高等学校工科数学教材“概率论与数理统计课程教学基本要求”和“工学硕士研究生应用统计课程教学基本要求”，结合编者近几年所从事的原陕西省教委面向21世纪教学改革项目《工科数学系列课程教学内容与课程体系改革的研究与实践》的研究工作，广泛征求读者及任课教师意见，在原使用的教材基础上改编的。

本书由两部分组成。第一部分第1章至第4章为概率论，介绍随机事件及其概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理。内容基本满足工科各专业本科生对概率论课程的需要。第二部分第5章至第12章为数理统计，介绍数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、方差分析、回归分析、正交设计、实用多元统计分析简介、统计计算与统计软件简介，这部分内容可单独作为工科院校硕士研究生学习应用数理统计课程的教材，也可作为某些专业高年级学生选学的内容。

在改编过程中，本书力求突出概率统计的基本思想与基本方法，以便读者在学习过程中能较好地了解各部分内容的内在联系，从总体上把握概率统计的思想方法，淡化运算技巧，强调概率统计实际应用。注意对基本概念、基本定理和重要公式的实际应用背景介绍，加强理论知识与实际问题的紧密衔接，加强学生对基础知识的理解和加深印象，增强学生应用概率统计知识解决实际问题的意识、兴趣和能力。内容安排形成三个台阶：基本要求、建模能力、常用的一些多元统计分析方法简介。既注意到教材的可接受性，又为学生进一步学习现代数理统计知识提供一些“接口”。第12章编入统计计算与统计软件简介，以提高读者应用计算机统计软件进行数学建模和统计分析的能力。除体现“基本要求”的精神外，在其他各章节也适当地充实了一些应用性较强的内容，如估计量评价准则的补充、样本容量问题、非参数检验的若干方法等。在行文上，力求生动活泼，以增加其可读性。为避免枯燥地罗列定义、定理，故把许多定义融合在叙述中，这并不失数学本身的严密性。对于大多数数学推导，都较为详尽，以方便读者自学之用。

为了帮助读者抓住学习要点，加强对基本概念的理解和掌握，每章章末增写了“小结”，以阐明教学的基本要求。书末给出两个附录，方便学生查阅。每章配有习题，其中部分习题是需要上机计算的，书末给出了部分参考答案。

本书第1,2章由刘叶玲编写，第3,4,8,9,10章由廖登洪编写；第5,6,7,11,12章及附录由丁正生编写，书中全部插图和附表由丁雪芳绘制、编制。全书的统稿和修订工作由丁正生完成。

感谢陕西省工科数学教学指导委员会主任叶正麟教授和西北工业大学徐伟教授，他们于百忙之中仔细审阅了本书编写大纲，并提出了许多中肯的意见。特别感谢褚维盘教授，他在组织我们编写书稿、详细审阅编写大纲及热心推荐本书的出版等方面做了许多工作，给了我们极大的支持和帮助。

限于编者的水平，书中一定存在不少缺点和疏漏之处，敬请读者批评指正。

编　者

2003年1月

目　　录

第1章 随机事件及其概率

自然界和社会上发生的现象,大致可以分为两大类:一类是在一定条件下必然发生的现象,例如,向上抛一石子必然下落,同性电荷必不相互吸引,这类问题研究的是必然现象中的数量关系;另一类现象是在一定的条件下,可能出现这样的结果,也可能出现那样的结果,而在试验或观察之前不能预知确切的结果.例如,抛一枚硬币,落地时,可能正面朝上,也可能反面朝上,在每次抛掷之前,无法确定会出现何种结果,这类现象称为随机现象.当我们重复观察随机现象的时候,就会发现随机现象呈现规律性,这种规律性称为统计规律性.

概率论是研究随机现象的统计规律性的一门数学学科.一方面,它有自己独特的概念和方法,另一方面,它与其他数学分支又有紧密的联系,它是现代数学的重要组成部分.概率论的理论与方法几乎遍及所有科学技术领域、工农业生产和国民经济的各个部门中.

§1.1 随机事件

1.1.1 随机试验

实际中遇到过各种试验.在这里,把试验作为一个含义广泛的术语,它包括各种各样的科学试验,甚至对某一事物的某一特征的观察也认为是一种试验.下面举一些试验的例子:

E_1:抛一枚硬币,观察正面 H,反面 T 出现的情况;

E_2:将一枚硬币抛三次,观察出现正面的次数;

E_3:抛一枚骰子,观察出现的点数;

E_4:记录车站售票处 1 d 内售出的车票数;

E_5:在一批灯泡中任意抽取一只,测试它的寿命;

E_6:记录某地一昼夜的最高温度和最低温度.

这些试验都具有以下的特点:

(1) 可以在相同的条件下重复地进行;

(2) 每次试验的可能结果不止一个,并且能事先明确试验的所有可能结果;

(3) 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

在概率论中,将具有上述3个特点的试验称为**随机试验**.

1.1.2 样本空间

对于随机试验 E,尽管在每次试验之前不能预知试验的结果,但试验的一切可能的结果是已知的,把随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的**样本空间**,记为 S.样本空间的元素,即 E 的每个结果,称为**样本点**.例如,上面的6个随机试验的样本空间分别为

$S_1=\{H,T\}$;

$S_2=\{0,1,2,3\}$;

$S_3=\{1,2,3,4,5,6\}$;

$S_4=\{1,2,\cdots,n\}$,这里的 n 是售票处一天内准备出售的车票数 n;

$S_5 = \{t \mid t \geqslant 0\}$；

$S_6 = \{(x, y) \mid T_0 \leqslant x \leqslant y \leqslant T_1\}$，这里 x 表示最低温度，y 表示最高温度，并设这一地区的温度不会低于 T_0，也不会高于 T_1.

1.1.3 随机事件

在随机试验中，可能发生也可能不发生的事件就称为**随机事件**.随机事件常用大写字母 $A, B, C, \cdots$ 表示，它是样本空间 S 的子集合.在每次试验中，当且仅当子集 A 中的一个样本点出现时，称事件 A 发生.

例如在 E_3 中，如果用 A 表示事件"掷出奇点数"，那么 A 是一个随机事件.由于在一次投掷中，当且仅当掷出的点数是 1,3,5 中的任何一个时才称事件 A 发生了，所以我们把事件 A 表示为 $A = \{1,3,5\}$.同样地，若用 B 表示事件"掷出偶点数"，那么 B 也是一个随机事件，$B = \{2,4,6\}$.

对于一个试验 E，在每次试验中必然发生的事件，称为 E 的必然事件；在每次试验中都不发生的事件，称为 E 的不可能事件.例如在 E_3 中，"掷出的点数不超过 6"就是必然事件，用集合表示这一事件就是 E_3 的样本空间 $S_3 = \{1,2,3,4,5,6\}$.而事件"掷出的点数大于 6"是不可能事件，这个事件不包括 E_3 的任何一个可能结果，所以用空集 $\hat{o}$ 表示.对于一个试验 E，它的样本空间 S 是 E 的必然事件；空集 $\hat{o}$ 是不可能事件.必然事件与不可能事件虽已无随机性可言，但在概率论中，常把它们当做两个特殊的随机事件，这样做是为了数学处理上的方便.

1.1.4 事件间的关系与运算

如果某个复杂事件与若干个简单事件有关联，而这些简单事件的概率都比较容易获得，应当如何确定这个复杂事件的概率？因为事件是一个集合，因而事件间的关系和运算是按集合间的关系和运算来处理的.下面给出这些关系和运算在概率中的提法；并根据"事件发生"的含义，给出它们在概率中的含义.

设试验 E 的样本空间为 S，而 $A, B, A_k (k = 1, 2, \cdots)$ 是 S 的子集.

(1) 事件的包含与相等：若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A，记为 $B \supset A$ 或者 $A \subset B$.若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，即 $A = B$，则称事件 A 与事件 B 相等.

(2) 事件的和：事件 A 与事件 B 至少有一个发生的事件称为事件 A 与事件 B 的和事件，记为 $A \cup B$.事件 $A \cup B$ 发生意味着：或事件 A 发生，或事件 B 发生，或事件 A 与事件 B 都发生.

事件的和可以推广到多个事件的情景.设有 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，定义它们的和事件为 $\{A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一个发生$\}$，记为 $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$.

(3) 事件的积：事件 A 与事件 B 都发生的事件称为事件 A 与事件 B 的积事件，记为 $A \cap B$，也简记为 AB.事件 $A \cap B$（或 AB）发生意味着：事件 A 发生且事件 B 也发生，即 A 与 B 都发生.

类似地，可以定义 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的积事件 $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k = \{A_2, A_2, \cdots, A_n$ 都发生$\}$.

(4) 事件的差：事件 A 发生而事件 B 不发生的事件称为事件 A 与事件 B 的差事件，记为 $A - B$.

(5) 事件的互斥和对立：若事件 A 与事件 B 不可能同时发生，即 $AB = \hat{o}$，则称事件 A 与事件 B 是互斥的，或称它们是互不相容的.若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中的任意两个都互斥，则称这些事件是两两互斥的.此时记 $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k$.

"A 不发生"的事件称为事件 A 的对立事件,记为 $\bar{A}$. A 和 $\bar{A}$ 满足 $A\cup\bar{A}=S$, $A\bar{A}=\varnothing$, $\bar{\bar{A}}=A$.

(6) 事件运算满足的定律:设 A,B,C 为事件,则有

交换律:$A\cup B=B\cup A$, $AB=BA$

结合律:$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$, $(AB)C=A(BC)$

分配律:$(A\cup B)C=(AC)\cup(BC)$, $(AB)\cup C=(A\cup C)(B\cup C)$

对偶律:$\overline{A\cup B}=\bar{A}\bar{B}$, $\overline{AB}=\bar{A}\cup\bar{B}$

【例 1.1】 向指定目标射 3 枪,观察射中目标的情况.用 A_k 表示事件"第 k 枪击中目标"($k=1,2,3$),试用 A_1,A_2,A_3 表示以下各事件:

(1)只击中第 1 枪;

(2)只击中 1 枪;

(3)3 枪都没击中;

(4)至少击中 1 枪.

解 (1) 事件"只击中第 1 枪",意味着第 2 枪不中,第 3 枪也不中.所以,可以表示成 $A_1\bar{A}_2\bar{A}_3$.

(2) 事件"只击中 1 枪",并不指定哪一枪击中.3 个事件"只击中第 1 枪"、"只击中第 2 枪"、"只击中第 3 枪"中,任意一个发生,都意味着事件"只击中 1 枪"发生.同时,因为上述 3 个事件互不相容,所以,可以表示成 $A_1\bar{A}_2\bar{A}_3+\bar{A}_1A_2\bar{A}_3+\bar{A}_1\bar{A}_2A_3$.

(3) 事件"3 枪都没击中",就是事件"第 1,2,3 枪都未击中",所以,可以表示成 $\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3$.

(4) 事件"至少击中 1 枪",就是事件"第 1,2,3 枪至少有 1 次击中",所以,可以表示成 $A_1\cup A_2\cup A_3$ 或 $A_1\bar{A}_2\bar{A}_3+\bar{A}_1A_2\bar{A}_3+\bar{A}_1\bar{A}_2A_3+A_1A_2\bar{A}_3+A_1\bar{A}_2A_3+\bar{A}_1A_2A_3+A_1A_2A_3$.

§1.2 概率的统计定义

1.2.1 频率

设 E 为任一随机试验,A 为其中任一事件,在相同条件下,把 E 独立的重复做 n 次,n_A 表示事件 A 在这 n 次试验中出现的次数(称为**频数**).比值 $f_n(A)=\frac{n_A}{n}$ 称为事件 A 在这 n 次试验中出现的**频率**.

人们在实践中发现:在相同条件下重复进行同一试验,当试验次数 n 很大时,某事件 A 发生的频率具有一定的"稳定性",就是说其值在某确定的数值上下摆动.一般说来,试验次数 n 越大,事件 A 发生的频率就越接近那个确定的数值.因此事件 A 发生的可能性的大小就可以用这个数量指标来描述.

1.2.2 概率的统计定义

定义 1.1 设有随机试验 E,若当试验的次数 n 充分大时,事件 A 的发生频率 $f_A(A)$ 稳定在某数 p 附近摆动,则称数 p 为事件的**概率**,记为

$$P(A)=p \tag{1.1}$$

概率的这种定义,称为概率的统计定义,统计定义是以试验为基础的,但这并不是说概率取决于试验.值得注意的是事件 A 出现的概率是事件 A 的一种属性.也就是说完全决定于事件 A 本身的结果,是先于试验客观存在的.概率的统计定义只是描述性的,一般不能用来计算事件的概率.通常只能在 n 充分大时,以事件出现的频率作为事件概率的近似值.

1.2.3 概率的性质

(1) $0\leqslant P(A)\leqslant 1$;

(2) $P(\varnothing)=0, P(S)=1$;

(3) 若 $AB=\varnothing$,则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$;

(4) $P(\bar{A})=1-P(A)$;

(5) $P(B-A)=P(B\bar{A})=P(B)-P(AB)$;特别地,若 $A\subset B$,则 $P(B-A)=P(B)-P(A), P(B)\geqslant P(A)$;

(6) 对任意两个事件 A,B,有 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

这条性质可以推广到多个事件.设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是任意 n 个事件,则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n+1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

【例 1.2】 设事件 A,B 的概率分别为 $\frac{1}{3},\frac{1}{2}$.在下列 3 种情况下分别求 $P(B\bar{A})$ 的值:

(1) A 与 B 互斥;

(2) $A\subset B$;

(3) $P(AB)=\frac{1}{8}$.

解 由概率的性质(5)可知,$P(B\bar{A})=P(B)-P(AB)$.

(1) 因为 A 与 B 互斥,所以

$$AB=\varnothing,\quad P(B\bar{A})=P(B)-P(AB)=P(B)=\frac{1}{2}$$

(2) 因为 $A\subset B$,所以

$$P(B\bar{A})=P(B)-P(AB)=P(B)-P(A)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

(3)

$$P(B\bar{A})=P(B)-P(AB)=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$$

§1.3 古典概型

1.3.1 古典概型(等可能概型)

“概型”是指某种概率模型.“古典概型”是一种最简单、最直观的概率模型.如果做某个随机试验 E 时,只有有限个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 可能发生,且事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 满足下面 3 个条件:

(1) $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 发生的可能性相等(等可能性);

(2) 在任意一次试验中 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 至少有一个发生(完备性);

(3) 在任意一次试验中 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 至多有一个发生(互不相容性).

具有上述特性的概型称为**古典概型**或**等可能概型**.$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 称为**基本事件**.

等可能概型中事件概率的计算:设在古典概型中,试验 E 共有 n 个基本事件,事件 A 包含了 m 个基本事件,则事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{m}{n}\tag{1.2}$$

【例 1.3】 一袋中有8个大小形状相同的球，其中 5 个黑色球，3 个白色球. 现从袋中随机地取出两个球，求取出的两球都是黑色球的概率.

解 从 8 个球中取出两个，不同的取法有 C_8^2 种. 若以 A 表示事件{取出的两球是黑球}，那么使事件 A 发生的取法为 C_5^2 种，从而

$$P(A) = C_5^2/C_8^2 = 5/14$$

【例 1.4】 在箱中装有100个产品，其中有 3 个次品，为检查产品质量，从这箱产品中任意抽 5 个，求抽得 5 个产品中恰有一个次品的概率.

解 从 100 个产品中任意抽取 5 个产品，共有 C_{100}^5 种抽取方法，事件 $A=$ {有 1 个次品，4 个正品}的取法共有 $C_3^1 C_{97}^4$ 种取法，故得事件 A 的概率

$$P(A) = \frac{C_3^1 C_{97}^4}{C_{100}^5} \approx 0.138$$

【例 1.5】 将 N 个球随机地放入 n 个盒子中($n>N$)，求：

(1)每个盒子最多有 1 个球的概率；

(2)某指定的盒子中恰有 $m(m<N)$ 个球的概率.

解 这显然也是等可能问题.

先求 N 个球随机地放入 n 个盒子的方法总数. 因为每个球都可以落入 n 个盒子中的任何一个，有 n 种不同的放法，所以 N 个球放入 n 个盒子共有 $\underbrace{n\times n\times\cdots\times n}_{N}=n^N$ 种不同的放法.

(1)事件 $A=$ {每个盒子最多有 1 个球}的放法. 第 1 个球可以放进 n 个盒子之一，有 n 种放法；第 2 个球只能放进余下的 $n-1$ 个盒子之一，有 $n-1$ 种放法…第 N 个球只能放进余下的 $n-N+1$ 个盒子之一，有 $n-N+1$ 种放法；所以共有 $n(n-1)\cdots(n-N+1)$ 种不同的放法. 故得事件 A 的概率

$$P(A) = \frac{n(n-1)\cdots(n-N+1)}{n^N}$$

(2)事件 $B=$ {某指定的盒子中恰有 m 个球}的放法. 先从 N 个球中任选 m 个分配到指定的某个盒子中，共有 C_N^m 种选法；再将剩下的 $N-m$ 个球任意分配到剩下的 $n-1$ 个盒子中，共有 $(n-1)^{N-m}$ 种放法. 所以，得事件 B 的概率

$$P(B) = \frac{C_N^m (n-1)^{N-m}}{n^N}$$

【例 1.6】 在1～9的整数中可重复的随机取6个数组成6位数，求下列事件的概率：

(1)6 个数完全不同；

(2)6 个数不含奇数；

(3)6 个数中 5 恰好出现 4 次.

解 从 9 个数中允许重复的取 6 个数进行排列，共有 9^6 种排列方法.

(1)事件 $A=$ {6 个数完全不同}的取法有 $9\times8\times7\times6\times5\times4$ 种取法，故

$$P(A) = \frac{9\times8\times7\times6\times5\times4}{9^6} = 0.11$$

(2)事件 $B=$ {6 个数不含奇数}的取法. 因为 6 个数只能在 2,4,6,8 这 4 个数中选，每次

有 4 种取法，所以有 4^6 取法. 故

$$P(B)=\frac{4^6}{9^6}$$

(3) 事件 $C=\{6$ 个数中 5 恰好出现 4 次$\}$ 的取法. 因为 6 个数中 5 恰好出现 4 次可以是 6 次中的任意 4 次，出现的方式有 C_6^4 种，剩下的两种只能在 1,2,3,4,6,7,8,9 中任取，共有 8^2 种取法. 故

$$P(C)=\frac{C_6^4\times 8^2}{9^6}$$

1.3.2 几何概型

上述古典概率是在有限样本空间下进行的，为了克服这种局限性，我们将古典概型推广.

如果一个试验具有以下两个特点：

(1) 样本空间 S 是一个大小可以计量的几何区域(如线段、平面、立体).

(2) 向区域内任意投一点，落在区域内任意点处都是“等可能的”.

则称这个试验为**几何概型**，事件 $A=\{$掷点落在 A 内$\}$ 的概率由下式计算：

$$P(A)=\frac{A\text{ 的计量}}{S\text{ 的计量}} \tag{1.3}$$

【例 1.7】 在一个均匀陀螺的圆周上均匀地刻上(0,4)上的所有实数，旋转陀螺，求陀螺停下来后，圆周与桌面的接触点位于[0.5,1]上的概率.

解 设事件 $A=\{$圆周与桌面的接触点位于$[0.5,1]$上$\}$，由于陀螺及刻度的均匀性，它停下来时其圆周上的各点与桌面接触的可能性相等，且接触点可能有无穷多个，故

$$P(A)=\frac{\text{区间}[0.5,1]\text{ 的长度}}{\text{区间}(0,4)\text{ 的长度}}=\frac{1/2}{4}=\frac{1}{8}$$

【例 1.8】 甲乙两人相约8～12点在预定地点会面. 先到的人等候另一人 30 min 后离去，求甲乙两人能会面的概率.

解 设事件 $A=\{$甲乙两人能会面$\}$. 为简便起见，以 8 点钟为原点，建立直角坐标系，并以 X,Y 分别表示甲、乙二人到达的时刻，那么 $8\leqslant X\leqslant 12, 8\leqslant Y\leqslant 12$；如图 1-1 所示. 若以 (X,Y) 表示平面上的点的坐标，则所有基本事件可以用这平面上的边长为 4 的一个正方形：$8\leqslant X\leqslant 12, 8\leqslant Y\leqslant 12$ 内所有点表示出来. 二人能会面的充要条件是 $|X-Y|\leqslant 1/2$ (图中阴影部分)；所以所求的概率

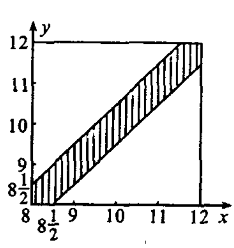

图 1-1

$$P(A)=\frac{\text{阴影部分的面积}}{\text{正方形的面积}}=\frac{16-2\left[\frac{1}{2}\left(4-\frac{1}{2}\right)^2\right]}{16}=\frac{15}{64}$$

§1.4 条件概率

1.4.1 条件概率

在实际问题中，常常会遇到这样的问题：在得到某个信息 A 以后(即在已知事件 A 发生的条件下)，求事件 B 发生的概率. 这时，因为求 B 的概率是在已知 A 发生的条件下，所以称

为在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率.记为 $P(B|A)$.

由此引入条件概率的一般定义:

定义 1.2 设 A,B 是两个事件,且 $P(A)>0$,称

$$P(B \mid A) = P(AB)/P(A) \tag{1.4}$$

为在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的**条件概率**.

计算条件概率有以下两种方法:

(1) 在缩小后的样本空间 S_A 中计算 B 发生的概率 $P(B|A)$.

(2) 在原样本空间 S 中,先计算 $P(AB),P(A)$,再按公式 $P(B|A)=P(AB)/P(A)$ 计算,求得 $P(B|A)$.

【例 1.9】 设某种动物由出生起活到20年以上的概率为80%,活到 25 年以上的概率为40%.如果现在有一个活了 20 年的这种动物,求它能活 25 年以上的概率.

解 设事件 $A=\{$能活 20 年以上$\}$;事件 $B=\{$能活 25 年以上$\}$.按题意,$P(A)=0.8$,由于 $B\subset A$,因此 $P(AB)=P(B)=0.4$.由条件概率定义,则有

$$P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{0.4}{0.8} = 0.5$$

1.4.2 乘法公式

由条件概率的定义容易推得概率的**乘法公式**:

$$P(AB) = P(A)P(B \mid A) = P(B)P(A \mid B) \tag{1.5}$$

利用这个公式可以计算积事件.乘法公式可以推广到 n 个事件的情形:若 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$,则

$$P(A_1\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1A_2)\cdots P(A_n \mid A_1\cdots A_{n-1}) \tag{1.6}$$

【例 1.10】 在一批由90件正品,3 件次品组成的产品中,不放回接连抽取两件产品,求第一件取正品,第二件取次品的概率.

解 设事件 $A=\{$第一件取正品$\}$;事件 $B=\{$第二件取次品$\}$.按题意,$P(A)=\frac{90}{93}$,$P(B|A)=\frac{3}{92}$.由乘法公式,则有

$$P(AB) = P(A)P(B \mid A) = \frac{90}{93}\times\frac{3}{92} = 0.031\ 5$$

1.4.3 全概率公式

为了计算复杂事件的概率,经常把一个复杂事件分解为若干个互不相容的简单事件的和,通过分别计算简单事件的概率,来求得复杂事件的概率.

全概率公式:$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为样本空间 S 的一个事件组,且满足:

(1) $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互不相容,且 $P(A_i)>0$, $(i=1,2,\cdots,n)$;

(2) $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=S$.

则对 S 中的任意一个事件 B 都有

$$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+\cdots+P(A_n)P(B|A_n) \tag{1.7}$$

证 因为

$$B=BS=B(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=BA_1\cup BA_2\cup\cdots\cup BA_n$$

由假设 $(BA_i)(BA_j)=\emptyset$,$i\neq j$,得到