余元希 编

上海教育出版社

高中代数复习参考资料

高中代数复习参考資料

余 元 希 編

上 海 教 育 出 版 社

一九六三年·上海

高中代数复习参考資料

余 元 希 編

*

上 海 教 育 出 版 社 出 版
(上 海 永 福 路 123 号)
上海市书刊出版业营业許可証出 090 号
中华书局上海印刷厂印刷
新华书店上海发行所发行 各地新华书店經售

*

开本：787×1092 1/32 印張：6 3/4 字數：149,000
1963 年 4 月第 1 版 1963 年 4 月第 1 次印刷
印数：1—95,000 本

統一书号：7150·1402
定 价：(八) 0.56 元

目　　录

第一单元 数

1. 前 言

数的概念是数学里最重要的概念之一．学习数学，首先就要求我們能够正确地掌握数的概念，了解关于数的一些重要性质，并且能够熟练地进行数的运算．

数的概念是从人类生产活动的需要中，逐渐形成并且逐步扩展的．同样地，我們在中小学学习数学的过程中，也是逐步地扩展着数的概念．我們曾在小学算术課程中学习了自然数、零和(正)分数；在初中代数課程中引进了負数(負有理数)，把数的概念扩展到有理数，以后又引进了无理数，把数的概念扩展到实数；最后在高中代数課程中引进了虛数，把数的概念扩展到复数．

虽然，这里除掉复数以外，其他都是在学习高中代数以前所学习的內容；但是在复习时，却仍有必要回过来对学过的知識作系統的整理．复习时应該注意以下一些要点：

(1) 要弄清楚数的概念逐步扩展的实质，明确为什么需要不断地引进新数，把原有的数的概念逐步加以扩展．

(2) 要正确地掌握数的大小比較和运算法則，能够正确地、合理地进行数的比較和运算．特别要注意：

(i) 关于有理数四則运算中的符号法則；

(ii) 关于实数的近似計算法則；

(iii) 关于复数的代数式的四则运算法则和三角函数式的乘、除、乘方、开方等四种运算的法則.

II. 提　　要

§1. 数的概念的扩展　数的概念是随着人类生产活动的需要而逐漸形成，并且逐漸扩展的．数的概念的每一次扩展，就給数学以解决实际問題的新的工具．

我們可以注意以下的一些事实:

1．自然数　早在人类社会发展的最初阶段，由于計数和測量的需要，就逐步形成了自然数的概念，逐步了解了自然数的一些性质，并且掌握了关于自然数的运算法則．

我們知道:

(1) 在所有的自然数里，有最小的一个数 1，但沒有最大的数．

(2) 在两个自然数之間可以比較大小，也就是說两个自然数之間有相互順序的关系．

自然数的相互順序关系，适合下面这些順序律①：

(i) 对于任意的两个自然数 a 和 b，

$$a>b,\quad a=b,\quad 或者\quad a<b$$

三种关系中有一种，而且只有一种成立．

(ii) 对于任意的自然数 a，总有 $a=a$．(相等的反射性．)

(iii) 如果 $a=b$, $b=c$，那末 $a=c$．(相等的传递性．)

(iv) 如果 $a>b$，那末 $b<a$；如果 $a<b$，那末 $b>a$．(不等的对逆性．)

---

① 关于相等和不等的其他一些性质，都可以从这些基本关系推导出来，所以我們把这些基本关系，叫做順序律．

（v） $a>b, b>c$，那末 $a>c$.（不等的传递性.）

（3） 在自然数范围里，加法和乘法永远可以单值地实施的，并且适合以下的运算定律①：

（i） 加法的交换律 $a+b=b+a$;

（ii） 加法的結合律 $(a+b)+c=a+(b+c)$;

（iii） 乘法的交换律 $a\cdot b=b\cdot a$;

（iv） 乘法的結合律 $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$;

（v） 乘法对加法的分配律 $(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$.

（4） 在自然数范围里，加法的逆运算减法不是永远可以实施的.

（5） 在自然数范围里，乘法的逆运算除法也不是永远可以实施的.

2. 正分数的引进 客观实际中，存在各种可以分成是計量单位的若干等分的量. 为了精确地表示这种量，单用自然数就感到不够，这样就需要引进一种新的数. 反映在数学里，这也正是要解决在自然数范围里除法不能永远可以实施，或者說方程

$$nx=m \qquad (n、m\text{ 都是自然数}, n>1)$$

不是永远可解的矛盾.

我們引进一种形如$\frac{m}{n}$的数，把它叫做（正）分数. 这种新数满足条件

$$n\cdot\left(\frac{m}{n}\right)=n.$$

正分数和自然数合在一起，总称正有理数. 我們知道：

① 关于四則运算的其他一些重要性质，都可以从这些运算性质推导出来，所以我們把这些运算性质叫做运算定律.

（1）在两个正有理数之間，可以比較大小，并且自然数的順序律对正有理数也适合.

（2）在正有理数范围里，加法、乘法和除法可以单值地实施，并且自然数的运算定律对正有理数也适合.

（3）在正有理数范围里，减法还不是永远可以实施的.

3．負数（負有理数）和零的引进　客观实际中存在具有相反方向（或者相反意义）的量．为了确切地表示这种量，仅仅用正（有理）数又感到不够了．这样就需要再一次引进一种新的数．反映在数学里，这也正是要解决在正有理数范围里减法不能永远可以实施，或者說方程

$$x+r=0 \quad （r\text{是正有理数}）$$

不是永远可解的矛盾.

我們引进一种形如 $-r$（r是正有理数）的新数把它叫做負（有理）数，并且引进了数“零”①，把它作为正数和負数的分界．零既不是正数也不是負数．这种新数 $-r$ 满足条件

$$r+(-r)=0.$$

正的整数、分数，負的正数、分数和数零总称有理数．我們知道：

（1）在两个有理数之間，可以比較大小，并且自然数的順序律对有理数也适合.

（2）在有理数范围里，永远可以单值地进行加法、减法、乘法和除法（除数不能是零）这四种运算，并且自然数所具有的运算定律对有理数也适合.

4．无理数的引进　我們知道，所有的有理数都可以用数軸上的点来表示．但是反过来，并不是数軸上的任何一个点都表

① 在小学算术里，数“零”是比分数先引进的．它表示“什么都沒有”.

示一个有理数．这个事实指出了用度量单位去度量一个任意的量的时候，所得的量数并不一定都是有理数．最簡单的一个例子是每边长是1个长度单位的正方形,它的对角綫的长度,就不能够用有理数絕对准确地表示出来.(这种正方形的对角綫的长是$\sqrt{2}$个长度单位,$\sqrt{2}$不是有理数.）这个問題在数学里的一个最簡单的反映就是在有理数范围里，正数开平方并不是永远可以实施,或者說方程

$$x^2=a \qquad (a>0)$$

还不是永远可解的．解决这个問題，我們需要引进一种新的数——无理数．

无理数和有理数总称实数.

5．虚数的引进　数的概念再一次扩展,和它以前几次的扩展,性质就有些不同.它是首先从解决数学里的問題所引起的.

我們知道,在实数范围里,乘方的逆运算开方还不是永远可以实施的．最簡单的例子是方程

$$x^2+1=0$$

在实数范围里是无解的．为了解决这类問題，就必須把原有的数的范围再一次加以扩展．这样,我們就引进了虛数单位i,它满足条件

$$i^2=-1,$$

并且引进了一般的虛数$a+bi$.　　$(b\neq 0)$

这里应該注意，虛数的引进虽然是从解决数学問題的需要开始的,但它却是在以后解决实际問題中得到了广泛的应用,才最后被人們承认的.

虛数和实数合在一起,总称复数.

上面所說的数的概念扩展的过程,可以概括成下面的表:

$$\text{复数}\begin{cases}\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{正有理数}\begin{cases}\text{正整数(自然数)}\\ \text{正分数}\end{cases}\\ \text{零}\\ \text{負有理数}\begin{cases}\text{負整数}\\ \text{負分数}\end{cases}\end{cases}\\ \text{无理数}\end{cases}\\ \text{虚数}\end{cases}$$

注意 这里的“分数”是狭义的，就是在表达式$\frac{m}{n}$或者$-\frac{m}{n}$里，m、n都是自然数，$n>1$，并且m不能被n所整除.

§2. 实数

1. 实数的定义 有理数和无理数总称实数.

从上面的定义可以看到，要知道什么是实数，首先就要知道究竟什么是有理数和无理数.

(1) 有理数 整数(包括正整数、負整数和零)和分数(包括正分数和負分数)总称有理数.

任何一个有理数都可以表示为$\frac{m}{n}$的形式.这里n是正整数，m是整数.

整数和可以化成十进分数的分数，都可以写成有限小数的形式，例如$0=0.0$，$-3=-3.0$，$\frac{4}{25}=\frac{4\times 4}{25\times 4}=\frac{16}{100}=0.16$；不能化成十进分数的分数，也都可以写成无限循环小数的形式，例如$\frac{1}{3}=0.333\cdots\cdots=0.\dot{3}$，$\frac{1}{6}=0.1666\cdots\cdots=0.1\dot{6}$.所以任何一个有理数总可以写成有限小数或者无限循环小数的形式.

反过来，任何一个有限小数或者无限循环小数也都可以化成$\frac{m}{n}$的形式，例如$0.16=\frac{16}{100}=\frac{4}{25}$，$0.\dot{3}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$，$0.1\dot{6}=\frac{16-1}{90}=\frac{15}{90}=\frac{1}{6}$. 所以有限小数和无限循环小数都是有理数.

(2) 无理数 无限不循环小数叫做无理数.

如果按照一定的法則能够求出一个无理数任何一个数位上的数字，那末这个无理数就叫做已知的. 例如根据开平方的法則，我們可以确定$\sqrt{3}$

的各个数位上的数字，就是 1.7320……，$\sqrt{3}$ 就是一个已知的无理数.

用无限不循环小数表示的无理数，如果取它的小数位到有限数位，就得到它精确到这一小数位的不足近似值，如果在不足近似值最后一位加上一个单位就得到精确度相同的过剩近似值. 无限地继續近似值的計算过程，所得对应的过剩近似值和不足近似值的差，可以小于任何指定的微小正数. 例如：

	$\sqrt{3}$的近似值				π的近似值			
精确度	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.1	0.01	0.001	0.0001
不足近似值	1.7	1.73	1.732	1.7320	3.1	3.14	3.141	3.1415
过剩近似值	1.8	1.74	1.733	1.7321	3.2	3.15	3.142	3.1416
两个近似值的差	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.1	0.01	0.001	0.0001

注意 （1）某些正数开平方可以得到无理数（这种正数叫做非平方数），但不是所有的无理数都是非平方数的平方根. 例如，圓周率 π 是无理数，它就不是某一个正数的平方根.

（2）正数开平方的时候，也不一定都得到无理数，例如 $\pm\sqrt{4}=\pm2$，$\pm\sqrt{4}$ 就不是无理数.

2. 实数和数軸

（1）数軸　一条规定了方向、原点和长度单位，并且用它上面的点来表示数的直綫叫做数軸.

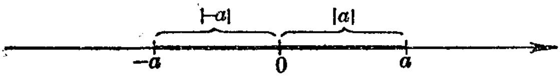
（2）实数和数軸上的点的对应　数軸上的每一个点都有一个并且只有一个实数（有理数或者无理数）和它对应；反过来，每一个实数（有理数或者无理数）都有数軸上一个并且只有一个点和它对应. 这就是說，实数和数軸上的点可以建立一一对应的关系.（这个性质叫做实数的連續性.）

（3）实数的絕对值　正数和零的絕对值是它的本身，負数

的絕对值是它的相反的正数．就是：

$$|a|=\begin{cases}a, & 如果\ a\geqq 0;\\ -a, & 如果\ a<0.\end{cases}$$

在数軸上，实数的絕对值就表示这个实数所对应的点离开原点的距离(图 1)．



$(a>0)$

图 1

(4) 实数的大小比較　在数軸上的两个点 A 和 B，存在下面三种关系(图 2)：

(i) A 在 B 的左边；

(ii) A 和 B 重合；

(iii) A 在 B 的右边．

分别与点 A 和 B 对应的两个实数 α 和 β，也就存在三种关系；我們規定：

(i) 如果 A 在 B 的左边，那末 $\alpha<\beta$；

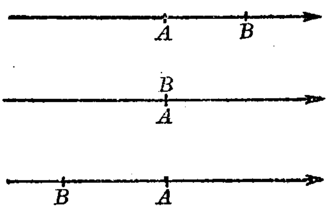


图 2

(ii) 如果 A 和 B 重合，那末 $\alpha=\beta$；

(iii) 如果 A 在 B 的右边，那末 $\alpha>\beta$．

根据上面这种規定，实数就可以比較大小，并且自然数的順序律对实数也适合．

3．实数的运算

(1) 实数的四則运算

（i）两个正实数α和β相加（或者相乘），就是求一个数γ，使它大于这两个实数的任意一組不足近似值的和（或者积），而小于任意一組过剩近似値的和（或者积）（如果α和β中有一个是有理数，就取精确值来代替近似值）．

（ii）两个正实数的减法（或者除法）是加法（或者乘法）的逆运算．

（iii）对于負实数的运算，按照有理数运算的同样法则进行．

根据上面的规定，在实数范围内加法、减法、乘法、除法（除数不能是零）这四种运算是永远可以单值地实施的，并且自然数的运算定律对实数也适合．

（2）实数的乘方和开方

（i）实数α的n次方，就是求n个实数α相乘的积．

（ii）实数α开n次方，就是求一个数x使$x^n=\alpha$，这个数用符号$\sqrt[n]{\alpha}$来表示，就是

$$(\sqrt[n]{\alpha})^n=\alpha.$$

根据上面的规定，在实数范围内乘方运算是永远可以单值地实施的；但是乘方的逆运算开方却还不是永远可以单值地实施．

事实上在实数范围里：

（i）任何一个实数α（正数，負数或者零）都可以开奇次（$2n+1$次）方，并且所得的結果是唯一的．就是：

如果 $x^{2n+1}=\alpha$，那末

$$x=\sqrt[2n+1]{\alpha}\begin{cases}>0, & (\text{如果 } \alpha>0)\\ =0, & (\text{如果 } \alpha=0)\\ <0. & (\text{如果 } \alpha<0)\end{cases}$$

(ii) 任何一个正实数 α，可以开偶次（$2n$ 次）方，但是所得的結果有两个值，它們互为相反的数．通常我們把 $\sqrt[2n]{\alpha}$ 表示其中正的一个．就是：

$$\text{如果}\quad x^{2n}=\alpha,\ \alpha>0,\ \text{那末}\quad x=\pm\sqrt[2n]{\alpha}.$$

(iii) 零的偶次方根有唯一的值，就是零．

(iv) 負数不能开偶次方（在实数范围內負数的偶次方根沒有意义）．

为了使正实数的开方运算能够单值地实施，我們引进了算术根的概念．就是：正数的正的方根，叫做它的算术根．

§3. 近似計算

1．近似数　在計数、測量和計算中，所遇到的数有两种情况：

(1) 有时需要而且也有可能用数来表示量的准确的值，这时我們应用的是准确数．

(2) 有时不需要或者不可能用数来表示量的准确的值，这时我們就用表示量的某一个不足近似值或者过剩近似值的数来代替．这种与准确数相差在某一指定数值范围內的数，就叫做这个准确数精确到这个指定范围的近似数．

例如，圓周率 $\pi=3.14159\cdots\cdots$，这里 $3.14159\cdots\cdots$ 是准确数，通常应用时我們可以取它精确到 0.01 的不足近似值 3.14（記做 $\pi\approx3.14$），或者精确到 0.0001 的过剩近似值 3.1416（記做 $\pi\approx3.1416$）．这里 3.14 和 3.1416 都是近似数．

2．近似数的截取方法　近似数有三种截取的方法：

(1) 四舍五入法　这种方法在可以用近似数来表示量的不足近似值，也可以用近似数来表示量的过剩近似值时应用．在数学里，除非題目的实际意义有所限制，通常都用这种方法来截取近似数．

(2) 去尾法（只舍不入的方法）　这种方法在限制只能用近

似数来表示量的不足近似值时应用.

(3) 进一法(只入不舍的方法) 这种方法在限制只能用近似数来表示量的过剩近似值时应用.

例如，$\pi=3.14159\cdots\cdots$

截取的方法	截取到百分位	截取到万分位
四舍五入法	3.14	3.1416
去尾法	3.14	3.1415
进一法	3.15	3.1416

3. 近似数的誤差和誤差界

(1) 近似数的絕对誤差 一个近似数(a)和它所代表的准确数(A)的差的絕对值,叫做这个近似数的絕对誤差(通常用$\varDelta$来表示).

$$\varDelta=|A-a|.$$

(2) 近似数的絕对誤差界 一个近似数的絕对誤差不超过的某一个正数(α),叫做这个近似数的一个絕对誤差界.

$$|A-a|\leqq\alpha.$$

知道了一个近似数 a 的一个絕对誤差界 α，我們就可以知道它所表示的准确数一定介于两个数 $a-\alpha$ 和 $a+\alpha$ 之間. 就是:

$$a-\alpha\leqq A\leqq a+\alpha.$$

例如,測量一根鋼絲，得到它的长是 32 厘米，而且知道絕对誤差不超过 0.05 厘米,这时这条鋼絲的长 l 可以記做

$$l\approx 32 \text{ 厘米} \quad (\pm 0.05 \text{ 厘米}).$$

这表示鋼絲的实际长度在(32－0.05)厘米和(32＋0.05)厘米之間，就是 31.95 厘米和 32.05 厘米之間.

(3) 近似数的相对誤差 一个近似数的絕对誤差和这个近

似数本身的比叫做这个近似数的相对誤差，通常用K来表示，就是：

$$K=\frac{\Delta}{a}=\frac{|A-a|}{a}.$$

（4）近似数的相对誤差界　一个近似数的絕对誤差界和这个近似数本身的比，叫做这个近似数的一个相对誤差界，通常用δ来表示，就是：

$$\delta=\frac{\alpha}{a}.$$

根据这个公式，我們可以作近似数的絕对誤差界和相对誤差界間的換算．例如：

（1）已知鋼絲的长是 32 厘米，絕对誤差不超过 0.05 厘米．那末从

$$\delta=\frac{\alpha}{a}=\frac{0.05}{32}=0.00156\cdots\cdots<0.0016<0.002.$$

我們可以取 0.16% 或者 0.2% 作为这个长度的一个相对誤差界．就是取

$$\delta=0.16\%,$$

或者
$$\delta=0.2\%.$$

（2）已知 $l\approx 32\ (\pm 0.2\%)$．这表示近似数 32 的一个相对誤差界是 0.2%，从公式

$$\alpha=a\delta$$

可以求出

$$\alpha=a\delta=32\times 0.2\%=0.064<0.07<0.1.$$

因此我們可以取数 0.07 或者 0.1 作为这个近似数的一个絕对誤差界．就是取

$$\alpha=0.07,$$

或者
$$\alpha=0.1.$$

注意　（1）近似数的絕对誤差界和相对誤差界都不是唯一的．通常

只需取一个比較簡单的数（例如具有一个或者两个有效数字的数）就可以了.

（2）在截取的时候，应該用进一法.

4. 有效数字　通常所遇到的近似数，它的絕对誤差界是这个近似数的某一个数位上的半个单位. 在这种近似数里，从第一个不是零的数字起到这个数位上的每一个数字就叫做有效数字. 一个近似数里有几个有效数字，就說这个近似数有几个有效数位. 例如：

（1）$\pi\approx3.14$，这个近似数有3个有效数字：3、1、4.

（2）$a\approx0.060$，这个近似数有2个有效数字：6、0.

（3）$x\approx62500(\pm50)$，这个近似数有3个有效数字：6、2、5.

注　（1）用有效数字表示的近似小数，在小数部分最后的0，应該看做是有效数字. 例如：

近似数0.60有2个有效数字；

近似数0.6只有1个有效数字.

所以0.60和0.6是两个不同的近似数.

（2）用有效数字表示的近似整数，对末尾有若干个数字是0的近似整数，必須指明它精确到哪一个数位，这才能直接判断这个近似数究竟有几个有效数字. 例如：

近似数85000(±50)有3个有效数字；

近似数85000(±500)有2个有效数字.

（3）一个正数N总可以表示成

$$N=a\times10^n\qquad(1\leqq a<10)$$

的形式. 如果采用这种形式表示一个正数N，那末就可以直接从a有几个有效数字来确定N有几个有效数字. 例如：

近似数85000(±50)可以表示成8.50×10^4；（有3个有效数字）

近似数85000(±500)可以表示成8.5×10^4.（有2个有效数字）

5. 近似数的計算　一般可以采用以下的法則：