刘尔烈　崔恩第　徐振铎　编著

有限单元法及程序设计

Youxian Danyuanfa ji Chengxu Sheji

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

有限单元法及程序设计

（第 2 版）

刘尔烈　崔恩第　涂振铎　编著

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书作为入门读物，介绍有限单元法的基本原理及程序设计的方法和技巧。

全书内容主要包括三个部分。第一篇讲述杆件结构的有限单元法及程序设计；第二篇讲述弹性力学平面问题的有限单元法及程序设计；第三篇简介相关的数学基础知识。书后光盘附有计算软件。

本书可作为土建、水利、道桥等各专业的教材，也可供有关专业工程技术人员参考和使用。

图书在版编目（CIP）数据

有限单元法及程序设计/刘尔烈编著．-天津：天津大学出版社，2004.1

ISBN 7-5618-1856-4

Ⅰ.有…　Ⅱ.刘…　Ⅲ.①有限元法②有限元分析-应用软件-程序设计

Ⅳ.0241.82

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 111966 号

出　版　天津大学出版社
出版人　杨风和
地　址　天津市卫津路 92 号天津大学内（邮编：300072）
电　话　发行部：022-27403647　邮购部：022-27402742
印　刷　河北省永清县印刷厂
发　行　新华书店天津发行所
开　本　185mm × 260mm
印　张　19.25
字　数　481 千
版　次　2004 年 1 月第 2 版
印　次　2004 年 1 月第 1 次
印　数　1-4 000
定　价　28.00 元（本书配光盘）

前　言

本书作为有限单元法的入门读物，介绍有限单元法基本理论和电算程序设计的方法与技巧以及与之相关的一些数学基础知识。第1版自1999年7月出版发行以来得到了广大读者的支持。为适应计算机软件和应用技术的发展，本书第2版对第1版中的内容作了补充和修改，并分别应用现行FORTRAN和VB对书中的程序进行了重新编写，适用于Windows系统，界面简明直观，方便学习和应用。

全书由绪论和三篇内容组成。第一篇（第1～7章）介绍杆件结构的有限单元法，其中包括：平面结构、空间结构的有限元原理，连续梁、平面桁架、空间桁架、平面刚架及空间刚架的程序设计等内容。第二篇（第8～10章）介绍弹性力学平面问题的有限单元法，其中包括：平面问题有限单元法的基本理论，三角形单元的应用及程序设计方法，并讲述几种较精密的平面单元作为扩展知识。第三篇（第11、12章）介绍相关的一些数学基本知识，其中包括：矩阵的基本知识和线性方程组的计算方法等内容。书后光盘附有“配套程序”和“有限单元法计算器”。

本书的编著分工为：刘尔烈负责全书统稿并编写绪论、第1章、第8章、第10章；崔恩第编写第2章、第3章、第4章（4.2、4.3节）、第5章、第6章、第7章、第9章；徐振铎编写第4章（4.1、4.4节）、第11章、第12章。书后所附光盘由崔恩第主持制作；崔志跃参加了方案设计及程序编写与调试工作。

由于水平所限，书中可能存在疏漏和错误，诚恳希望读者批评指正。

编者

2003年6月

目　录

绪　　论

0.1　有限单元法概述

人们进行力学分析的方法有很多种,但归结起来可分为两类,即解析法和数值法。由于实际结构物的形状和所受荷载往往比较复杂,除了少数简单的问题之外,按解析法求解是非常困难的,所以数值法已成为不可替代的广泛应用的方法,并得到不断发展。有限单元法就是伴随着电子计算机技术的进步而发展起来的一种新兴数值分析方法。它的数学逻辑严谨,物理概念清晰,易于理解和掌握,应用范围广泛,能够灵活地处理和求解各种复杂问题,特别是它采用矩阵形式表达基本公式,便于运用计算机编程运算。这些优点赋予了有限单元法强大的生命力。

有限单元法从 20 世纪 50 年代至今,经过几十年的发展,不断开拓新的应用领域,其范围已由杆件结构问题扩展到了弹性力学乃至塑性力学问题,由平面问题扩展到空间问题,由静力学问题扩展到动力学、稳定问题,由固体力学问题扩展到流体力学、热力学、电磁学等问题。如今它已成为广大科技工作者的有力工具,解决了大量科学研究和工程技术问题。

有限单元法的基本思路是将结构物看成由有限个划分的单元组成的整体,以单元结点的位移或结点力作为基本未知量求解。按选取基本未知量的不同,可分为位移法、力法和混和法。位移法选取结点位移为基本未知量,力法选取结点力作为基本未知量,而混和法选取一部分结点位移和一部分结点力作为基本未知量。在结构力学中常称杆件结构的有限单元法为结构矩阵分析,并分为矩阵位移法、矩阵力法等,这只是名称的不同而已。由于位移法应用最为普遍,本书只介绍有限元位移法。

用有限单元法进行结构分析的基本步骤如下。

0.1.1　结构物的离散化

离散化是将待分析的结构物从几何上用线或面划分为有限个单元,即将结构物看成有限个单元构成的组合体。按结构物形状的不同和分析的要求,选取不同形式的单元,通常在单元的边界上设置结点,结点联结相邻的单元。如图 0-1 所示刚架,可划分为①~⑥6 个杆单元,有 1~6 个结点,整个结构视为这些单元的组合体。

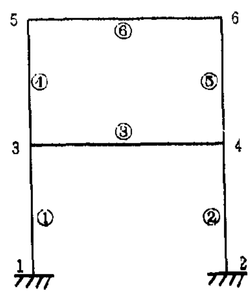
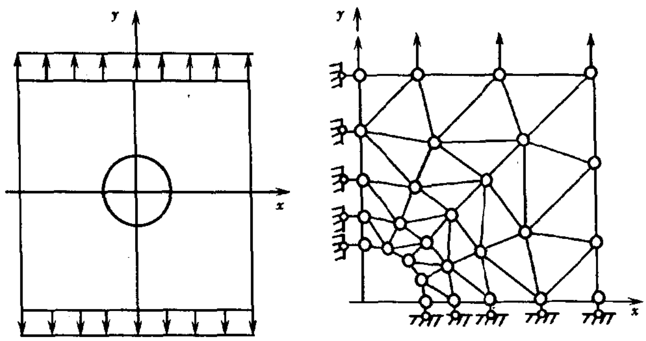


图 0-1

又如图 0-2(a)所示为纵向均匀受拉带圆孔薄板。利用结构的对称性,取 1/4 结构分析,将其划分为若干个三角形单元,这种单元是平面单元,有三个角结点。在圆孔边上,以单元的直边近似模拟曲线(见图 0-2(b))。

结构物离散化时,划分的单元的大小和数目应根据计算精度的要求和计算机的容量来决定。



(a)　　　　(b)

图 0-2

0.1.2 单元分析

所谓单元分析就是设法导出单元的结点位移和结点力之间的关系，即建立单元刚度矩阵。在分析杆件结构时，其单元通常为等截面直杆，单元两端的结点位移和杆端力之间的转换关系可直接利用结构力学导出的公式给出。而在分析弹性力学平面问题时，每个平面单元内的任意点的位移需要按一定的函数关系用结点位移来表示，这种函数称为位移函数或位移模式。选择的位移函数应保证解的收敛性，因此，建立合理的位移函数是单元分析的关键。位移函数确定以后，就可以利用弹性力学的基本方程推导出单元刚度矩阵。

此外，还需要按静力等效原则将作用于每个单元上的外力简化到结点上，构成等效结点力。

对于每一个单元进行上述分析之后，可建立起单元刚度方程。

0.1.3 整体分析

整体分析就是将各个单元组成结构整体进行分析。整体分析的目的在于导出整个结构结点位移与结点力之间的关系，即建立整个结构的刚度方程。

整体分析的步骤为：首先按着一定的集成规则，将各单元刚度矩阵集合成结构整体刚度矩阵，并将单元等效结点荷载集合成整体等效结点荷载列阵；然后引入结构的位移边界条件，求解整体平衡方程组，得出基本未知量——结点位移列阵；最后计算各单元的内力和变形。

0.2 程序设计概述

电子计算机有模拟计算机和数字计算机两种类型。进行结构分析计算使用的是数字计算机，数字计算机用途极为广泛，数字计算只是它的功能之一。一个计算机系统，通常由硬件和软件两部分组成，计算机的工作性能取决于软硬件的质量和配置。图 0-3 给出了一个计算机系统的构成。

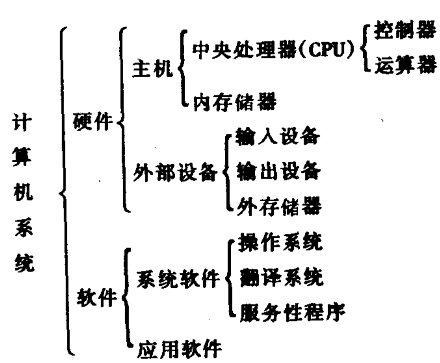


图 0-3

欲使一台计算机按用户的意图工作，事先需要编制一系列按先后顺序排列的指令，这些指令序列称为程序。编写程序的语言是人和计算机信息沟通的桥梁。

程序语言是从低级语言向高级语言发展的。计算机只能识别由 0 和 1 组成的二进制代码，最初人们用这种代码编写程序，称为“机器语言”。对于一般用户来说，机器语言很难懂而且程序设计工作量很大，后来使用经过改进的“汇编语言”，用便于理解的符号代替二进制代码，并将汇编语言编写的程序翻译成由机器语言表达的

目标程序，使计算机识别和执行。

汇编语言要求程序设计人员事先熟悉计算机的指令系统。不同类型的计算机往往具有各自特定的指令系统，这对于大多数仅使用计算机算题的用户是很不方便的，后来人们创造了不同机种可以通用的高级语言，即通常所说的“算法语言”。高级语言是用与自然语言和数学公式接近的形式表达的，使得不懂计算机工作原理的一般用户也能应用，这样就为计算机的普遍使用铺平了道路。

高级语言种类很多，其中 FORTRAN 语言是国际上广泛流行适用于科学计算的一种算法语言。本书中的程序采用 FORTRAN 和 VB 编写，适用于 Windows 操作系统。

为使计算机完成既定的工作任务，用选定的程序设计语言编写相应程序的过程，称为程序设计。程序设计的一般步骤为：

①提出问题，拟定解决方案；

②构造数学模型；

③画出程序流程图；

④用选定的算法语言编写程序；

⑤编译调试程序；

⑥试算验证程序。

开发一个好的程序往往需要反复推敲，力求程序结构合理，通用性强、计算精度高、易于维护和发展、成果表达直观。

根据国家标准(GB　1526—89)规定的程序流程图标准化符号及约定，本书中所用的符号列于图 0-4 中。具体表示含义如下：

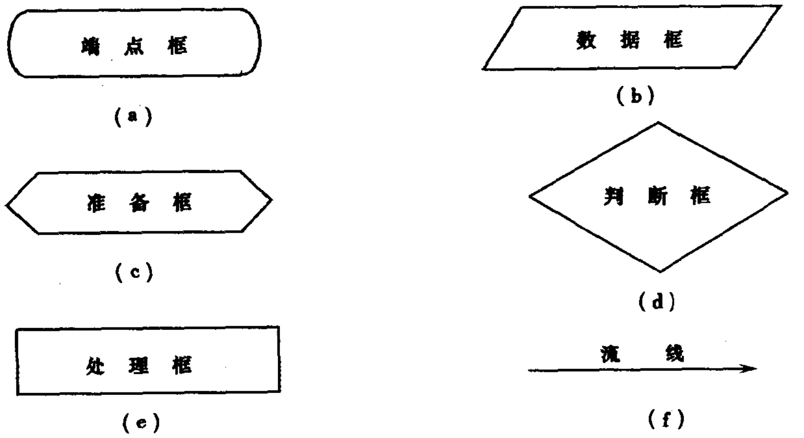


图 0-4

(a)图表示程序流程图的起点和终点；(b)图表示数据信息的输入或输出；(c)图表示数据进行系列运算之前要完成的数据预置；(d)图表示判断条件；(e)图表示各种处理功能，如数学运算方式等；(f)图表示流程的路径和指向。

第一篇　杆件结构的有限单元法及程序设计

第1章　平面杆件结构的有限单元法

1.1　有限元位移法的基本概念

有限单元法的基本思路是先分后合，即先将结构划分成各个单元，进行单元分析，然后再将各单元集合成结构整体，进行整体分析。下面从一个简单的结构连续梁入手，介绍有限元位移法的基本概念和求解方法。

图1-1(a)所示的两跨连续梁受结点力偶 M_1、M_2、M_3 的作用。取每一跨为一独立单元，①、②为单元编号，两个单元的线刚度分别为 i_1、i_2。结点编号按自然数1、2、3顺序排列，称为整体号。结点角位移分别为 θ_1、θ_2、θ_3。

在开始分析时，需要建立连续梁的整体坐标系 xOy，取 x 轴与梁轴线平行，并以指向右为正，y 轴指向下为正。依右手坐标系规定，结点角位移和力偶以顺时针为正。

为了方便单元分析，对每个单元也建立坐标系 $\bar{x}\bar{O}\bar{y}$，称为局部坐标系，其方向与整体坐标系方向一致。每一单元的始、末端分别记为 i、j 端，称为局部号。如图1-1(b)所示。图1-1(c)为离散化之后的杆件单元和结点，其内力只画出杆端弯矩。各单元杆端弯矩对杆端而言，以顺时针为正。图中箭头表示 $\bar{x}$ 轴（由 i 指向 j）的方向。

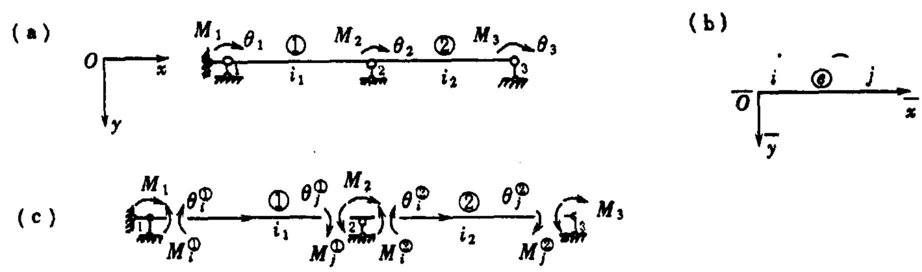


图1-1

结构力学传统位移法和有限元位移法在基本原理上并无区别，只是后者采用矩阵形式。本例中，将结点1、2、3处的结点角位移看做基本未知量。由结构力学所介绍的位移法中的转角位移方程，可以得出单元①、②的杆端弯矩和杆端转角关系式分别为：

单元①
$$\left.\begin{aligned}M_i^{①} &= 4i_1\theta_i^{①} + 2i_1\theta_j^{①}\\ M_j^{①} &= 2i_1\theta_i^{①} + 4i_1\theta_j^{①}\end{aligned}\right\} \qquad \text{(a)}$$

单元②
$$\left.\begin{aligned} M_i^{\textcircled{2}} &= 4i_2\theta_i^{\textcircled{2}} + 2i_2\theta_j^{\textcircled{2}} \\ M_j^{\textcircled{2}} &= 2i_2\theta_i^{\textcircled{2}} + 4i_2\theta_j^{\textcircled{2}} \end{aligned}\right\} \tag{b}$$

根据结点 1、2、3 处的位移连续条件，有

$$\left.\begin{aligned} \theta_i^{\textcircled{1}} &= \theta_1 \\ \theta_j^{\textcircled{1}} &= \theta_i^{\textcircled{2}} = \theta_2 \\ \theta_j^{\textcircled{2}} &= \theta_3 \end{aligned}\right\} \tag{c}$$

代入式(a)、(b)，得

$$\left.\begin{aligned} M_i^{\textcircled{1}} &= 4i_1\theta_1 + 2i_1\theta_2 \\ M_j^{\textcircled{1}} &= 2i_1\theta_1 + 4i_1\theta_2 \end{aligned}\right\} \tag{d}$$

$$\left.\begin{aligned} M_i^{\textcircled{2}} &= 4i_2\theta_2 + 2i_2\theta_3 \\ M_j^{\textcircled{2}} &= 2i_2\theta_2 + 4i_2\theta_3 \end{aligned}\right\} \tag{e}$$

考虑结点 1、2、3 处的平衡条件，有

$$\left.\begin{aligned} \sum M_1 &= M_1 - M_i^{\textcircled{1}} = 0 \\ \sum M_2 &= M_2 - M_j^{\textcircled{1}} - M_i^{\textcircled{2}} = 0 \\ \sum M_3 &= M_3 - M_j^{\textcircled{2}} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{f}$$

将式(d)、式(e)代入式(f)，得

$$\left.\begin{aligned} &4i_1\theta_1 + 2i_1\theta_2 = M_1 \\ &2i_1\theta_1 + (4i_1 + 4i_2)\theta_2 + 2i_2\theta_3 = M_2 \\ &2i_2\theta_2 + 4i_2\theta_3 = M_3 \end{aligned}\right\} \tag{g}$$

式(g)即为本例的位移法方程。

现在采用矩阵形式表示。以ⓔ表示单元序号，取 $e = 1,2$，则上面的式(a)、式(b)可以统一写为

$$\begin{bmatrix} M_i^{\textcircled{e}} \\ M^{\textcircled{e}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4i_e & 2i_e \\ 2i_e & 4i_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_i^{\textcircled{e}} \\ \theta_j^{\textcircled{e}} \end{bmatrix} \tag{1-1}$$

或简写为

$$\boldsymbol{F}^{\textcircled{e}} = \boldsymbol{k}^{\textcircled{e}}\boldsymbol{\delta}^{\textcircled{e}} \tag{1-2}$$

式中

$$\boldsymbol{k}^{\textcircled{e}} = \begin{bmatrix} k_{ii}^{\textcircled{e}} & k_{ij}^{\textcircled{e}} \\ k_{ji}^{\textcircled{e}} & k_{jj}^{\textcircled{e}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4i_e & 2i_e \\ 2i_e & 4i_e \end{bmatrix} \tag{1-3}$$

称为单元刚度矩阵，矩阵中各元素称为刚度系数；

$$\boldsymbol{\delta}^{\textcircled{e}} = \begin{bmatrix} \theta_i^{\textcircled{e}} \\ \theta_j^{\textcircled{e}} \end{bmatrix} \tag{1-4}$$

称为单元杆端位移列阵；

$$\boldsymbol{F}^{\textcircled{e}} = \begin{bmatrix} M_i^{\textcircled{e}} \\ M_j^{\textcircled{e}} \end{bmatrix} \tag{1-5}$$

称为单元杆端力列阵。式(1-1)、式(1-2)也称为单元刚度方程。

将位移法方程式(g)用矩阵形式表示，得

$$\begin{bmatrix} 4i_1 & 2i_1 & 0 \\ 2i_1 & 4i_1+4i_2 & 2i_2 \\ 0 & 2i_2 & 4i_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} \tag{1-6}$$

或简写成

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{\Delta} = \boldsymbol{P} \tag{1-7}$$

式中

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4i_1 & 2i_1 & 0 \\ 2i_1 & 4i_1+4i_2 & 2i_2 \\ 0 & 2i_2 & 4i_2 \end{bmatrix} \tag{1-8}$$

称为整体刚度矩阵；

$$\boldsymbol{\Delta} = [\theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3]^{\mathrm{T}} \tag{1-9}$$

$$\boldsymbol{P} = [M_1 \quad M_2 \quad M_3]^{\mathrm{T}} \tag{1-10}$$

分别称为结点位移列阵和结点荷载列阵。式(1-6)、式(1-7)称为整个结构的刚度方程，亦称为整体刚度方程。

整体刚度方程式(1-6)和式(1-7)是以结点位移为基本未知量的线性方程组，求解它可以得出结点位移 θ_1、θ_2、θ_3，再代入式(d)、式(e)即可以求出各单元的杆端弯矩。

应用有限元位移法分析一般连续梁，尚需进一步考虑以下几个问题。

(1)刚度集成法的应用

上述建立整体刚度矩阵的方法比较烦琐，常用的方法是刚度集成法，也称直接刚度法。它是直接利用单元刚度矩阵的“叠加”来形成整体刚度矩阵，其步骤如下。

①将式(1-3)单元刚度矩阵 $\boldsymbol{k}^{\textcircled{e}}$扩阶，由原来的 2×2 矩阵扩大为与整体刚度矩阵同阶的 3×3 矩阵。$\boldsymbol{k}^{\textcircled{e}}$中的四个元素按整体编号顺序在扩阶后的 3×3 矩阵内放置，空白处补零。这样得到的矩阵称为单元贡献矩阵，用符号 $\boldsymbol{K}^{\textcircled{e}}$表示，于是单元①的

$$\boldsymbol{K}^{\textcircled{1}} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} k_{ii}^{\textcircled{1}} & k_{ij}^{\textcircled{1}} & 0 \\ k_{ji}^{\textcircled{1}} & k_{jj}^{\textcircled{1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 4i_1 & 2i_1 & 0 \\ 2i_1 & 4i_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \tag{h}$$

单元②的

$$\boldsymbol{K}^{\textcircled{2}} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{ii}^{\textcircled{2}} & k_{ij}^{\textcircled{2}} \\ 0 & k_{ji}^{\textcircled{2}} & k_{jj}^{\textcircled{2}} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4i_2 & 2i_2 \\ 0 & 2i_2 & 4i_2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \tag{i}$$

②将单元贡献矩阵相叠加，形成整体刚度矩阵，即

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}^{\textcircled{1}} + \boldsymbol{K}^{\textcircled{2}} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} k_{ii}^{\textcircled{1}} & k_{ij}^{\textcircled{1}} & 0 \\ k_{ji}^{\textcircled{1}} & k_{jj}^{\textcircled{1}} + k_{ii}^{\textcircled{2}} & k_{ji}^{\textcircled{2}} \\ 0 & k_{ji}^{\textcircled{2}} & k_{jj}^{\textcircled{2}} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 4i_1 & 2i_1 & 0 \\ 2i_1 & 4i_1+4i_2 & 2i_2 \\ 0 & 2i_2 & 4i_2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \tag{j}$$

对比式(1-8)和式(j)，可知两种方法推导得出的 $\boldsymbol{K}$ 完全相同，而刚度集成法具有明显的优点。

对于图 1-2 所示具有 n 个结点和$(n-1)$个单元的多跨连续梁，应用此方法易得出 $n\times n$ 阶整体刚度矩阵 $\boldsymbol{K}=\sum_{e=1}^{n-1}\boldsymbol{K}^{ⓔ}$。写出相应的整体刚度方程如式(1-11)所示。

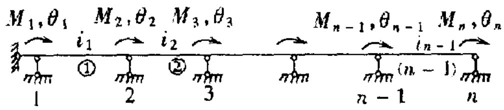


图 1-2

$$
\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
4i & 2i_1 & & & & & \\
2i_1 & 4i_1+4i_2 & 2i_2 & & & & \\
 & 2i_2 & 4i_2+4i_3 & & & & \\
 & & & \ddots & & & \\
 & & & & 4i_{n-3}+4i_{n-2} & 2i_{n-2} & \\
 & & & & 2i_{n-2} & 4i_{n-2}+4i_{n-1} & 2i_{n-1} \\
 & & & & & 2i_{n-1} & 4i_{n-1}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \vdots \\ \theta_{n-2} \\ \theta_{n-1} \\ \theta_n \end{bmatrix}
\qquad (1\text{-}11)
$$

(2)两端支承条件的引入

以上在推导连续梁整体刚度方程时，没有涉及连续梁两端有固定端支座的情况。对于图 1-3 所示右端为固定端支座的两跨连续梁，先不考虑右端的约束条件，得出整体刚度方程与式(1-6)完全一样，即

$$
\begin{bmatrix} 4i_1 & 2i_1 & 0 \\ 2i_1 & 4i_1+4i_2 & 2i_2 \\ 0 & 2i_2 & 4i_2 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix}
\qquad (\mathrm{k})
$$

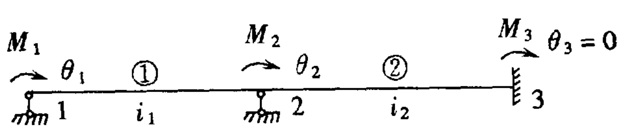


图 1-3

然后，再考虑右端转角为零的支承条件 $\theta_3=0$，相应的结点力 M_3 为支座结点 3 处的未知反力偶。因此，求解基本未知量 θ_1、θ_2 的基本方程为

$$
\begin{bmatrix} 4i_1 & 2i_1 \\ 2i_1 & 4i_1+4i_2 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}
\qquad (\mathrm{l})
$$

为了便于编写计算程序，希望引入支承条件后，矩阵的阶数和排列次序不变，而又达到修改整体刚度方程的目的，将式(k)修改为如下形式：

$$\begin{bmatrix} 4i_1 & 2i_1 & 0 \\ 2i_1 & 4i_1+4i_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1-12}$$

显然,式(1-12)完全等效于基本方程式(l)和支承条件 $\theta_3=0$。

总结起来,连续梁两端支承条件的引入方法为:将整体刚度矩阵的主对角线元素 k_{ii}改为1,第 i 行、i 列的其余元素改为零,对应的荷载元素也改为零,其中 $i=1$ 或 n。$i=1$ 对应左端为固定支座;$i=n$ 对应右端为固定支座。左右端同时为固定端支座时,应同时进行修改。

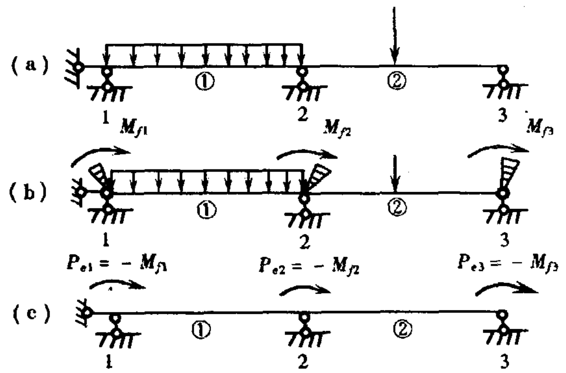


图 1-4

(3)非结点荷载的处理

对于承受非结点荷载作用的连续梁,可利用等效结点荷载进行分析。现以图 1-4(a)所示连续梁为例,说明计算等效结点荷载的方法。

首先,在各结点(包括两端结点)加约束,阻止结点转动(图 1-4(b))。这时各杆独立地承担所受的荷载,杆端产生固端弯矩,记为

$$M_f^{ⓔ} = \begin{bmatrix} M_{fi}^{ⓔ} \\ M_{fj}^{ⓔ} \end{bmatrix} \tag{m}$$

各结点的约束力矩分别为交于该结点的各相关单元的固端力矩之和,以顺时针为正。

$$\begin{bmatrix} M_{f1} \\ M_{f2} \\ M_{f3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{fi}^{①} \\ M_{fj}^{①} + M_{fi}^{②} \\ M_{fj}^{②} \end{bmatrix} \tag{n}$$

然后,去掉这些附加的约束,这就相当于在各点施加一外力荷载 $\boldsymbol{P}_e$,其大小与约束力矩相同,但方向相反(图 1-4(c))。

显然,叠加图 1-4(b)、图 1-4(c)两种情况,即得图 1-4(a)的原始情况。图 1-4(c)中的结点荷载 $\boldsymbol{P}_e$ 称为原非结点荷载的等效结点荷载,即

$$\boldsymbol{P}_e = \begin{bmatrix} P_{e1} \\ P_{e2} \\ P_{e3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -M_{fi}^{①} \\ -M_{fj}^{①} - M_{fi}^{②} \\ -M_{fj}^{②} \end{bmatrix} \tag{1-13}$$

根据以上分析,非结点荷载作用下的杆端弯矩由两部分组成,一部分是在结点加阻止转动的约束条件下的固端弯矩,如图 1-4(b)所示;另一部分是在等效结点荷载作用下的杆端弯矩,如图 1-4(c)所示。

将两部分杆端弯矩叠加起来,即得非结点荷载作用下的各杆杆端弯矩,即

$$\begin{bmatrix} M_i^{ⓔ} \\ M_j^{ⓔ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4i_e & 2i_e \\ 2i_e & 4i_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_i^{ⓔ} \\ \theta_j^{ⓔ} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{fi}^{ⓔ} \\ M_{fj}^{ⓔ} \end{bmatrix} \tag{1-14}$$

在解决了上述 3 个问题之后，就可以应用有限元位移法方便地计算一般连续梁结构了。

例 1.1　应用有限元位移法计算图 1-5 所示连续梁的内力。

解　(1)将结构离散化，单元及结点编号如图 1-5 所示。

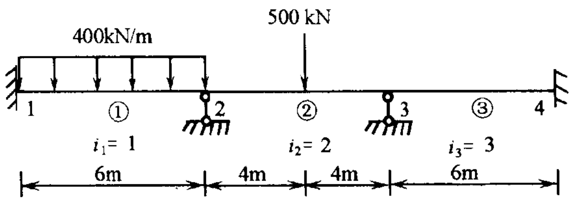


图 1-5

(2)求固端力矩及等效结点荷载。

参照结构力学位移法中等截面直杆的固端弯矩的计算公式，三个单元固端力矩可以得出为

$$\begin{bmatrix} M_{fi}^{\textcircled{1}} \\ M_{fj}^{\textcircled{1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1\,200 \\ 1\,200 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} M_{fi}^{\textcircled{2}} \\ M_{fj}^{\textcircled{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -500 \\ 500 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} M_{fi}^{\textcircled{3}} \\ M_{fj}^{\textcircled{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

应用式(1-13)求得等效结点荷载列阵为

$$\begin{bmatrix} P_{e1} \\ P_{e2} \\ P_{e3} \\ P_{e4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -M_{fi}^{\textcircled{1}} \\ -M_{fj}^{\textcircled{1}} - M_{fi}^{\textcircled{2}} \\ -M_{fj}^{\textcircled{2}} - M_{fi}^{\textcircled{3}} \\ -M_{fj}^{\textcircled{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\,200 \\ -700 \\ -500 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(3)求单元刚度矩阵及相应的单元贡献矩阵。

$$\boldsymbol{k}^{\textcircled{1}} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} k_{ii}^{\textcircled{1}} & k_{ij}^{\textcircled{1}} \\ k_{ji}^{\textcircled{1}} & k_{jj}^{\textcircled{1}} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{K}^{\textcircled{1}} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} k_{ii}^{\textcircled{1}} & k_{ij}^{\textcircled{1}} & 0 & 0 \\ k_{ji}^{\textcircled{1}} & k_{jj}^{\textcircled{1}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{k}^{\textcircled{2}} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} k_{ii}^{\textcircled{2}} & k_{ij}^{\textcircled{2}} \\ k_{ji}^{\textcircled{2}} & k_{jj}^{\textcircled{2}} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{K}^{\textcircled{2}} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{ii}^{\textcircled{2}} & k_{ij}^{\textcircled{2}} & 0 \\ 0 & k_{ji}^{\textcircled{2}} & k_{jj}^{\textcircled{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{k}^{\textcircled{3}} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} k_{ii}^{\textcircled{3}} & k_{ij}^{\textcircled{3}} \\ k_{ji}^{\textcircled{3}} & k_{jj}^{\textcircled{3}} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{K}^{\textcircled{3}} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{ii}^{\textcircled{3}} & k_{ij}^{\textcircled{3}} \\ 0 & 0 & k_{ji}^{\textcircled{3}} & k_{jj}^{\textcircled{3}} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

(4)求整体刚度矩阵。应用式(1-11)，有

$$
\boldsymbol{K}=\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \quad 1 \quad & \quad 2 \quad & \quad 3 \quad & \quad 4 \quad \end{array} \\ \begin{bmatrix} k_{ii}^{①} & k_{ij}^{①} & 0 & 0 \\ k_{ji}^{①} & k_{jj}^{①}+k_{ii}^{②} & k_{ij}^{②} & 0 \\ 0 & k_{ji}^{②} & k_{jj}^{②}+k_{ii}^{③} & k_{ij}^{③} \\ 0 & 0 & k_{ji}^{③} & k_{jj}^{③} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 12 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 12 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}
$$

(5)引入支承条件。本例中,支承条件为 $\theta_1=0,\theta_4=0$,因此将整体刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 的第一、四行和列进行修改,同时荷载列阵 $\boldsymbol{P}$ 的第一、四个元素改为零,得基本方程

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -700 \\ -500 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

(6)求解基本方程,得

$$
\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -50 \\ -25 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

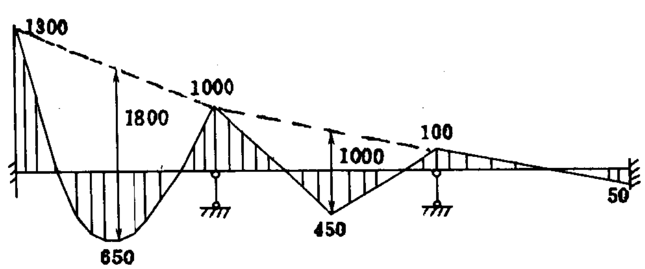
(7)计算各杆杆端弯矩。应用式(1-14),有

$$
\begin{bmatrix} M_i^{①} \\ M_j^{①} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -50 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1\,200 \\ 1\,200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1\,300 \\ 1\,000 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} M_i^{②} \\ M_j^{②} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -50 \\ -25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -500 \\ 500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1\,000 \\ 100 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} M_i^{③} \\ M_j^{③} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -25 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -100 \\ -50 \end{bmatrix}
$$

据此可作出该连续梁的弯矩图如图 1-6 所示。



M图 (kN·m)

图 1-6