高等代数学

（第2版）

张贤科 许甫华 编著

清华大学出版社

高等代数学
（第2版）

张贤科　许甫华　编著

清华大学出版社
北京

内容简介

本书主要内容为线性代数，包括数与多项式，行列式，线性方程组，矩阵，线性空间，二次型，线性变换，空间分解，矩阵相似，欧空间和酉空间，双线性型；选学内容有正交几何与辛几何，Hilbert 空间，张量积与外积等. 内容较深厚，便于读者打下优势基础；观点较新，便于读者适应现代数学. 还有若干介绍性内容. 可作为高校数学、物理、计算机与电子信息等理工专业的教材，或供其他专业参阅. 本书成书于作者长期在中国科学技术大学和清华大学讲授此课及从事代数学方面的研究工作，编写时参阅了国外若干著名教材. 书中配有难易不等的丰富例题与习题，书后有答案与提示，附录，中英文名词索引，及参考书目.

版权所有，翻印必究. 举报电话：010-62782989　13901104297　13801310933
本书封面贴有清华大学出版社激光防伪标签，无标签者不得销售.

图书在版编目(CIP)数据

高等代数学 / 张贤科，许甫华编著. —2 版. —北京：清华大学出版社，2004
ISBN 7-302-08227-8

Ⅰ. 高…　Ⅱ. ①张… ②许…　Ⅲ. 高等代数—高等学校—教材　Ⅳ. O15

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 017360 号

出 版 者：清华大学出版社　　**地　　址**：北京清华大学学研大厦
http://www.tup.com.cn　　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**客户服务**：010-62776969
责任编辑：刘　颖
印 装 者：北京鑫海金澳胶印有限公司
发 行 者：新华书店总店北京发行所
开　　本：185×230　**印张**：28.5　**字数**：586 千字
版　　次：2004 年 7 月第 2 版　2004 年 7 月第1 次印刷
书　　号：ISBN 7-302-08227-8/O・349
印　　数：1～3000
定　　价：39.00 元

本书如存在文字不清、漏印以及缺页、倒页、脱页等印装质量问题，请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话：(010)62770175-3103 或(010)62795704

引　言

本书内容的主体也称为线性代数学，含数与多项式、线性代数常有内容，以及多种内积空间，张量积和外积等. 并配有大量例题、习题，及答案与提示. 书后有附录，中英文名词索引等. 本书内容较深厚，基础训练有所加强，以便使各专业的学习者都能在此重要课程中，为将来的发展打下牢固的根基. 书中也包含了一些进一步的内容，采用了较新的理论观点，以便于学习者日后适应现代科学的发展和应用. 此外，不少章节尽量独立，较难部分标以 * 号，便于使用时对内容作各种配置取舍，以适应不同的教学环境需要(如两学期或一学期)，也便于参考.

作者长期在中国科学技术大学和清华大学讲授高等代数和从事代数学方面的研究工作，这是本书的基础. 以本书初稿印刷的讲义已在清华大学数学系、计算机系本科生教学中使用多次，也已在全校性实验班、辅修学位班等多次使用. 此次又作了系统的修改和补充. 在教学和编写本书过程中，参阅了国外一些著名大学新近的教材和研究生教材，及国内一些主要教材，并试图体现作者在多年学习、教学和研究工作中的一些感悟. 叙述上，力求由浅入深，简洁明确. 全书强调了基础训练和基本概念. 一方面，坐标和矩阵方法使用较多，因为有简洁直接性、可算性，也有助于对以后抽象概念的理解领悟. 另一方面，对于映射和变换等概念和方法，也有较充分论述，这是进一步学习和阅读现代文献的基础. 编写时，为了适应理论和应用两方面的新需求，采用了较新的理论角度，也写进了一些一般书中不常有的内容，一些地方试探了新的、可能更自然的发展脉路和证法. 例如全书以一般域为基域(特别可为有限域)，而不只限于(实)数域. 这对以后的理论学习很有好处，而且对于越来越重要的计算机和通信应用十分必要. 又如新增“线性表示介绍”一节作为选读内容，不仅本身非常有趣味，而且是一门十分重要的现代数学分支的萌芽. 再如，书中少量使用了群、环等名词术语，有助于对内容提纲挈领地理解把握. 极力避免这些名词是不明智的，国外许多文献已经在大量使用. 开始使用这些名词并不难，在不断的使用中其含义就逐渐具体明晰了. 还比如，对偶空间一节有对偶性，将来会遇到许多抽象的对偶性，例如阿贝尔群与其特征群的对偶，Galois 理论等. 而现在的对偶有直观的几何意义(正交补)，较容易懂. 书中还定会有许多不足或错误之处，特别是有些处理上不太一般的地方，恳请读者和教师提出批评指正.

本书主要是为高等院校数学、物理、计算机科学与技术或电子信息与电气等学科而编写的教材(周 4 学时两学期),讲授时,可略去部分内容(尤其是带 * 号部分)供将来参考.对大学一年级学生可将较难的第 1 章放在第 6 章之后讲解或略去.第 7 章中,1～6 节和 7～9 节是两种证明路线,可以只取其中一种,第二种较易接受且实用.本书也可以作为其他专业学生的教材(只讲一学期),可只讲第 2～6 章及二次型(即第 8 章前 4 节),或再对某些内容作些介绍(如约当标准形和欧几里得空间).本书还可作为一些院校的研究生教材.也可供数学工作者、科技工作人员、教师、研究生等参考.事实上,在作者主持的一个讨论班上(椭圆曲线的数论),常引用本书作参考(例如一族自伴变换的同时对角化和公共特征向量,不变因子,对偶等).作者也遇到过一些非数学工作者询问外积(Grassmann 代数),张量,及空间分解等本书可以解决的不少问题.

书中各章内容特点简述如下.第 1 章 3～6 节讲述多项式(及整数)的唯一因子分解,以后是根与重根,整系数多项式的分解,和对称多项式.本章还介绍了群和环的定义(可以先只作为名词使用).选学内容有整数的同余,以及因子分解定理的推广.本章内容不仅是代数的,也是整个数学的重要基础.对实用也很重要.

第 2 章是行列式的丰富内容,也引入了矩阵及其简单运算.

第 3 章以线性方程组为线索,引入了矩阵的秩、行向量空间等最基础的内容.

第 4 章是矩阵方法的基础,例题很多.

第 5～6 章是线性代数最重要的基础内容,商空间为选学内容.

第 7 章,7.1～7.6 节和 7.7～7.9 节是两种路线,理论上都有重要前景,数学专业学生应都掌握(难点在 7.5 节).非数学专业学生可只学后一种,便于计算应用.

第 8 章前 4 节很浅易,8.5～8.7 节是本书在第 7 章之后的第二个较难部分.

张量积第 1 节是简介,其余各节对张量及外积的各方面论述甚详.

各章习题有基本的和较难的两种.一般教学掌握基本习题和正文即可.书末有答案与提示,但建议读者不要轻易去看.因为无论在学习上,还是在心理上,独立攻克一个难题会受益良多.

初学代数学的人有的感到不能很快适应,会提出为何与别的学科感觉不同,有何用途等问题.按 N. Bourbaki 的数学结构主义,全部数学基于三种母结构:代数结构、顺序结构、拓扑结构.它们相互组合分化,构筑起数学巨厦.如代数数论、代数几何、模形式(自守函数)、算术代数几何、代数 K-理论、同调代数、代数拓扑、泛函分析、范畴、格论、拓扑代数、Lie 群与 Lie 代数、群与代数表示论,等等,都是代数学起重要作用的充满生机的现代数学分支.代数学在数学的现代发展中作用特别突出.随着电子计算机和信息通信的革命性大潮,代数学(离散数学)的应用发展更为惊人.

代数学的历史当然可以追溯到人文之初.它的西文名称(Algebra)源于阿拉伯数学和天文学家花拉子米(al-Khowārizmī)公元 820 年的书名《al-jabr w'al muqabala》(移项与

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

并项). 在中国1835年由李善兰译为代数学. 但从数学发展史意义上可以说,代数学的本意就是"用符号代替(未知)数"并参加运算得出解答,这源于印度. 后来发展到"用符号代替一般表达式"(法国 F. Viete, 1540—1603). 现在可以说,代数学就是"用符号代替各种事物(称为元素)并研究其间关系"的学问,也就成为研究各种代数系统(即元素间有一定运算关系的集合,如群、环、域、线性空间,及各种推广)的一个数学分支. 这些代数系统是现实世界无数真实对象的高度抽象概括(符号"代替").

代数学的这一高度抽象概括的特性,不同于其他数学学科. 这也是有些初学者感到不具体直观的原因. 从这种意义上说,高等代数正是代数学的大门和基础. 高等代数学的对象,如线性方程组、矩阵、多项式,还是比较具体的. 再如线性空间、内积、变换等与中学立体几何中的空间、内积、旋转等也很相近. 人类的认识总是要经过具体——抽象——具体(思维中的具体)的过程. 只要不断努力,量变引发质变,抽象的理论是完全可以被掌握的. 在登山的征途上,没有平坦的大道可走,只有那在陡峭的山路攀登上能体味欢乐的人,有希望到达光辉的顶点. 只有山路的陡长,才有顶峰的辉煌. "会当凌绝顶,一览众山小". 愿以七绝逍遥游一首,赠给有志奋斗的青年:

鲲鹏怒化垂天翼,
海运扶摇九万击.
野马息吹持视下,
苍苍正色上至极.

编写过程中参阅了许多国内外文献(见参考文献),在此深表感谢.

林小雁同志在教学中多次使用本教材,给出许多习题的答案与提示. 深表感谢.

北京大学赵春来教授给本书提出了宝贵的意见,张量积一章就是听取他的意见增加的. 深表感谢. 作者也对中国科大和清华大学同仁们的热情支持深表感谢.

清华大学教务处和出版社对本书的出版给予了大力支持,在此一并深表感谢.

最后,愿借此机会对30多年前大学的代数老师曾肯成教授致谢. 曾先生毕业于清华大学,工作于中国科大,以学问和师德闻名. 现将先生66岁时,作者书赠的七言一首录此以致深深谢意:

曾吟水木清华园,
肯为英材倾玉泉.
成就文宣千代业,
师法至圣一大贤.

作　者

1997年2月于清华园

再版引言

此次再版重写了部分内容，使更易理解. 也增写了新内容，并将全书分为三部分.

第Ⅰ部分，基础内容(第 1～6 章). 可作为高校各专业的线性代数教材，讲授 1 学期(可略去第 1 章，适当介绍二次型). 此次重写了矩阵的广义逆，增写了最小二乘法(参考内容).

第Ⅱ部分，深入内容(第 7～9 章). 可作为高校理工科，如数学、物理、计算机科学与技术、电子信息与电气等学科的第 2 学期教材. 此次将欧几里得和酉空间两章合并，改写了正交相似相抵. 参考内容中，重写了模的分解，增写了群表示和特征(变换族)，以及无限维空间.

第Ⅲ部分，选学内容(第 10～12 章). 增加了两章：正交几何与辛几何，Hilbert 空间. 都是欧几里得和酉空间的发展. 前者的基域可以是任意域(例如二元域F_2)，“内积”可以是对称的，交错的，奇异(退化)的；而 Hilbert 空间即是无限维的完备的酉空间. 这些内容在科学和技术的众多领域很重要，清华大学李大法教授等多次建议作者加以介绍. 连同张量积和外积，此三章内容精简，宜作选读. 一般不在基础课课内详讲，或仅作介绍. 也可供有关人士参考. 本书的第二，三部分也可用作一些高校高年级本科生和研究生的教材.

此外，应双语(包括海外)人士的建议，增写了英一中文名词索引以便于查阅. 附录中增加了拓扑基础. 还增加了一些习题. 与本书配套编写了《高等代数解题方法》(清华大学出版社)，给出了全部习题的分析解答，便于读者自学.

自本书出版以来收到众多反映，作者在此对各方支持深表感谢. 此次再版参考了一些国内外文献(见参考书目)，尤其是 S. Roman，J. Weidmann，B. Jacob 等的书，深表感谢.

现代数学，尤其是代数，对初识者往往暗显出挑战性. 可它是如此的重要和美妙，令任谁都欲罢不能：

数学王子高斯(C. Gauss)有名言：“数学是科学之王，数论是数学的皇后”.

数学奇才、全才爱尔特希(P. Erdös)说“数学乃是人类所从事的唯一一种永恒的活动”.

微分拓扑奠基人惠特尼(H. Whitney)说：“创造性的数学工作并非少数天才的特权，它可以是我们之中有强烈愿望和充分自主性的任何人的顺乎自然的活动”.

数论大家赛尔伯格(A. Selberg)感慨到:“我很同情非数学家,我觉得他们失去了一种最激动人心的、丰富的智力活动的回报”.他还指出,“今天的数学主要关心的是结构以及结构之间的关系,而不是数之间的关系.这种情况最初发生在 1800 年左右,首次的突破是抽象群概念的引入,目前它在数学领域中无所不在.”

法国大数学家嘉当(H. Cartan)指出:“我们目睹了代数在数学中名副其实的到处渗透”,“日益清楚的意识到代数概念在数学的几乎所有分支中所起的作用”,“随着目前数学的这种代数化,任何研究人员再也不能无视近世代数这一必不可少的工具了”.

我国古哲有言:“水之积也不厚,则其负大舟也无力.风之积也不厚,则其负大翼也无力.”“适千里者三月聚粮”.深厚的数学基础,对于科学的远行人,是载送航船的海水,是举托鹏翼的扶摇.“自强不息,厚德载物”,正是清华的校训和传统.校训源自《易经》中“乾”和“坤”的象传:“天行健,君子以自强不息”,“地势坤,君子以厚德载物”.它承传了古贤对宇宙万物的观历感悟,法乎天地,合于乾坤,成就了多少有志“君子”.引发“君子以自强不息”的“乾”的主文共六句话,可解释为对一事物(以“龙”指称)的发生—发展—兴盛—衰落过程的深刻辩证揭示,“君子”的人生尤其如此:初潜勿用,次现宜行.中当自强,虽危无咎.进机或跃,勿须忧惧.德合天地,与时腾飞.高极必反,悔之未晚.我初中母校正好在青龙山山坡上,涧绕山环.去年 50 年校庆时应校长之令,写下《青龙颂》一诗.借题发挥,在此送给自强不息的青年“君子”:

青龙潜卧隐壑山,
夕惕若厉日乾乾.
或跃在渊咎何有,
数及九五飞在天.

作　者

2003 年 5 月于清华园

目　录

第Ⅱ部分　深入内容

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

第Ⅲ部分 选学内容

第1部分　基础内容

第1章

数与多项式

1.1 数的进化与代数系统

自然数 1,2,3,…的发现史可能与人类史同样古老. 自然数全体记为$\mathbb{N}$,其中有加法和乘法两种运算,但对二者的逆运算(减法和除法)均不封闭. 人类在实践中逐渐接受了零和负数为“数”,于是由自然数发展出**整数**(即正负自然数和零). 整数全体记为$\mathbb{Z}$(源于德文 Zahl),对加法及其逆运算封闭. 人类又接受分数为数,发展出**有理数**. 全体有理数记为$\mathbb{Q}$(源于 quotient),对加法和乘法及它们的逆运算均封闭(0 不作除数). 在很长时期内,人们认为有理数就是世上仅可能有的数了,在实用中似乎也足够了. 后来为了极限的完备性(即 Cauchy 序列均有极限存在;直观上表现为任意线段都能有数表其长),人类终于承认无限不循环小数也是数,于是发展出**实数**. 实数全体记为$\mathbb{R}$(源于 real),对极限是完备的,对加、乘法及它们的逆运算也都是封闭的. 很久以后为了解代数方程的需要,例如解方程 $x^2+1=0$,人类终于承认$\sqrt{-1}$等虚数为数,由此发展出**复数**. 复数全体记为$\mathbb{C}$(源于 complex),任意(复系数)代数方程在$\mathbb{C}$中均有解(见图 1.1).

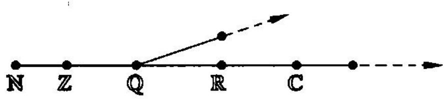

图 1.1

由此可见,数的概念随人类的进步是不断进化的. 人们后来又发展出其他许多“数”. 而且,更重要的是,人们由这些数的发展得到启示,概括抽象出群、环、域等概念,使数学进入了新天地.

为了使用清楚方便,以下我们给出群、环、域的定义和术语,这对阅读本书已足够. 尽早熟悉这些定义和术语,对学习和应用近代数学甚有益处.

定义 1.1 一个群(group)即是一个非空集合 G,在其元素之间有着一个二元运算 $*$(即对 G 中任意元素 a,b,有 G 中唯一元素(记为 $a*b$)与之对应),且满足如下条件:

(1) **封闭性**:对任意 $a,b\in G$,总有 $a*b\in G$;

(2) **结合律**：$a*(b*c)=(a*b)*c$ （对任意 $a,b,c\in G$）；

(3) **存在恒元**：存在 $e\in G$，使 $e*a=a$ 对所有 $a\in G$ 成立；

(4) **存在逆元**：对任意 $a\in G$，总存在 $b\in G$，使 $b*a=e$.

上述群常记为$(G,*)$或 G.(4)中的 b 称为 a 的**逆元**，记为 a^{-1}. e 称为**恒元**，也称为**单位元**.有时也称运算 $*$ 为“乘法”运算，事实上它可以是满足上述 4 个条件的任意二元运算，并不一定是普通意义下的数的乘法.此外注意，上述定义中的恒元和逆元都是乘在左边的，但可以证明乘在右边也具有同样的性质，也就是说，对任意 $a\in G$，有

$$a*a^{-1}=e,\qquad a*e=a.$$

事实上，由 $a^{-1}=e*a^{-1}=(a^{-1}*a)*a^{-1}=a^{-1}*(a*a^{-1})$，两边在左方均再乘以 $(a^{-1})^{-1}$即得 $e=a*a^{-1}$.又显然有 $a*e=a*(a^{-1}*a)=(a*a^{-1})*a=e*a$.

如果群$(G,*)$还满足**交换律**，即 $a*b=b*a$ 对任意 $a,b\in G$ 成立，则该群称为 **Abel 群**或**交换群**. Abel 群的运算经常记为加法（用$+$代替 $*$ 作为运算符），恒元常记为 0 称为**零元**，a 的逆元常记为$-a$ 称为 a 的**负元**.

简言之，群就是具有一个运算及其逆运算的集合（满足 4 个条件，运算不一定可交换）.乘法群即是可作乘除的集合.加法群即是可作加减的集合.

例 1.1 $(\mathbb{Z},+)$，$(\mathbb{Q},+)$，$(\mathbb{R},+)$，$(\mathbb{C},+)$均为 Abel 群，这里加法($+$)均指普通数的加法.

定义 1.2 一个**环**(ring)是一个集合 R，其元素间有两个二元运算，分别记为加法($+$)和乘法($\cdot$)，且满足：

(1) $(R,+)$是 Abel 群；

(2) $(R,\cdot)$是半群，即满足封闭性和结合律；

(3) **分配律** $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$，$(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$

对任意 $a,b,c\in R$ 成立.

上述环记为$(R,+,\cdot)$或 R，乘号 $\cdot$ 常省去而记 $a\cdot b$ 为 ab，加法零元常记为 0.注意 $0\cdot a=a\cdot 0=0$ 对任意 $a\in R$ 成立，事实上，$0a=(0+0)a=0a+0a$，即得 $0a=0$.

简言之，环就是具有加、减、乘运算的集合.

如果环 R 对乘法有恒元 e，则称 R 为**含幺环**.在含幺环 R 中，对 $c\in R$，若存在 $x\in R$ 使得 $xc=cx=e$，则称 x 为 c 的**逆元**，称 c 是**可逆的**（或称 c 为 R 的**单位**）.如果一个环 R 中乘法满足交换律，则称 R 为**交换环**.

定义 1.3 一个**域**(field)即是一个环$(F,+,\cdot)$，且要求 F 的非 0 元全体 F^* 对乘法是 Abel 群.详言之，域即是有两个二元运算($+$)和($\cdot$)的集合 F，且满足

(1) $(F,+)$是 Abel 群；

(2) $(F^*,\cdot)$是 Abel 群；

(3) 分配律.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com