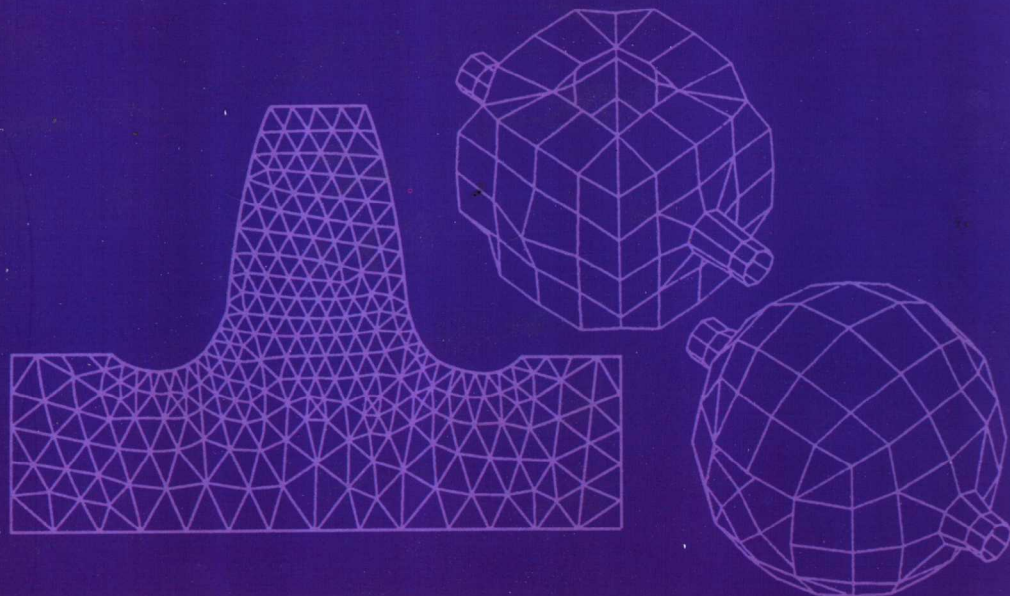
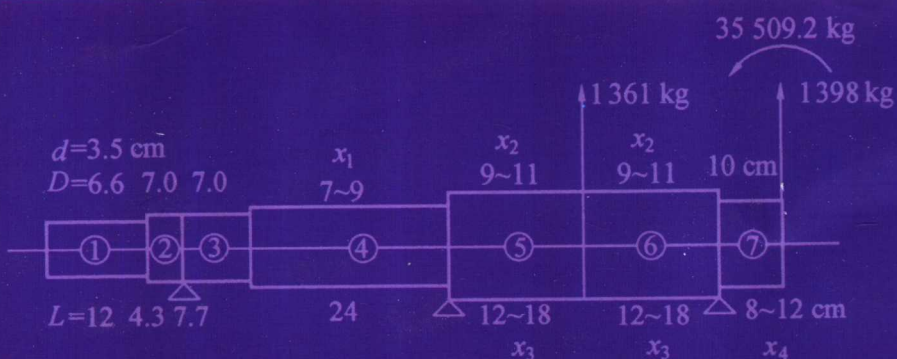


# 机械结构优化设计

孙靖民 梁迎春 陈时锦 编著



哈尔滨工业大学出版社

# 机械结构优化设计

孙靖民 梁迎春 陈时锦 编著

哈尔滨工业大学出版社

哈尔滨

## 内 容 简 介

本书是作者在总结多年教学体会和科研实践经验的基础上,结合研究生有关课程的基本要求编写的。

本书内容包括:概述、机械结构优化设计的特点和示例、优化设计方法的数学基础、弹性力学基础、优化设计方法介绍、机械结构形状优化设计、机械结构形状优化设计中的形状边界成形和单元剖分技术、机械结构优化设计应用实例。

本书既可作为高等院校机械类专业的研究生教材,也可作为本专科学生的参考教材,还可供从事机械专业的教学和工程技术人员参考。

### 图书在版编目(CIP)数据

机械结构优化设计/孙靖民,梁迎春,陈时锦编著.

—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2004.9

ISBN 7-5603-2074-0

I.机… II.①孙…②梁…③陈… III.机构学-  
高等学校-教材 IV.TH112

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 087898 号

出版发行 哈尔滨工业大学出版社  
社 址 哈尔滨市南岗区教化街 21 号 邮编 150006  
传 真 0451-86414749  
印 刷 肇东粮食印刷厂  
开 本 787×1092 1/16 印张 115 字数 278 千字  
版 次 2004 年 9 月第 1 版 2004 年 9 月第 1 次印刷  
书 号 ISBN 7-5603-2074-0/TH·123  
印 数 1~4 000  
定 价 17.00 元

# 前 言

经过近 20 多年的教学和科学研究实践,我们逐步加深了对现代机械设计理论和方法,特别是有限元-优化设计方法在研究生教学和工程设计实践中的重要地位和作用的认识。在研究生教学过程中,尤其是在完成了国家自然科学基金项目《机械结构形状优化方法及应用研究》以后,更感到有必要在总结已经取得的经验和成绩的基础上,继续前进、开拓创新,写出具有机械结构优化设计特点的专用教材。

本书内容的组织尽可能做到结构严谨、层次分明,理论和实践相结合,兼顾系统性和逻辑性。对所论问题的叙述力求深入浅出,适合研究生的自学和从事机械设计的工程技术人员阅读的要求。

全书共分八章:第一章概述;第二章机械结构优化设计的特点和示例;第三章优化设计方法的数学基础;第四章弹性力学基础;第五章优化设计方法介绍;第六章机械结构形状优化设计;第七章机械结构形状优化设计中的形状边界成形和单元剖分技术;第八章机械结构优化设计应用实例。由孙靖民、梁迎春和陈时锦编著。

在本书编写过程中得到了哈尔滨工业大学邹经湘、王新荣、高圣英、黄开榜、刘亚忠以及哈尔滨工程大学米成秋和合肥工业大学柯尊忠教授的大力支持和帮助,特此致谢。

书中的第五章虽属综述性质,但却是优化方法的基础。第六章比较侧重于结构形状优化方法介绍。这两章虽是整个优化设计方法的整体,但读者可以根据具体情况有选择地阅读。

局限于教学和科学研究侧重面造成的片面性,书中涉及的机械结构优化设计的内容和所举实例仅是这个领域的很小的局部,加上我们在弹性结构计算力学和变分学方面的基础浅薄,所以书中欠妥之处在所难免,热盼有关专家和读者不吝指正,我们在此表示诚挚的感谢。

作 者

2003 年 12 月于哈尔滨

# 目 录

<b>第一章 概 述</b> .....	1
1.1 机械结构设计中的优化技术 .....	1
1.2 优化方法发展进程的简要回顾 .....	2
1.3 形状优化的发展趋势 .....	4
<b>第二章 机械结构优化设计的特点和示例</b> .....	5
2.1 机械结构优化设计的特点 .....	5
2.2 机械结构优化设计的示例 .....	5
2.3 机械结构优化设计数学模型的表述.....	12
<b>第三章 优化设计方法的数学基础</b> .....	14
3.1 函数的极值条件.....	14
3.2 变分法简述.....	22
3.3 泛函极值——极大值原理.....	32
<b>第四章 弹性力学基础</b> .....	36
4.1 小位移弹性理论的基本方程.....	36
4.2 小位移弹性理论中的能量原理.....	45
<b>第五章 优化设计方法介绍</b> .....	53
5.1 优化设计问题的基本解法.....	53
5.2 无约束优化问题的解法.....	55
5.3 线性规划方法简介.....	65
5.4 约束优化问题的解法.....	67
5.5 优化准则法.....	88
<b>第六章 机械结构形状优化设计</b> .....	101
6.1 机械结构形状优化设计问题的数学模型 .....	101
6.2 弹性结构形状优化设计中的敏度分析 .....	105
6.3 敏度分析的物质导数方法 .....	109
6.4 机械结构形状优化设计问题的求解方法简介 .....	117

---

<b>第七章 机械结构形状优化设计中的形状边界成形和单元剖分技术</b> .....	124
7.1 机械结构形状边界的成形技术 .....	124
7.2 机械结构形状有限元 - 优化设计时的单元剖分技术 .....	133
<b>第八章 机械结构优化设计应用实例</b> .....	141
<b>参考文献</b> .....	177

# 第一章 概 述

## 1.1 机械结构设计中的优化技术

人们在做任何一个设计时,不管是分析还是综合,都是要用某个标准衡量其所做的决策是否最佳。所以,优化问题是设计中广泛存在的一个问题,且一直就是数学家们和实际工作者所关心的问题之一,是工程设计所追求的永恒主题,是应用数学范畴内的一个重要分支,也是科学技术领域中的重要课题之一。

机械结构系统的模型可以用一组代表力、结构特性和强度等相互关系的数学方程式表述。如静态问题时的

$$F = Kq \quad (1.1)$$

或动态问题时的

$$M\ddot{q} + D\dot{q} + Kq = f(t) \quad (1.2)$$

式中  $K$ ——结构的刚度特性;  
 $M$ ——结构的质量特性;  
 $D$ ——结构的阻尼特性;  
 $F$  和  $f(t)$ ——静载荷和动载荷;  
 $q$ ——静态位移或相应的动态响应。

机械结构系统的模型也可以用图 1.1 所示的框图表示(为了简化讨论,没有引入动态模型中的  $M$  和  $D$ ,但这并不影响所讨论问题的实质)。

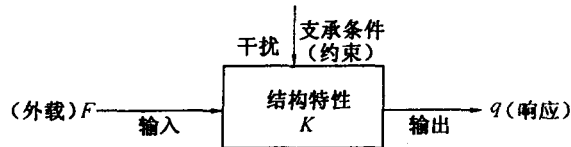


图 1.1 结构系统模型

在求解  $F = Kq$  类型的方程时,将出现三类问题,即:

(1) 已知  $F$  和  $K$ , 求输出  $q$ , 即求静态特性, 如位移。此时有

$$q = \frac{F}{K} \quad (1.3)$$

(2) 已知  $K$  和  $q$ , 求输入  $F$ 。此时有

$$F = Kq \quad (1.4)$$

(3) 已知  $F$  和  $q$ , 求结构特性  $K$ 。此时有

$$K = \frac{F}{q} \quad (1.5)$$

上述三类问题可以通过结构静、动态方面的分析或综合理论和方法求解,也可以采用试验方法进行结构模态或参数识别的理论和方法求解。

当外载荷  $F$  和结构特性  $K$  已知时,求解应力(强度问题)或应变(刚度问题)的有效方法是有限元分析方法。若外载荷  $F$  或结构特性  $K$  未知,可以采用载荷参数或结构参数的识别方法。但若结构几何尺寸或形状、拓扑等是可变的(设计时可以作为设计变量进行调整,以便在外载荷一定和满足给定约束条件下获得最佳的结构特性  $K$  时),就是结构的优化设计问题了。

优化设计也可以看成是一个研究结构设计的理论和方法问题。这时,则图 1.1 可以改画成如图 1.2(a)、(b) 所示的框图。

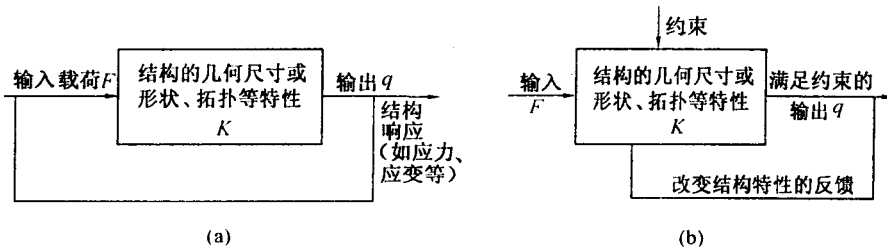


图 1.2 结构设计控制模型

对于图 1.2(a) 所示的结构设计控制模型,可以认为此时的  $K$  是固定不变的。设计控制的目的是为了确定在输入变量(变化的外载荷,如激振力、风力等)取不同的数值时的结构系统的响应(应力或应变、位移等)。这是一个结构分析的设计问题的模型。

对于图 1.2(b) 所示的模型,这时结构特性  $K$  是变化未知的,输入和输出是设计的指标。可以认为,此时设计者所要研究的问题是,系统的参数或形状、拓扑等几何特性应如何改变才能改进系统的特性,使之达到最佳。所以,这是一个结构优化设计问题的模型。

## 1.2 优化方法发展进程的简要回顾

早在 17、18 世纪,人们已认识到优化问题实质上是数学中的函数和泛函的极值问题,而其时相继提出的最速下降法(梯度法)、牛顿法和拉格朗日乘子法以及尤拉 - 拉格朗日方程等函数或泛函极值求解的方法,实际上就已经奠定了优化方法的基础。然而,由于实践中提出的许多优化问题往往是比较复杂的,因而在 20 世纪 50 年代计算机被广泛采用之前,优化理论和方法的发展一直是缓慢的,且理论上并没有多大的进展。

20 世纪五六十年代,作为无约束优化寻优方向的数值解法的基本环节,在黄金分割法之外,又产生了一些一维搜索技术,如一维搜索的试探类方法和插值类方法等。同时,以梯度法和牛顿法为基础的一系列梯度法和牛顿类型无约束优化方法,如共轭梯度法、变尺度法等,以及罚函数法、乘子类约束优化方法相继问世。1951 年,库恩(H. W. Kuhn)和塔克(A. W. Tacker)两人推导了关于不等式约束非线性优化问题的极值条件,即 K - T 条件。之后,贝尔曼(Bellman)的最优化原理和动态规划理论及庞特里亚金(Pontriagin)的极大值原理相继形成。1964 年,多恩(W. S. Dorn)、戈莫里(R. E. Gomory)和格林伯格(H. T.



Greenberg) 继 1904 年米歇尔(A. G. Michel) 提出机构拓扑研究观点之后, 出版了《结构优化自动设计》一书, 书中明确提出了一种结构的拓扑优化方法。

此外, 以极大值原理为基础, 提出了结构形状优化的理论和方法, 从而实现了优化问题从有限维的参数优化向无限维的形状优化的跨越。

20 世纪 70 年代前后, 从实用化的要求出发, 需要提高优化过程的收敛速度、精度和可靠性以及减小解题难度等, 精确一维搜索方法、乘子类方法以及非最优方向的优化准则法等。

从这里可以看出, 虽然生产实际问题往往是多变量、多约束、规模大的优化问题, 但计算机的应用, 导致了参数、形状、拓扑优化的理论和方法的迅速发展。

实际工程中的问题基本上都是非线性规划(约束的线性规划和非线性约束优化) 问题。生产实际的需要是活跃的因素, 因而在参数优化范畴内, 新方法不断出现, 其名目繁多, 且适用条件各异。要求理清思路, 进行归纳, 并指出一些主要优化方法的实质、有效性及其适用范围。例如, 在拓展变尺度法的过程中, 豪格(E. J. Haug) 总结出变尺度法统一公式; 孙靖民、曹宏毅和梁迎春提出数学规划方法的相互联系及其与优化准则法的统一思路; 他们还由拉格朗日乘子法的概念延伸出直接方法、间接方法、升维方法、降维方法等的优化方法分类, 以及乘子类方法的统一表述等等。这些对推动优化理论和方法的发展起了积极作用。

20 世纪 80 年代以来, 参数优化的理论和方法逐步趋于成熟, 形状和拓扑优化开始用于求解实际工程问题。

在优化设计发展的进程中, 针对不同特点和范畴的问题, 提出了多种优化方法, 如线性规划、几何规划、多目标优化、整数规划、离散变量优化、动态规划、模糊优化、广义优化以及遗传算法等。

这里仅把模糊优化、广义优化和遗传算法的含义简单给予说明。

模糊优化是 20 世纪 90 年代由哈尔滨建筑大学(现哈尔滨工业大学) 王光远教授提出来的。

考虑到结构优化设计给出的几何参数值  $x_i$  一般都具有一定的安全裕度, 而给出一个  $\alpha = [0, 1]$  的设防区(图 1.3)。它是属于一种  $\alpha$  水平截集的优化解法。在  $\alpha = [0, 1]$  范围内的某一个  $\bar{\alpha}$  值, 具有  $\bar{\alpha}$  的设防水平。

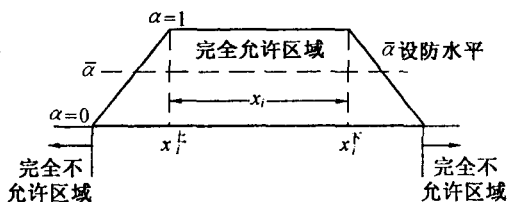


图 1.3  $\alpha$  设防区图

20 世纪末, 浙江大学冯培恩教授提出了“广义优化”的概念。他提出的是“对机械产品进行全系统、全性能、全过程的广义优化设计。”这是目前机械优化设计领域中的一个前沿性问题, 具有一定的理论价值和实际意义。它涉及如何对机械产品整体数值参数和非数值指标转换的处理、对各组成部件之间的合理分配以及对优化结果的评价等多层次、多方面的问题的研究。

遗传算法(Geneticalgorithm—GA) 是 1975 年由美国 J. Holland 提出的一种人工智能方法。它是在计算机上按生物进化过程进行模拟的一种搜索寻优算法。遗传算法的思路是把

函数的搜索空间看成是一个映射的遗传空间,而把在此空间进行寻优搜索的可行解看成是一个由向量染色体组成的集合。染色体是由基因元素(用二进制或十进制的字符串的编码表示)组成的向量。它们可以由计算机用随机数列的方程式给出。在遗传算法中,目标函数被转化成对应各个个体的适应度,它是目标函数对每个染色体进行评价的一个表述。它可以用来表示各个体的适应性能,并据以指导寻优搜索。适应度越大,说明其性能越好。

### 1.3 形状优化的发展趋势

结构形状(包括拓扑)优化设计是确定二维和三维结构形状的机械结构形状优化设计,它已成为结构优化设计方面的热门话题。

结构形状优化设计的研究内容主要是确定连续结构的边界形状和内部形状,如不同材料或厚度的分布区域、复合材料的结合面形状、结构间的加强层形状、板框结构的加强筋布局等;研究的目的是,改善结构特性(如降低应力集中)、应力及温度场等的分布状况,提高疲劳强度,延长结构件寿命等。

近 20 年来的结构形状优化设计实践历程中,国内、外研究者不断取得一些进展和突破,使得结构形状优化设计理论和方法渐露雏形并日臻完善。这里简要提及一些研究者及他们的工作。

采用数值方法进行形状优化的早期工作从辛柯维茨(O. C. Zienkiewicz)和康培尔(J. S. Compell)开始,以节点坐标为设计变量,使用等参有限单元模型和序列线性规划方法,设计水坝的最优形状。艾玛姆(M. H. Imam)较系统地阐述了三维形状优化的基本概念和形状描述的数值方法,以超曲线曲面的参数作为优化设计变量、应用三维等参单元分析、采用差分法进行敏度分析来求解形状优化问题。

豪格及其合作者提出了形状优化问题的变分方法,并使用最速下降法和有限元离散方法进行二维结构的形状优化设计,他还和 K. K. Choi 提出了形状设计敏度分析的物质导数方法,给出了边界积分和区域积分形式的敏度分析计算式。这种方法考虑了应力、应变或位移泛函,建立了主结构(初级结构)和伴随结构(交接结构)中应力或位移场变分的等价性条件,为形状优化提供了泛函的敏度分析方法,并解决了外边界或接触面变化的梁、盘、板、壳的形状优化问题。

国内自 20 世纪 90 年代以来,先后有大连理工大学力学研究所的程耿东、顾元宪,北京理工大学蔡士平,华中理工大学肖尚宏,中国科学院数学研究所的刘宏秋,北京航空航天大学的夏人伟,以及哈尔滨工业大学的孙靖民、梁迎春、郭太勇和陈时锦等,在结构形状和拓扑优化方面做了许多卓有成效的工作,并取得较好的效果。

结构形状优化设计与有限元分析密不可分,在优化迭代过程中,每次迭代都是在结构重分析结果的基础上进行的。很显然,采用有限元法进行结构的重分析,既需要单元网格剖分技术的支持,也需要对结构形状边界处各单元的边界曲线或曲面形成技术的支持。因此,以结构形状优化为主体,连接有限元分析和几何造型技术为一体,已形成了一门新的综合技术,或者说形成了结构优化设计的新的学科分支。

## 第二章 机械结构优化设计的特点和示例

### 2.1 机械结构优化设计的特点

我们把机械结构优化设计的特点概括为以下四点：

(1)精密、复杂及重、大的机器零件，如机床的阶梯主轴、机器的箱体、重型机器的轴和重型设备的机架、大型齿轮、复杂的叶轮等。这类零件我们称为“结构件”。用一般力学的解析方法计算它们的静、动态性能(如位移、应力、固有频率等)，已经难于满足工程实际的要求，甚至很难计算出所要求的结果，当然更不要说给出最佳的结果。

(2)结构优化通常需要对多种可行方案进行分析计算。这时需要利用计算机进行有限元分析—优化设计的自动或半自动的反复迭代，需要应用单元的网格剖分技术予以支持。

(3)机械结构形状优化、拓扑及布局优化的分析计算，需要进行设计变量对单元特性(如单元刚阵和质阵等)的求导计算或物质导数的计算，即结构的敏度分析计算。敏度计算的结果给出了优化设计过程中状态变量(如位移、应力等)的变化趋势，为下一步设计指明方向。这是因为敏度的实质就是“梯度”的类似，它的方向就是“梯度方向”的类似。所以，在结构参数和形状优化的设计中各种优化的数值方法均是以敏度分析为基础来构造的。

(4)整机或杆系结构等复杂结构的分析，不仅需要采用有限元法进行分析，而整机的优化还将涉及各组成部件的合理的数值分配问题。

综上所述，机械结构优化设计是以计算机为手段，集有限元分析技术、数值优化方法和计算机图形学于一体的综合性的方法和技术，是多学科交叉的一门机械结构设计的理论和技术。

### 2.2 机械结构优化设计的示例

**【例 2.1】** 直升机尾仓部分桁架结构的优化设计。

图 2.1(a) 是某直升机尾仓部分的外观图。图 2.1(b) 是它的内部桁架结构的两个视图。对于这种桁架结构，在设计时要求其总质量最小，但各杆受载时，对其单元的应力  $\sigma_i$ 、节点位移  $y_i$  以及振动的固有频率  $\omega$  都应有所限制。

图示的桁架结构，共有 108 个杆单元，28 个节点。若每个节点考虑 3 个自由度，共有 72 个自由度(28 个节点中有 4 个节点被固定)。对于这样的结构，目前都是用有限元法来计算它的  $y_i$ 、 $\omega^2$  和  $\sigma_i$ 。当取各杆横截面积  $A_i$  为设计变量(可以把  $A_i$  进行分组处理，以减少设计

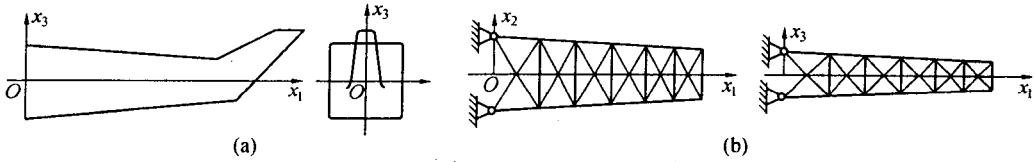


图 2.1 直升机尾仓部分的外观及桁架结构

变量数目)时,相应的计算公式是

$$K(A)y = F \quad (2.1)$$

$$K(A)\bar{y} = \omega^2 M(A)\bar{y} \quad (2.2)$$

式中  $K(A)$  和  $M(A)$ ——结构刚阵和质阵;

$F$ ——载荷阵;

$y$ ——节点位移向量;

$\omega$  和  $\bar{y}$ ——固有频率和对应的振型矩阵。

式(2.1)和式(2.2)是由许多个平衡方程组成的方程组(又称状态方程),通过求解,可以得出与某一设计方案(某一组设计变量所确定的方案)相应的  $y_i$ 、 $\omega_i^2$  和  $\sigma_i$  值。

优化设计的目标是使结构总质量最小。若  $L_i$  是各杆单元的长度,则总质量( $\rho$  是材料密度)

$$f(A) = W = \rho g \sum_{i=1}^{108} L_i A_i \quad (2.3)$$

设计时,要求各  $\sigma_i$  都不能大于允许的  $\sigma_{i允}$ ,  $y_j$  必须小于允许的  $y_{j允}$ , 计算的最低固有频率  $\omega^2$  应大于频率的下限值  $\omega_0^2$ , 各设计变量  $A_j$  应限制在一定界限之内。

这样,本优化问题就可归结为:求一组变量  $A$ , 使目标函数

$$\begin{aligned} f(A) &\rightarrow \min \\ \text{s.t.} \quad &|\sigma_i| \leq \sigma_{i允} \quad i = 1, 2, \dots, 108 \\ &|y_j| \leq y_{j允} \quad i = 1, 2, \dots, 72 \\ &\omega^2 \geq \omega_0^2 \\ &A_i^F \leq A_i \leq A_i^L \end{aligned} \quad (2.4)$$

当然,这些约束条件可统一写成不等式  $g(A) \leq 0$  的形式。

**【例 2.2】 机床主轴结构的优化设计。**

图 2.2 是一个机床主轴的典型结构原理图。对于这类问题,目前也是采用有限元法,利用式(2.1)和式(2.2)形式的状态方程来计算轴端变形  $y$  和固有频率  $\omega$ 。

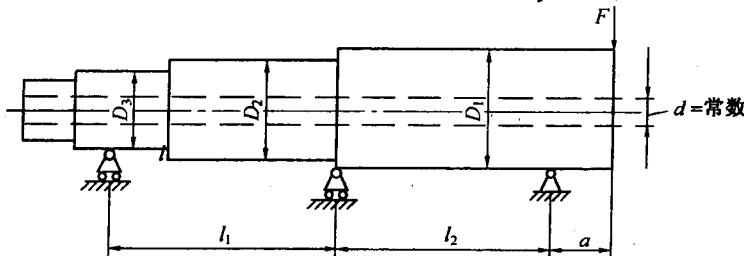


图 2.2 机床主轴的典型结构原理图

优化设计的任务是确定  $D_i$ 、 $l_i$  和  $a$ , 保证  $\gamma$  和  $\omega$  在允许限内, 使结构的质量最小。

这时, 问题归结为: 求  $D_i$ 、 $l_i$ 、 $a$  的值, 使质量  $f(D_i, l_i) = \gamma\pi[\sum(D_i^2 - d^2)l_i + (D_n^2 - d^2)a]$  为最小, 并满足条件

$$\begin{aligned} \gamma &\leq [\gamma] \\ \omega^2 &\geq \omega_0^2 \\ D_{i\min} &\leq D_i \leq D_{i\max} \quad i = 1, 2, \dots, n \\ l_{i\min} &\leq l_i \leq l_{i\max} \\ a_{\min} &\leq a \leq a_{\max} \\ N_{\min} &\leq \frac{l_1}{a} \leq N_{\max} \end{aligned}$$

式中  $\rho$ ——材料的密度;

$D_i$ 、 $l_i$ ——阶梯形主轴的外径和对应的长度;

$D_n$ ——与  $a$  对应的外径。

对主轴结构动力进行优化设计时, 也可取由振型和质量确定的能耗为目标函数。约束条件可以取激振力频率避开  $(1 \pm 20\%)\omega$  的禁区范围。

### 【例 2.3】热压机机架结构的优化设计。

机械结构优化设计的研究受到了广泛的重视, 并且逐步走向了应用。机械结构件, 尤其是那些重型机械的大型基础件, 作为机械产品的主体, 不仅在很大程度上决定着机器的质量, 而且对于整机性能的影响起着不可低估的作用。因此, 对这类结构件进行以质量最小和应力集中区的应力最小为目标的结构优化设计, 对于提高机械产品的性能、降低成本都具有重要意义。

热压机是用来压制胶合板、纤维板、刨花板等平板制品的一种液压机。某重型机器厂生产的 6450 t 热压机的主体由 8 架 16 片框板平行组装而成, 每片框板的结构尺寸及受力状况如图 2.3 所示。

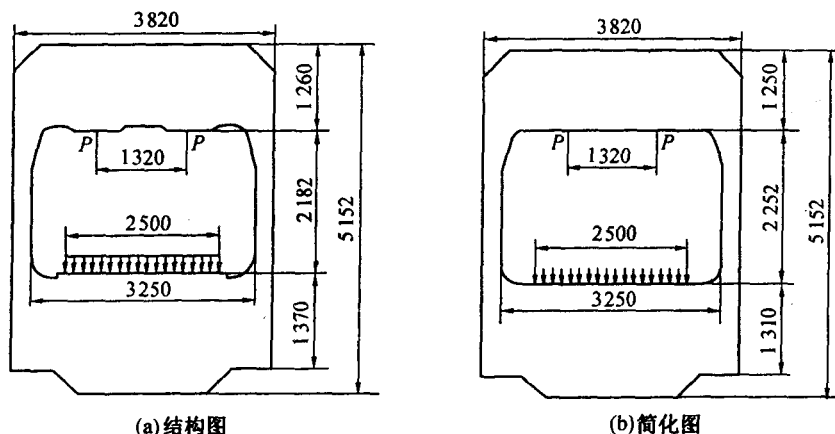


图 2.3 框板

对热压机进行结构优化设计时,分成两步:第一步是以大尺寸为设计变量,以质量最小为目标;第二步是以框板上角应力集中区的过渡曲线尺寸为设计变量,以该区的应力最小为目标进行的。

以质量最小为目标的优化设计:

### 1. 设计变量

取四个设计变量来描述框板的外形尺寸和厚度,如图 2.4 所示。其中,  $x_1$  的变化决定  $L_1L_2$  线段的上下移动;  $x_2$  的变化决定  $L_2L_3$  折线段的左右移动;  $x_3$  的变化决定  $L_3L_6$  折线段的上下移动;  $x_4$  为框板的厚度,即

$$\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4]^T$$

图 2.5 是图 2.4 的有限元剖分图,图 2.6 是优化前相应的应力分布图。

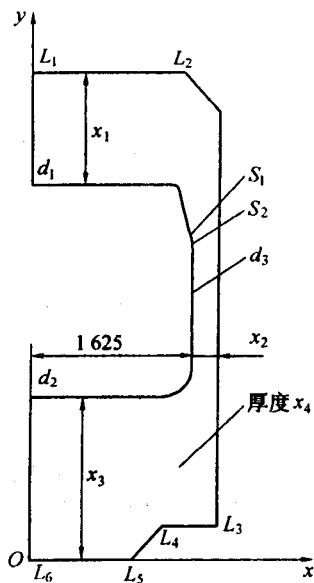


图 2.4 框板的结构

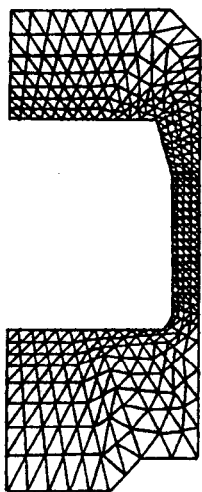


图 2.5 网格划分

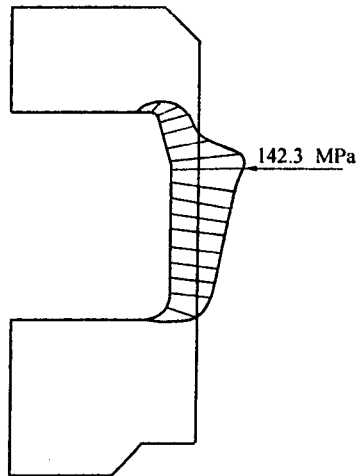


图 2.6 受力分析

### 2. 目标函数

取单片框板的质量。

### 3. 约束函数

(1) 位移约束。取下横梁中点  $d_1$ 、上横梁中点  $d_2$  及侧板上的  $d_3$  为位移控制点,即要求各控制点的位移不超过许用值。

点  $d_1$  许用变形量  $[\delta]_{d_1} = 0.5 \text{ mm}$

点  $d_2$  许用变形量  $[\delta]_{d_2} = 3 \text{ mm}$

点  $d_3$  许用变形量  $[\delta]_{d_3} = 2.5 \text{ mm}$

(2) 应力约束。取侧板上的  $S_1$  和  $S_2$  两点为应力控制点,即要求各控制点的应力不超过许用值

$$[\sigma] = 150 \text{ MPa}$$

(3) 几何约束。取各设计变量的取值范围。

该问题的数学模型为

$$\begin{aligned} \min F(x) &= 1.56 \times 10^{-5} [(x_1 + x_3 + 2192)(x_2 + 1625) - 340x_2 - 3675900]x_4 \\ \text{s.t. } \sigma_{di} - [\sigma] &\leq 0 \quad i = S_1, S_2 \\ \delta_i(x) - [\delta]_i &\leq 0 \quad i = d_1, d_2, d_3 \\ 80 - x_4 &\leq 0 \\ x_4 - 85 &\leq 0 \\ 1000 - x_1 &\leq 0 \\ 100 - x_2 &\leq 0 \\ 1000 - x_3 &\leq 0 \end{aligned}$$

【例 2.4】 汽车悬架系统的优化设计。

图 2.7 所示为 5 个自由度的汽车悬架系统。图中的  $m_1$  是驾驶该车的司机及其座位的质量，它由弹簧  $k_1$  和阻尼器  $\delta_1$  支持。其他部分，如车体、车轮、车轴等的质量、弹簧和阻尼分别用  $m_2, m_4, m_5$  和  $k_2, k_3$  以及  $\delta_2, \delta_3$  表示， $k_4, k_5$  以及  $\delta_4, \delta_5$  表示轮胎的刚度和阻尼系数， $I$  表示车体对其质量中心的惯性矩， $L$  表示轮距长度， $f_1(t)$  和  $f_2(t)$  表示由于道路表面起伏不平引起的前、后轮的位移函数， $z_i$  是坐标。

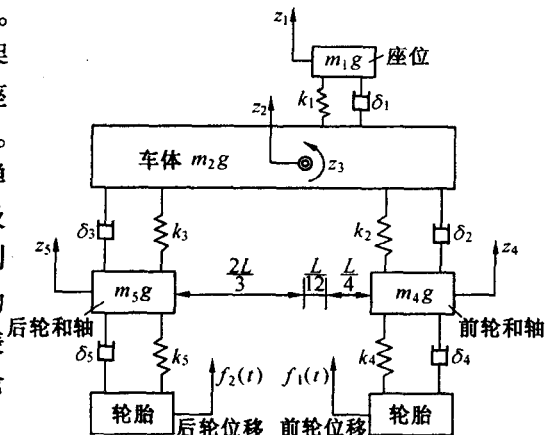


图 2.7 汽车悬架系统

在汽车结构系统设计中，希望汽车能在不同速度和道路条件下，司机座位的最大加速度为最小，同时还须满足一系列的动态响应和设计变量的约束。设计变量是系统的弹簧常数  $k_i$  和阻尼系数  $\delta_i$ 。当然，司机座位的最大加速度  $d$  也可以是设计变量。所以，本优化问题的设计变量取为  $k_1, k_2, k_3, \delta_1, \delta_2, \delta_3$  和  $d$ ，即

$$\mathbf{x} = [k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad \delta_1 \quad \delta_2 \quad \delta_3 \quad d]^T$$

汽车的运动方程可以根据拉格朗日运动方程导出。拉格朗日运动方程的一般形式是

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_i} \right) - \left( \frac{\partial T}{\partial z_i} \right) + \frac{\partial V}{\partial z_i} - F_{Qi} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, 5$$

系统的动能  $T$  可表示为

$$T = \frac{1}{2} m \dot{w}^2$$

$$\text{即 } T = \frac{1}{2} m_1 \dot{z}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{z}_2^2 + \frac{1}{2} I \dot{z}_3^2 + \frac{1}{2} m_4 \dot{z}_4^2 + \frac{1}{2} m_5 \dot{z}_5^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^5 m_i \dot{z}_i^2 \quad (m_3 = I)$$

保守力(恢复力)的位能  $V$  可表示为

$$V = \frac{1}{2} k z^2$$

由于车体与司机座位间的相对位移是  $z_2 - z_1 + \frac{L}{12}z_3$ ; 车体与前、后轮间相对位移分别为  $z_4 - z_2 - \frac{L}{3}z_3$  和  $z_5 - z_2 + \frac{2L}{3}z_3$ ; 前、后轮与路面间相对位移分别为  $z_4 - f_1(t)$  和  $z_5 - f_2(t)$ , 所以有

$$V = \frac{1}{2}k_1\left(z_2 - z_1 + \frac{L}{12}z_3\right)^2 + \frac{1}{2}k_2\left(z_4 - z_2 - \frac{L}{3}z_3\right)^2 + \frac{1}{2}k_3\left(z_5 - z_2 + \frac{2L}{3}z_3\right)^2 + \frac{1}{2}k_4[z_4 - f_1(t)]^2 + \frac{1}{2}k_5[z_5 - f_2(t)]^2$$

非保守力(阻尼力)  $F_{Qi}$  可以通过下面方法给出。它的虚功是<sup>①</sup>

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^5 F_{Qi} \delta z_i = & -\delta_1 \left( \dot{z}_2 - \dot{z}_1 + \frac{L}{12} \dot{z}_3 \right) \left( \delta z_2 - \delta z_1 + \frac{L}{12} \delta z_3 \right) - \\ & \delta_2 \left( \dot{z}_4 - \dot{z}_2 - \frac{L}{3} \dot{z}_3 \right) \left( \delta z_4 - \delta z_2 + \frac{L}{3} \delta z_3 \right) - \\ & \delta_3 \left( \dot{z}_5 - \dot{z}_2 + \frac{2L}{3} \dot{z}_3 \right) \left( \delta z_5 - \delta z_2 + \frac{2L}{3} \delta z_3 \right) - \\ & \delta_4 [\dot{z}_4 - \dot{f}_1(t)] \delta z_4 - \delta_5 [\dot{z}_5 - \dot{f}_2(t)] \delta z_5 \end{aligned}$$

这样, 则当  $i = 1$  时, 自

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial z_1} + \frac{\partial V}{\partial z_1} - F_{Q1} = 0$$

有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_1} \right) &= m_1 \ddot{z}_1 \\ \frac{\partial T}{\partial z_1} &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial V}{\partial z_1} = k_1 z_1 - k_1 z_2 - \frac{L}{12} k_1 z_3$$

$$F_{Q1} = \delta_1 \dot{z}_1 - \delta_1 \dot{z}_2 - \frac{L}{12} \delta_1 \dot{z}_3$$

从而给出

$$m_1 \ddot{z}_1 + \delta_1 \dot{z}_1 + \delta_1 \dot{z}_2 - \frac{L}{12} \delta_1 \dot{z}_3 + k_1 z_1 - k_1 z_2 - \frac{L}{12} k_1 z_3 = 0$$

同样可得  $i = 2, 3, 4, 5$  时的运动方程式。

如果把  $z_1, z_2, \dots, z_5, \dot{z}_1, \dot{z}_2, \dots, \dot{z}_5$  都写成向量

$$z = [z_1 \quad z_2 \quad \dots \quad z_5 \quad \dot{z}_1 \quad \dot{z}_2 \quad \dots \quad \dot{z}_5]^T$$

则五个运动方程式可统一写成如下的状态方程

$$M\ddot{z}(t) + D\dot{z}(t) + Kz(t) = f(t) \quad (2.5)$$

其中  $f(t)$  是广义力。

通过变换, 也可写成形式

$$\dot{z}(t) = M(x)z(t) + F(t) \quad (2.6)$$

① 本页及以下各页式中的  $\delta$ (正体) 均是运算符号“变分”, 而  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_5$ (斜体) 等则是阻尼系数。



式中  $M(\mathbf{x})$ ——由质量、刚度系数、阻尼系数及  $L$  和  $I$  组成的矩阵,而不是单纯的质量矩阵;

$F(t)$ ——由  $m_4, m_5, k_4, k_5, f_1(t), f_2(t)$  组成的矩阵。

$$\mathbf{z}(t) = [z_1 \ z_2 \ z_3 \ z_4 \ z_5 \ \dot{z}_1 \ \dot{z}_2 \ \dot{z}_3 \ \dot{z}_4 \ \dot{z}_5]^T$$

前、后轮的垂直位移和路面有关,设它们分别为按正弦规律变化的函数  $f_1(t)$  和  $f_2(t)$ ,其值可表述成

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \begin{cases} v(t) & 0 \leq t \leq t_1 \\ 0 & \text{非上述情况} \end{cases} \\ f_2(t) &= f_1(t - t_0) \quad (\text{即比前轮滞后 } t_0) \end{aligned} \quad (2.7)$$

式中  $t_1$ ——路面不平的停止时间。

根据运动方程和位移函数  $f_1(t)$ 、 $f_2(t)$ ,可以建立数学模型。

设计要求是在路面条件下和车速在一定范围内尽量使司机舒适些。因此,设计的目标是通过调整汽车悬架特征  $k$  和  $\delta$  等( $m$  不便于调整,所以不作为设计变量),使司机座位的最大绝对加速度  $\max |\ddot{z}_1(t)|$  达到最小,即  $f = \max |\ddot{z}_1^i(t)| \rightarrow \min (i = 1, 2, \dots, p)$ ,其中  $\ddot{z}_1^i(t)$  是对第  $i$  种道路条件  $f_1^i(t)$  和  $f_2^i(t)$  下的司机座位加速度。当规定最大加速度的上限值为  $d$ (可由设计者选取)时,则  $|\ddot{z}_1^i(t)| \leq d$ 。极端情况下  $|\ddot{z}_1^i(t)| \leq \theta_0$ ( $\theta_0$  为最大允许加速度)。

此外,还应考虑到汽车的运动要受到一定的约束,因而对车体和司机座位(也要考虑其他乘车人员的座位)之间的相对位移,车体与前、后轮间的相对位移,路面与前、后轮间的相对位移等,即汽车的各组成部件之间的相对位移要规定一个允许值。例如,车体与司机座位间的相对位移规定为

$$\left| z_2^i - z_1^i + \frac{L}{12} z_3^i \right| \leq 0$$

等等。

若设函数  $\eta(t)$  是连续的,则上述约束条件  $\eta(t) \leq 0 (0 \leq t \leq \tau)$  对应于积分约束条件  $\int_0^\tau [\eta(t) + |\eta(t)|] dt = 0$ 。所以,对上述的连续函数  $[z(t) \dots]$  形式的约束条件,可以统一写成积分形式

$$\psi_j = \int_0^\tau L_j[t, z(t), \mathbf{x}] dt = 0 \quad j = 1, 2, \dots, p$$

其中,  $L_j$  是拉格朗日函数。

设计变量的变化范围

$$x_{j\min} \leq x_j \leq x_{j\max}$$

可以写成

$$g_s(\mathbf{x}) \leq 0$$

这样,该优化问题的数学模型是:

$$\text{目标函数} \quad f = \max |\ddot{z}_1(t)| \rightarrow \min$$

$$\text{或写成} \quad f = d \quad (d \text{ 是 } |\ddot{z}_1(t)| \leq d \text{ 中的最小者})$$