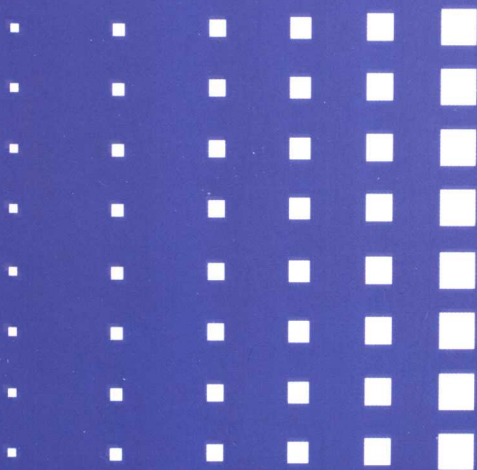




离散控制系统 理论引论

龚德恩 编著



中国铁道出版社

铁路科技图书出版基金资助出版

离散控制系统理论引论

龚德恩 编著



中 国 铁 道 出 版 社

2 0 0 4 年 · 北 京

内 容 简 介

这是一本为经济学者,特别是为数量经济学者编写的控制论参考书。书中例题基本上都是经济方面的。但是,这本书对理工类相关专业的教师和高年级本科生、研究生也可选作教材或教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

离散控制系统理论引论/龚德恩编著. —北京:中国铁道出版社,2003.10

ISBN 7-113-05443-9

I. 离… II. 龚… III. 离散控制—控制系统

IV. TP271

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 083452 号

书 名:离散控制系统理论引论

作 者:龚德恩

出版发行:中国铁道出版社(100054,北京市宣武区右安门西街8号)

责任编辑:吴 军

特邀编辑:李卫东

封面设计:冯龙彬

印 刷:北京市兴顺印刷厂

开 本:850×1168 1/32 印张:10.75 字数:282千

版 本:2004年4月第1版 2004年4月第1次印刷

印 数:1~2000册

书 号:ISBN 7-113-05443-9/G·219

定 价:24.00元

版权所有 侵权必究

凡购买铁道版的图书,如有缺页、倒页、脱页者,请与本社发行部调换。

编辑部电话:(010)51873094 发行部电话:(010)51873124

本书使用的符号

$\triangleq$ 定义为……

s.t. 服从于……,受……约束

$\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}$ 向量(均为列向量)

$\mathbf{0}$ 零向量

$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{P}$ 矩阵

$\mathbf{0}$ 零矩阵

$\mathbf{I}, \mathbf{I}_s$ 单位矩阵、 s 阶单位矩阵

$\mathbf{A}^T, \mathbf{x}^T$ 矩阵 $\mathbf{A}$ 的转置、向量 $\mathbf{x}$ 的转置

$\mathbf{A}^{-1}$ 矩阵 $\mathbf{A}$ 的逆矩阵

$\mathbf{A}^-$ 矩阵 $\mathbf{A}$ 的广义逆矩阵

$\text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ 主对角元素为 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 的 n 阶对角矩阵

$\det \mathbf{A}$ 矩阵 $\mathbf{A}$ 的行列式

$\text{rank} \mathbf{A}$ 矩阵 $\mathbf{A}$ 的秩

$\text{tr} \mathbf{A}$ 矩阵 $\mathbf{A}$ 的迹(主对角线元素之和)

$\sigma(\mathbf{A})$ 矩阵 $\mathbf{A}$ 的全部特征值构成的集合

$\text{Span}(\mathbf{A})$ 矩阵 $\mathbf{A}$ 的列向量张成的子空间

$\mathbf{A} \geqslant \mathbf{0}$ $\mathbf{A}$ 为半正定矩阵

$\mathbf{A} > \mathbf{0}$ $\mathbf{A}$ 为正定矩阵

$\mathbf{R}^n$ n 维欧几里得(Euclid)空间

$\|\mathbf{x}\|, \|\mathbf{A}\|$ 向量 $\mathbf{x}$ 的范数,矩阵 $\mathbf{A}$ 的范数

$\cup, \cap$ 集合的并、交

$\in, \subseteq$ 属于,包含

$|a|$ a 的绝对值或模

$\text{Re} a, \text{Im} a$ a 的实部、虚部

$\max, \min$ 极大,极小

$\longrightarrow \boxed{z^{-1}} \longrightarrow$ 延迟环节

目 录

第一章 离散控制系统的数学描述	1
第一节 离散控制系统实例	2
第二节 离散控制系统的数学描述	10
第三节 离散控制系统状态方程的解	13
第四节 z 变换简介	17
第五节 脉冲传递函数阵	27
第六节 复合系统的状态空间模型	35
第七节 输入—输出模型与状态空间模型的关系	40
第八节 连续控制系统与离散控制系统的关系	50
第二章 离散控制系统的结构性质(I)	
——稳定性理论	67
第一节 离散控制系统稳定性的概念	67
第二节 定常线性系统的稳定性	70
第三节 定常线性系统的稳定性(续)	76
第四节 李雅普诺夫第二方法	89
第五节 离散控制系统的稳态预测	97
第三章 离散控制系统的结构性质(II)	
——能控性与能观测性	113
第一节 离散控制系统的能达性与能控性	113
第二节 离散控制系统的能观测性与能决定性	125
第三节 完全能达且完全能观测的判别	134
第四节 对偶性原理	137
第四章 离散控制系统的结构分解与标准型	139
第一节 线性系统的等价性	139
第二节 定常线性系统的典型结构分解	143

第三节	再论能达与能观测性的判别	161
第四节	单输入单输出系统的标准型	165
第五节	多输入多输出系统的标准型	179
第五章	线性系统的反馈控制	195
第一节	状态反馈	195
第二节	极点配置原理	199
第三节	定常线性系统的能稳定性和能检测性	218
第四节	输出反馈	222
第五节	动态输出反馈	224
第六节	状态观测器的设计	234
第七节	线性多变量调节器	249
第八节	反馈控制对动态投入产出模型的应用	259
第六章	最优控制	266
第一节	最优控制问题的提法	266
第二节	动态规划法	268
第三节	离散控制系统的极大值原理	284
第四节	线性二次型问题	299
第五节	跟踪问题	324
第六节	一般非线性系统最优控制问题的近似解法	328
参考文献		334

第一章

离散控制系统的数学描述

在研究物理或工程技术系统时,人们首先要利用某些物理定律和(或)经验公式建立相关系统的数学模型。系统的行为由适当选取的变量(因变量)随时间(或频率)(自变量)的发展变化过程来描述。有很多实际系统的因变量之值仅在离散的时刻可知或有定义,故建立的数学模型为离散的数学模型。例如,在信息处理、数字滤波、指令控制系统、工业过程、动力与通讯网络,以及生态与环境系统、管理系统、社会经济系统等领域,不难找到这类系统的典型实例。

另外,由于计算机容量的快速增长和微电子技术的不断进步,吸引系统分析与建模工作者、控制系统设计者尽可能采用数字计算机或微处理装置解决他们希望解决的问题。而利用计算机或微处理装置对系统进行实时控制或对系统进行模拟、分析或控制系统设计时,必须将时间变量考虑为离散变量。因此,要将所研究的系统考虑为离散系统。

由于上述原因,自 20 世纪 50 年代以来,离散控制系统的理论研究与实际应用工作,逐渐受到控制理论界的广泛重视,取得了很大成就,使离散控制系统的分析与设计成为控制理论的一个重要组成部分。

描述离散控制系统的数学模型为差分方程或差分方程组。离散控制系统理论的基本结果可分为两部分:一部分结果可由连续控制系统的相应结果直接导出;另一部分结果则是离散控制系统所特有的,或者说与连续控制系统的相应结果是有区别的。本书将介绍与离散控制系统的分析、设计和控制等有关的基本论题,并对离散控制系统特有的结果予以特别的重视。

第一节 离散控制系统实例

本节介绍几个引自不同领域的离散控制系统的实际例子,用以说明建立离散控制系统数学模型的基本过程和特点,以及离散控制系统数学模型的基本形式。

例 1.1 加热过程的直接数字控制系统^{[4]*}

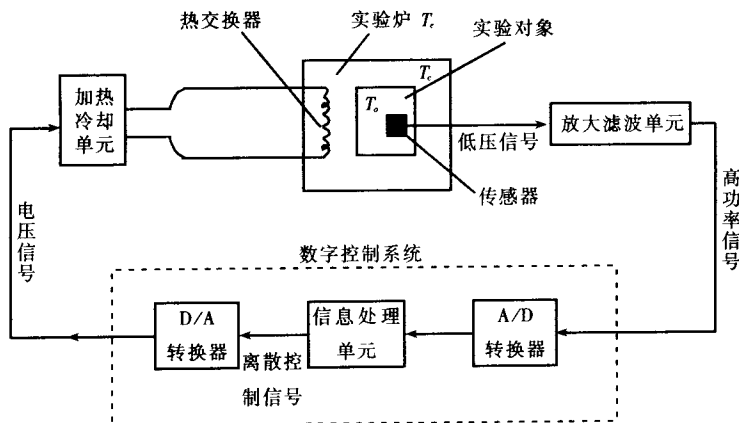


图 1.1.1 加热过程的直接数字控制系统

典型的加热直接数字控制系统的方框图如图 1.1.1 所示。将实验对象放置在加热炉内,其温度由传感器测量。由温度传感器得到的电信号一般为低电压信号,该信号由放大滤波单元提升为高功率信号并消除噪声的影响。所得高功率信号馈送至由 A/D (模—数)转换器、信息处理单元和 D/A (数—模)转换器组成的数字控制系统。该数字控制系统执行下述功能:

- (1)按二进制对电模拟信号进行采样和编码;
- (2)利用适当的算法生成离散控制信号;
- (3)将数字信号转换为电压信号;
- (4)将电压信号反馈至加热/冷却单元。

* 方括号中数字为书后参考文献序号,下同。

通常,上述功能是相继完成的。加热/冷却单元接收到控制信号后,将给热交换单元提供适当的加热动力。

为了用数学模型描述上述加热过程,作如下假定:

(1)实验对象和加热炉的单位集中加热质量分别为 m_o, m_c ;

(2)热传导过程用与两个物体之间的温差有关的热流量的线性形式表示;

(3)实验对象含有一个内部热源;

(4)采样周期 s 已适当选定。

令: p_o, p_c 分别为对象和炉的比热;

T_o, T_c, T_e 分别为对象、炉和环境的温度;

h_{oc}, h_{ce} 分别为对象与炉、炉与环境之间的热传导系数;

Q_g 为实验对象内部产生的热量;

Q_s 为热交换器提供的热量。

直接利用热传导的物理定律,可得第 k 次采样结果为:

$$\begin{aligned} m_o p_o \{ T_o[(k+1)s] - T_o(ks) \} = \\ sh_{oc} [T_c(ks) - T_o(ks)] + Q_g(ks) \\ m_c p_c \{ T_c[(k+1)s] - T_c(ks) \} = \\ sh_{oc} [T_o(ks) - T_c(ks)] + Q_s(ks) - \\ sh_{ce} [T_c(ks) - T_e(ks)] \end{aligned}$$

上述模型可改写成如下的形式:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}u(k) + \mathbf{d}(k) \quad (1.1.1)$$

其中 k 表示第 k 次采样时刻 ks , $k+1$ 表示第 $k+1$ 次采样时刻 $(k+1)s$ 。此外,还设:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\cdot) &= \begin{pmatrix} T_o(\cdot) \\ T_c(\cdot) \end{pmatrix}, \mathbf{u}(\cdot) = Q_s(\cdot) \\ \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 1 - sh_{oc}/m_o p_o & sh_{oc}/m_o p_o \\ sh_{oc}/m_c p_c & 1 - s(h_{oc} + h_{ce})/m_c p_c \end{pmatrix} \\ \mathbf{b} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1/m_c p_c \end{pmatrix}, \mathbf{d}(\cdot) = \begin{pmatrix} Q_g(\cdot)/m_o p_o \\ T_e(\cdot) sh_{ce}/m_c p_c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

称式(1.1.1)为加热系统的状态方程, $x(k)$ 为状态向量, $u(k)$ 为输入或控制向量。

例 1.2 多级萃取系统^[1]

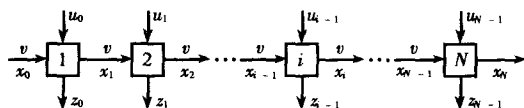


图 1.1.2 N 级萃取过程示意图

化工中的多级萃取过程的目的是,从含有某种物质 A 的混合物溶液中提取出物质 A。 N 级萃取装置由 N 个萃取器连接而成,如图 1.1.2 所示。含有物质 A 的混合物溶液以流速 v 进入萃取器 1,以相同的流速 v 离去并进入下一级萃取器 2,同时某种溶剂或洗液以流速 u_0 进入萃取器 1,它可由混合物中带走部分物质 A,记 z_0 为单位量的溶剂从萃取器 1 中所带走的物质 A 的量。记 x_0 为进入萃取器 1 的混合物溶液中含物质 A 的浓度, x_1 为流出萃取器 1 进入萃取器 2 的混合物溶液中含物质 A 的浓度。一般地,对 $i = 2, 3, \dots, N$; 记 x_{i-1} 为以流速 v 由第 $i-1$ 级萃取器进入第 i 级萃取器的混合物溶液中含物质 A 的浓度; x_i 为以流速 v 流出第 i 级萃取器的混合物溶液中含物质 A 的浓度; u_{i-1} 为流入第 i 级萃取器的溶剂的流速; z_{i-1} 为在第 i 级萃取器中被单位量溶剂带走的物质 A 的量。

假设溶剂和混合物溶液之间既不发生化学变化又不互相混合,并且在每一级萃取器中物质 A 被溶剂带走的量 z_{i-1} 与流出该级萃取器的混合物溶液中含物质 A 的浓度 x_i 之间存在如下的平衡关系:

$$z_{i-1} = mx_i \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (1.1.2)$$

其中 m 为某个常数。另外,第 i 级萃取器中每单位时间内物质 A 减少的量应等于溶剂提取出物质 A 的量,即有如下的物料平衡关系:

$$v(x_{i-1} - x_i) = u_{i-1}z_{i-1}$$

将式(1.1.2)代入上式,可解得:

$$x_i = \frac{1}{1 + \widetilde{m}u_{i-1}} x_{i-1} \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (1.1.3)$$

其中 $\widetilde{m} = m/v$ 。称方程(1.1.3)为 N 级萃取过程的状态方程, x_i 为状态变量, u_i 为控制变量。

假设提取的物质 A 的单价为 α , 溶剂的单价为 β 。那么, 在单位时间内, N 级萃取过程的收益为:

$$P = \alpha v(x_0 - x_N) - \beta \sum_{i=0}^{N-1} u_i$$

注意到在 x_0, v, m, α, β 为已知常数的前提下, 上式中 x_N 的值完全由 $u_0, u_1, \dots, u_{N-1}$ 所确定。因此, 我们追求的目标是, 求控制变量 $u_i (i = 0, 1, \dots, N-1)$, 使收益 P 达到最大。为了讨论方便, 考虑如下的目标函数:

$$J_N = \frac{P}{\alpha v} = x_0 - x_N - B \sum_{i=0}^{N-1} u_i, \quad B = \frac{\beta}{\alpha v}$$

于是, 我们的问题化为, 在满足状态方程(1.1.3)的前提下, 求控制变量 $u_i (i = 0, 1, \dots, N-1)$ 使 J_N 最大。这是一个离散控制系统的最优控制问题。

例 1.3 生产库存控制系统^[1,4]

假设某公司生产 $n (n \geq 1)$ 种产品, 第 k 月第 j 种产品的生产量为 $u_j(k)$, 销售量(或定货量)为 $S_j(k)$, 第 k 月月初第 j 种产品的库存量为 $x_j(k) (j = 1, 2, \dots, n)$ 。那么, 第 j 种产品第 $k+1$ 月月月初的库存量 $x_j(k+1)$ 应等于第 k 月的库存量 $x_j(k)$ 加上第 k 月的生产量, 再减去第 k 月的销售量。即生产库存系统的数学模型为:

$$x_j(k+1) = x_j(k) + u_j(k) - S_j(k) \quad (1.1.4)$$

$$(j = 1, 2, \dots, n; k = 0, 1, \dots, N-1)$$

另外, 库存量和生产量应是有界的, 即有:

$$\begin{cases} x_j^-(k) \leq x_j(k) \leq x_j^+(k) & (j = 1, 2, \dots, n; k = 0, 1, \dots, N-1) \\ u_j^-(k) \leq u_j(k) \leq u_j^+(k) & (j = 1, 2, \dots, n; k = 0, 1, \dots, N-1) \end{cases} \quad (1.1.5)$$

其中上标 +、- 分别表示上、下界。如果至少有两种产品, 则因总产量和总库存的限制, 各种产品之间还会出现联合限制, 这可表示为:

$$\sum_{j=1}^n P_j[x_j(k), u_j(k), k] \leq 0 \quad (k = 0, 1, \dots) \quad (1.1.6)$$

式(1.1.4)~式(1.1.6)就是生产库存系统的数学描述。其中式(1.1.4)为状态方程, 式(1.1.5)和式(1.1.6)为约束条件。一般地说, 求解问题式(1.1.4)~式(1.1.6), 应事先知道销售或定货水平。

一个有实际意义的问题是, 公司决策者如何选择库存和销售策略, 使某个适当的成本函数达到最小值。设 $q_j[u_j(k), k]$ 为第 k 期生产 $u_j(k)$ 单位第 j 种产品的成本, $r_j[x_j(k), k]$ 为第 k 期库存 $x_j(k)$ 单位第 j 种产品的成本。那么, 总共 N 期的总成本为:

$$J_N = \sum_{j=1}^n f_j[x_j(N), N] + \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ q_j[x_j(k), k] + r_j[u_j(k), k] \right\} \quad (1.1.7)$$

其中终端成本 $f_j(\cdot, \cdot)$ 表示对未能满足顾客要求或对未能售出的超额库存的惩罚。

生产库存系统的控制问题是, 在满足状态方程(1.1.4)和约束条件(1.1.5)、条件(1.1.6)的前提下, 求控制(生产)策略 $u(0), u(1), \dots, u(N-1)$, 使总成本函数(1.1.7)取最小值。

总成本函数(1.1.7)的一种常见特殊形式是:

$$\begin{aligned} J_N = & \sum_{k=0}^{N-1} \{ [\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}]^T \mathbf{Q}(k) [\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}] + \\ & [\mathbf{u}(k) - \hat{\mathbf{u}}]^T \mathbf{R}(k) [\mathbf{u}(k) - \hat{\mathbf{u}}] \} = \\ & \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=1}^n \{ q_j(k) [x_j(k) - \hat{x}_j]^2 + r_j(k) [u_j(k) - \hat{u}_j]^2 \} \quad (1.1.8) \end{aligned}$$

其中 $\mathbf{x}(k) = [x_1(k), \dots, x_n(k)]^T$, $\mathbf{u}(k) = [u_1(k), \dots, u_n(k)]^T$ 。

$\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)^T$, $\hat{\mathbf{u}} = (\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_n)^T$, $\hat{x}_j, \hat{u}_j$ 分别表示第 j 种产品的理想库存量和理想生产量 ($j = 1, 2, \dots, n$)。

$Q(k) = \text{diag}[q_1(k), \dots, q_n(k)]$ 及 $R(k) = \text{diag}[r_1(k), \dots, r_n(k)]$ 为非负的对角加权阵, 通常设 $q_j(k) \equiv q_j > 0, r_j(k) \equiv r_j > 0 (j = 1, 2, \dots, n; k = 0, 1, \dots, N-1)$ 。

求目标函数(1.1.8)最小的实际意义是, 当 $x(k)$ 和 $u(k)$ 偏离理想状态 $\hat{x}$ 和 $\hat{u}$ 时, 求控制策略 $u(0), u(1), \dots, u(N-1)$, 使 $x(k)$ 和 $u(k)$ 尽量返回 $\hat{x}$ 和 $\hat{u}$ 。

例 1.4 宏观经济模型^[16,20]

经济学家 Smyth 曾提出一种将“实物”与“货币”两种因素结合在一起考虑的宏观经济模型(参见参考文献[20]的第 110 ~ 115 页)。这里介绍参考文献[16]经过一定修改后的 Smyth 模型:

$$\begin{cases} Y_k = C_k + I_k + G_k & \textcircled{1} \\ C_k = bY_{k-1} \quad (0 < b < 1) & \textcircled{2} \\ I_k = g(Y_{k-1} - Y_{k-2}) - aR_{k-1} \quad (g > 0, a > 0) & \textcircled{3} \quad (1.1.9) \\ H_k = dY_k + e - jR_k \quad (d > 0, e > 0, j > 0) & \textcircled{4} \\ R_{k+1} = R_k + h(H_k - M_k) \quad (h > 0) & \textcircled{5} \end{cases}$$

其中 Y_k 为国民总需求(国民收入), C_k 为总消费支出, I_k 为诱发性投资, G_k 为政府支出(外生变量), R_k 为利率(货币的价格), H_k 为货币需求量, M_k 为货币供给量(外生变量, 国家掌握)。 $\textcircled{1}$ 为总需求方程; $\textcircled{2}$ 为消费函数; $\textcircled{3}$ 为投资函数, 它表明总需求增加将使投资增加, 利率上升将使投资减少; $\textcircled{4}$ 为货币需求函数, 其中第一项为交易需求, 表示总需求增加将使货币需求增加, 第二项为投机需求, 表示利率上升货币需求将减少; $\textcircled{5}$ 为利率调节方程, 表示利率按货币供需状况进行调节。

模型(1.1.9)中各经济变量之间的因果关系可用图 1.1.3 等地表示。其中 z^{-1} 为延迟算子。

利用图 1.1.3 可将 Smyth 宏观经济模型变换为状态空间模型。为此, 设状态变量、控制变量和输出变量为:

状态变量(各延迟算子的输出):

$$x_1(k) = Y_{k-2}, x_2(k) = Y_{k-1}$$

$$x_3(k) = R_{k-1}, x_4(k) = R_k$$

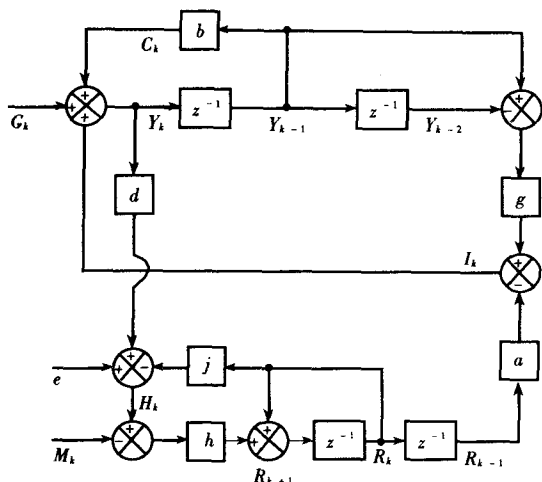


图 1.1.3 Smyth 宏观经济模型

控制变量:

$$u_1(k) = G_k, u_2(k) = M_k - e$$

输出变量:

$$\gamma_1(k) = Y_k, \gamma_2(k) = R_k$$

则 Smyth 模型(1.1.9)可变换为如下的状态空间模型:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \quad (1.1.10a)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \quad (1.1.10b)$$

其中:

$\mathbf{x}(k) = [x_1(k), x_2(k), x_3(k), x_4(k)]^T$ —— 状态向量

$\mathbf{u}(k) = [u_1(k), u_2(k)]^T$ —— 控制向量

$\mathbf{y}(k) = [\gamma_1(k), \gamma_2(k)]^T$ —— 输出向量

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -g & b+g & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -dhg & dh(b+g) & dha & 1-hj \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ d & -h \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -g & b+g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

称式(1.1.10a)为状态方程,式(1.1.10b)为输出方程。

另外,将 Smyth 模型中 C_k, I_k, H_k 消去,可得关于 Y_k, R_k 和 G_k , $(M_k - e)$ 的差分方程组,称为输入—输出模型:

$$\begin{cases} Y_{k+1} - (b+g)Y_{k-1} + gY_{k-2} + aR_{k-1} = G_k = u_1(k) \\ dhY_k - R_{k+1} + (1-j)R_k = h(M_k - e) = hu_2(k) \end{cases} \quad (1.1.11)$$

例 1.5 分龄人口模型:

将一个国家或地区的人口按相同的年限(比如 5 年)分成不同的年龄组。即第 0 组由年龄在 0~5 岁的所有人口组成,第 1 组由年龄在 5~10 岁的所有人口组成,等等。各年龄组按 0 到 n 依次表示,0 表示最低年龄组, n 表示最高年龄组。因男女人口数量一般有一定的比例,为了简单起见只考虑女性人口数。

令 $x_i(k)$ 表示在第 k 年内第 i 年龄组的女性人口数($i=0,1,\dots,n; k=0,1,2,\dots$)。则各年龄组人口数的变化情况可用如下的差分方程组描述:

$$\begin{cases} x_{i+1}(k+1) = \beta_i x_i(k) & (i=0,1,\dots,n-1) \\ x_0(k+1) = \alpha_0 x_0(k) + \alpha_1 x_1(k) + \dots + \alpha_n x_n(k) \end{cases} \quad (1.1.12)$$

其中 α_i 为第 i 年龄组的出生率, $0 \leq \alpha_i \leq 1$ ($i=0,1,\dots,n$); β_i 为第 i 年龄组人口在一年内的生存率, $0 < \beta_i \leq 1$ ($i=0,1,\dots,n-1$)。 α_i, β_i 可由人口统计资料测定。令:

$$x(k) = [x_0(k), x_1(k), \dots, x_n(k)]^T$$

$$P = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} & \alpha_n \\ \beta_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta_{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \beta_{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

则有:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{P}\mathbf{x}(k) \quad (1.1.13)$$

这就是分龄人口模型(1.1.12)的状态空间形式。如果将人口出生率视为控制变量,则矩阵 $\mathbf{P}$ 与控制变量有关,式(1.1.13)为非线性状态空间模型。

第二节 离散控制系统的数学描述

从上节介绍的几个实例中可以看出,一个离散控制系统应包含输入变量、状态变量和输出变量。系统在输入变量的作用下而运动,并产生一定的输出。输入变量分为两类,一类是人们可以控制的变量,称为控制变量,其作用是用来改变系统的运行状态,使系统达到预期的目的;另一类是人们不能控制而又对系统的运行产生影响的外界因素或变量,称为干扰变量。如例 1.1 中的热交换器提供的热量 Q_c 为该系统的控制变量,而外界环境温度 T_c 为干扰变量。状态变量是描述系统内部状态或特性的变量。如例 1.1 中的实验对象和实验炉的温度 T_c 和 T_r 即为该系统的状态变量。输出变量是人们所要研究并可直接测量的变量。如例 1.1 中的实验对象的温度 T_c 可取为该系统的输出变量。

一个控制系统的输入变量、状态变量和输出变量都可能有多。通常用 $\mathbf{u}(k)$ 、 $\mathbf{x}(k)$ 和 $\mathbf{y}(k)$ 分别表示由系统中所有输入变量、状态变量和输出变量所构成的列向量,并称为输入向量、状态向量和输出向量。

控制系统的输入变量、状态变量和输出变量之间存在一定的关系,是由所研究的具体问题所应遵循的规律(如自然规律、经济规律、生态规律等)决定的。这些关系用数学方法表示出来,称为系统的数学描述或数学模型。控制系统(连续的或离散的)的数学模型通常有两类,一类是同时描述系统输入变量、状态变量和输出变量之间关系的模型,称为状态空间模型;另一类是仅涉及系统输入变量与输出变量之间关系的模型,称为输入-输出模型或外部描述模型。

对于离散控制系统,描述输入向量 $u(k)$ 、状态向量 $x(k)$ 和输出向量 $y(k)$ 之间关系的状态空间模型的一般形式为:

$$\begin{cases} x(k+1) = f[x(k), u(k), k] & (k=0, 1, 2, \dots) \end{cases} \quad (1.2.1a)$$

$$y(k) = g[x(k), u(k), k] \quad (1.2.1b)$$

其中式(1.2.1a)称为状态方程,式(1.2.1b)称为输出方程。为了明确起见,本书中总假定 $x(k)$ 为 n 维列向量, $u(k)$ 为 m 维列向量, $y(k)$ 为 r 维列向量。因此, $f[\cdot, \cdot, \cdot]$ 为其变元的 n 维已知向量函数, $g[\cdot, \cdot, \cdot]$ 为其变元的 r 维已知向量函数。 n 维状态向量 $x(k)$ 所在的 n 维空间称为状态空间。注意, $x(k)$, $u(k)$ 和 $y(k)$ 都是仅在离散时刻 $k=0, 1, 2, \dots$ 取值的离散向量。

当 $f[\cdot, \cdot, \cdot]$ 和 $g[\cdot, \cdot, \cdot]$ 都是关于 $x(k)$ 和 $u(k)$ 的线性函数时,称为离散线性控制系统,其一般形式为:

$$\begin{cases} x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k) + g(k) \\ y(k) = C(k)x(k) + D(k)u(k) + h(k) \end{cases} \quad (1.2.2)$$

其中 $A(k)$, $B(k)$, $C(k)$ 和 $D(k)$ 分别为 $n \times n$, $n \times m$, $r \times n$ 和 $r \times m$ 的已知矩阵; $g(k)$ 和 $h(k)$ 分别为 n 维和 r 维的已知向量。

如果令:

$$\tilde{x}(k) = x(k) + \bar{x}(k), \tilde{y}(k) = y(k) + \bar{y}(k)$$

其中 $\bar{x}(k)$ 和 $\bar{y}(k)$ 由方程:

$$\begin{cases} \bar{x}(k+1) = A(k)\bar{x}(k) - g(k) \\ \bar{y}(k) = C(k)\bar{x}(k) - h(k) \end{cases}$$

确定,则式(1.2.2)可化为如下更常见的形式:

$$\begin{cases} \tilde{x}(k+1) = A(k)\tilde{x}(k) + B(k)u(k) \\ \tilde{y}(k) = C(k)\tilde{x}(k) + D(k)u(k) \end{cases} \quad (1.2.3)$$

为了明确起见,今后仅考虑形如式(1.2.3)的离散线性控制系统,并将状态向量和输出向量仍记为 $x(k)$ 和 $y(k)$ 。通常,称式(1.2.2)或式(1.2.3)中的 $A(k)$ 为系统矩阵或状态矩阵, $B(k)$ 为控制矩阵或输入矩阵, $C(k)$ 为输出矩阵, $D(k)$ 为直接传输矩阵。在很多实际系统中有 $D(k) \equiv 0 (k=0, 1, 2, \dots)$ 。

当矩阵 $A(k)$, $B(k)$, $C(k)$ 和 $D(k)$ 中至少有一个矩阵与自