自动化理论、技术与应用

（第7卷）

主　编　苏剑波　李少远

CYA

上海交通大学出版社

前 言

本书是中国自动化学会第15届青年学术年会的论文集,共收录了会议正式发表的论文105篇,内容分9个部分:(1) 线性系统与非线性系统;(2) 自适应、鲁棒、预测、变结构控制;(3) 智能控制、模糊控制、专家系统、神经网络;(4) 模式识别、机器人、计算机视觉;(5) 离散事件、调度、决策支持系统;(6) 系统建模、辨识与仿真;(7) 故障检测与可靠性;(8) 工业自动化、计算机控制;(9) 应用与其他。这些论文的作者均为活跃在自动化领域的高等院校、企事业单位和生产第一线的青年学者,其中不乏已取得突出成就的知名青年专家,因此,本书内容较全面地展现了中国自动化领域各个研究方向的最新理论、技术和应用的成果,具有较高的水平。不少论文还得到了国家自然科学基金、863计划及部委、省、市科研基金的支持,有的还获得了国家、部委级科技奖励,还有的已取得或即将取得明显的经济效益。本书内容基本反映了目前我国自动化领域青年工作者近期所取得的成果。

本届青年学术年会由中国自动化学会、中国自动化学会青年工作委员会主办,上海交通大学承办,上海自动化学会协办。会议的组织工作是在青年工作委员会的直接领导下,由上海交通大学自动化系承担的。会议的组织委员会除向各单位和个人发出会议通知和征文通知以外,又于2000年初在《自动化学报》、《控制理论与应用》、《控制与决策》、《模式识别与人工智能》、《机器人》等学术刊物上刊登了征文通知,并在《自动化博览》上刊登了会议消息,因此得到了各界的广泛响应,共收到来自全国100多所高等院校、科研机构和企事业单位的论文180多篇。经仔细认真的评审后,有105篇论文被会议正式录用,并全部收录进本书。

本届年会还将在中国自动化学会青年学术年会历史上首次设立大会最佳论文奖和最佳应用论文奖,以鼓励在自动化领域做出出色工作的青年学者。

会议召开的时间和地点恰与第三届亚洲控制会议相衔接,这是每三年一次在亚洲和大洋洲地区召开的自动化领域的最高级别的国际学术会议。经组委会努力,参加青年年会的代表得以旁听第三届亚洲控制会议。因此,本次会议不仅可以促进青年科技人员的相互交流,也提供了向国内外专家学者学习,从而更容易地走向国际舞台的机会,同时也为中国青年自动化人才向世界展现自己风采提供了良机。

中国自动化学会对本届青年年会给予了高度重视,学会各级领导和老一辈科学家对会议的筹备和组织工作给予了热情关怀和精心指导,上海交通大学以及上海交通大学电子信息学院对本次会议的组织、筹备工作给予具体的支持和帮助,上海自动化学会也给予了无私的密切配合,上海交通大学出版社为本书得以在会议召开期间顺利出版给予极大的支持。在此,我们向所有关心、支持和帮助本届青年年会工作的领导、前辈和朋友表示最诚挚的谢意。

新千年、新时代赋予了自动化学科无限机遇,而IT时代的到来又使自动化学科正受到前所未有的冲击。这是一个转折时期,是青年自动化人只争朝夕、大显身手的好机会。让我们携起手来,继承和发扬老一辈科学家所开创的美好事业,脚踏实地,兢兢业业,为新世纪自动化事业的繁荣和中国自动化事业的辉煌贡献自己的聪明才智。

中国自动化学会第15届青年学术年会组织委员会
2000年5月15日

目　录

1. 线性系统与非线性系统

2. 自适应、鲁棒、预测、变结构控制

3. 智能控制、模糊控制、专家系统、神经网络

4. 模式识别、机器人、计算机视觉

5. 离散事件、调度、决策支持系统

6. 系统建模、辨识与仿真

7. 故障检测与可靠性

8. 工业自动化、计算机控制

9. 应用与其他

粗糙集的高阶核及其应用

范世栋　苗夺谦
（山西大学数学系，太原　030006）

摘　要：本文首先在粗糙集理论中属性集的核的基础上引进了二阶核与高阶核的概念，并将它们与核的关系做了初步的研究。另外，基于这两个概念，介绍了定义在属性集上的函数 g，并根据 g 值，对属性集中的属性进行排序，从而有利于构造属性集的最小约简。最后，用一个典型的例子说明了这一求最小约简的方法与其他方法比较，它的优越性所在。

关键词：粗糙集，核，二阶核，高阶核

1　引言

目前，粗糙集理论方兴未艾，寻找属性集的最小约简是这一理论中遇到的主要问题之一。关于这一问题，有一类解决办法是从核开始，通过逐个添加对已有属性集信息增益最大的属性，从而得到最小约简[3]。但这种方法并非最优方法，并非对所有信息系统都有用。对此，有人构造了一个信息系统做为反例，如表 1，在这一反例中，共有四个属性 a,b,c,d，容易算出属性集的核为 Φ，利用从核开始，逐个添加重要属性的方法得到的最小约简为：$\{a,b,c\}$ 或 $\{b,c,d\}$。而它的最小约简应为：$\{c,d\}$。为什么会出现这种情况呢？我们认为主要是由于一开始选择了信息量即重要度最高的 a 或 b，而 a 或 b 与另外 c 或 d 的重叠部分较多，如 a 与 c 都不能分辨对象 7 与 8，也就是说选定了 a 或 b 作为构造最小约简的初始属性(即：最小约简中包含 a 或 b)，而 $\{a,c\}$，$\{a,d\}$，$\{b,c\}$，$\{b,d\}$ 的分辨能力并非最高，他们都不及 $\{c,d\}$ 高。为此，我们认为不能只考虑单个属性的重要程度(或对已有属性子集的重要度)。应该考虑两个甚至多个属性的重要度。因此，我们提出了二阶核甚至高阶核的概念。

2　粗糙集理论简介

2.1　信息系统

信息系统是一四元序组 $I=(U,A,V,f)$[1]，其中 U 为一有限对象集，记 $U=\{u_1,u_2\cdots u_m\}$；A 为有限属性集，记 $A=\{a_1,a_2\cdots a_n\}$；$V=\bigcup^{a\in A}v_a$，v_a 为属性 a 的值域，如 a = 颜色，则 v_a 可以为 {红，黄，蓝}；$f:U\times A\rightarrow V$ 为信息函数，对于 $\forall u_i\in U, a_j\in A$，有 $f(u_i,a_j)\in V_{aj}$，表示对象 u_i 的属性 a_j 的值，如 u_i 表示第 i 个积木块，a_j 表示积木块的颜色，则 $f(u_i,a_j)$ 表示第 i 个积木块的颜色，可为红、黄、蓝等。

2.2　信息系统的核与约简

设 $I=(U,A,V,f)$ 是一信息系统，$a_i\in A$ 是一属性，关于 a_i，可以联系一个如下定义的称为不可分辨关系的等价关系 $\theta_{ai}: u\theta_{ai}v\Leftrightarrow f(u,a_i)=f(v,a_i)$[3]，从而每一属性可以看成论域 U 上的一个等价关系，对论域 U 形成一个划分：U/θ_{ai}。每个等价类中的对象具有协同的属性 a_i 的值，对于每一属性子集 $B\subseteq A$，可以联系一个不可分辨关系 $\mathrm{IND}(B)=\bigcap_{b\in B}\theta_b$。可以证明 IND($B$) 也是论域 U 上的一个等价关系，从而构成论域 U 的一个划分 $U/\mathrm{IND}(B)$[3]。每个等价类中的对象在属性子集 B 下不可分辨，即对于 B 中的任一属性，它们都有相同的值。

在信息系统 $I=(U,A,V,f)$ 中，不可分辨关系 IND(A) 表示了该系统的最高的分辨能力，即表示了该系统中蕴涵的知识。对于 $a_i\in A$，若 $\mathrm{IND}(A-\{a_i\})=\mathrm{IND}(A)$，称 a_i 是不必要的或冗余的，否则，

称 a_i 是必要的。A 中所有必要属性构成 A 的核，记为 CORE(A)[1]。

对于 $B\subseteq A$，若有(1)IND(B) = IND(A)，(2) $\forall C\subseteq B$ 且 $C\neq B$ 有 IND(C)≠IND(A)，称 B 是 A 的一个约简[1]。属性集 A 往往不止一个约简，A 的全体约简记为 RED(A)。约简与核有下面的关系：CORE(A) = ∩RED(A)[1]，即属性集的核等于它的全部约简的交。属性集的约简具有与属性集相同的分辨能力，并且每个属性都不是冗余的，即：约简既保持了信息系统的信息量，其中又无冗余属性。

由于约简往往不止一个，所以寻找所含属性个数最少，即最小约简将是很有意义的。在以往的方法中，有一类是在核的基础上逐个添加对已有属性子集信息增益最大的属性以求得最小约简[4]，但上面已举反例说明这一方法并非总是成功的。本文将引入二阶核与高阶核的概念对这一问题进行求解。但这样做虽较之以前有了进步，但也并非总是成功的。

3　二阶核与高阶核

设 $I=(U,A,V,f)$ 是一信息系统，$A=\{a_1,a_2\cdots a_n\}$ 是属性集，称 $A^2=\{\{a_1,a_2\},\{a_1,a_3\}\cdots\{a_{n-1},a_n\}\}$ 为 A 的二阶幂集。显然有：$\mathrm{card}(A^2)=n(n-1)/2$。若从 A^2 中去掉一元 $\{a_i,a_j\}$ 有：$\mathrm{IND}(A)\neq \mathrm{IND}(A-\{a_i,a_j\})$，说明从 A 中同时去掉两个属性 asi 和 asj，A 的信息量会减少，为此，有如下定义：

定义 1　设 $I=(U,A,V,f)$ 是一信息系统，$A^2=\{\{a_1,a_2\},\{a_1,a_3\}\cdots\{a_{n-1},a_n\}\}$ 是 A 的二阶幂集，若 $\mathrm{IND}(A)=\mathrm{IND}(A-\{a_i,a_j\})$，称 $\{a_i,a_j\}$ 在 A^2 中不必要或冗余，否则，称 $\{a_i,a_j\}$ 在 A^2 中必要。

以 A^2 为属性集，可以构造一个新的信息系统 $I'=(U,A^2,V^2,f')$，其中 U 是论域，与 I 中的论域相同。A^2 是 A 的二阶幂集，每一元 $\{a_i,a_j\}$ 是一个新的属性，如{颜色，形状}是一个属性，而{红色，三角形}是它的一个值。V^2 是 A^2 的属性值的集合，如{红色，三角形}是其一元，。$f':UXA^2\to V^2$ 是 I' 的信息函数。在信息系统 $I'=(U,A^2,V^2,f')$ 中，$\mathrm{IND}(A^2)$ 同样对 U 形成一个划分，这个划分实际上是 A 中每个属性的划分首先两两取交，然后所有这些交再做交，与 A 中所有属性构成的全部划分取交是等效的，所以有下面的关系：$U/\mathrm{IND}(A^2)=U/\mathrm{IND}(A)$。说明 A^2 与 A 具有相同的对论域 U 的分辨能力，拥有等量的知识。在 I' 中同样可以定义必要属性与不必要属性(如定义 1)、核、约简等。

定义 2　信息系统 $I'=(U,A^2,V^2,f')$ 中属性集 A^2 的核称为信息系统 $I=(U,A,V,f)$ 中属性集 A 的二阶核，记为 $\mathrm{CORE}^2(A)$，即 $\mathrm{CORE}^2(A)=\mathrm{CORE}(A^2)$。

在信息系统 $I=(U,A,V,f)$ 中，若 $\{a_i,a_j\}\in \mathrm{CORE}^2(A)$，即 $\mathrm{IND}(A)\neq\mathrm{IND}(A-\{a_i,a_j\})$，有 $\mathrm{IND}(A-\{a_i,a_j\})\supset\mathrm{IND}(A)$。说明从 A 中同时去掉两个属性 a_i 和 a_j，信息系统 $I=(U,A,V,f)$ 中蕴涵的知识会减少，也就是说，a_i 与 a_j 的结合在 A 中是必要的。此时最小约简不可能是 $A-\{a_i,a_j\}$ 的子集，不然的话，会导致最小约简联系的不可分辨关系真包含 IND(A)，这是不可能的，所以 a_i 与 a_j 中至少有一元属于最小约简。

对于 $\forall a_i\in A$，A 中除 a_i 之外还有 $n-1$(其中 n 是属性个数)个属性 $a_j(j\neq i)$，因此至多有 $n-1$ 个 j 值使 $\{a_i,a_j\}\in\mathrm{CORE}^2(A)$。若属性 $a_i\in\mathrm{CORE}(A)$，则对于任何 $j\neq i$，从 A 中同时去掉 a_i 与 a_j，则必然去掉核中的元 a_i，因此有 $\mathrm{IND}(A-\{a_i,a_j\})\neq\mathrm{IND}(A)$，从而有 $\{a_i,a_j\}\in\mathrm{CORE}^2(A)$。此时 $\mathrm{CORE}^2(A)$ 中共有 $n-1$ 个形式为 $\{a_i,a_j\}$ 的元，即 $\mathrm{CORE}^2(A)$ 中有 a_i 参加的元 $\{a_i,a_j\}$ 的个数达到最大值 $n-1$。令 B 是所有这样的属性 a_i 构成的集合：对于任何 $j\neq i$ 有 $\{a_i,a_j\}\in\mathrm{CORE}^2(A)$(共有 $n-1$ 个这样的 $\{a_i,a_j\}$)。自然有：$\mathrm{CORE}(A)\subseteq B$，反向的包含关系不成立。如在表 1 中，可以算出 $\mathrm{CORE}(A)=\Phi$，而 $B=\{c,d\}$，有 $\mathrm{CORE}(A)\subseteq B$，而反向的包含关系不成立。无疑属性 a_i 在 $\mathrm{CORE}^2(A)$ 中与其他元配对出现的个数，即：在 $\mathrm{CORE}^2(A)$ 中有 a_i 参加的元 $\{a_i,a_j\}$ 的个数是 a_i 的一个重要指标，可以近似地说明 a_i 的重要程度。为此定义一个 A 上的函数 $g:g(a_i)=\mathrm{card}(\{\{a_i,a_j\}\mid\{a_i,a_j\}\in\mathrm{CORE}^2(A)\})$。根据 g 值从大到小对 A 中的元进行排序，若 $\mathrm{CORE}(A)\neq\Phi$，则 CORE(A) 中的元处于序列的最前端，它们的 g 值都是 $n-1$。达到最大值。

类似地可以定义三阶幂集及三阶核，以至于一般的 p 阶幂集及 p 阶核，它们与核及最小约简的关系与 A2 类似，对于它们也可引入函数 g，根据 g 值对 A 中的元排序。

在信息系统 $I=(U,A,V,f)$ 中,属性集 A 的核 CORE(A)由 A 中所有必要属性构成,核中的元在 A 中是必要的,一个都不能少的。本文引入了二阶核 $\mathrm{CORE}^2(A)$甚至高阶核 $\mathrm{CORE}^p(A)$的概念,是对核概念的一种推广。二阶核 $\mathrm{CORE}^2(A)$中的元是以二元集$\{a_i,a_j\}$的形式出现,若$\{a_i,a_j\}\notin \mathrm{CORE}^2(A)$,则 $\mathrm{IND}(A-\{a_i,a_j\})=\mathrm{IND}(A)$,说明可以从 A 中同时去掉两元a_i 和a_j 而不影响A 的分辨能力,当然 a_i 和a_j 都可以不出现在A 的最小约简中,即 A 的最小约简可以从$A-\{a_i,a_j\}$中产生.若$\{a_i,a_j\}\in \mathrm{CORE}^2(A)$,则 $\mathrm{IND}(A-\{a_i,a_j\})\neq\mathrm{IND}(A)$,具体有 $\mathrm{IND}(A-\{a_i,a_j\})\supset\mathrm{IND}(A)$。此时可能$a_i$ 和a_j 在A 中都是不必要的,但它们的结合$\{a_i,a_j\}$是必要的,因此,a_i 与a_j 中至少有一元属于A 的最小约简。基于二阶核或高阶核,本文引入了定义在属性集 A 上的函数g,对于$\forall a_i\in A$, $g(a_i)=\mathrm{card}(\{\{a_i,a_j\}\mid\{a_i,a_j\}\in \mathrm{CORE}^2(A)\})$。$g(a_i)$越大,即 $\mathrm{CORE}^2(A)$中有更多的元包含属性 a_i,说明 a_i 出现在最小约简中的可能性越大。当然二阶核可能为空,此时可类似地考虑三阶核或更高阶的核。

下面给出基于二阶核或高阶核的求最小约简的步骤:

输入:一个信息系统 $I=(U,A,V,f)$;输出:信息系统 $I=(U,A,V,f)$中属性集 A 的最小约简 RED(A)。步骤:

(1) 计算 CORE(A), RED(A)←CORE(A)。

(2) 判断 IND(RED(A))=IND(A)? 若成立,则输出最小约简 RED(A),否则转(3)

(3) 计算 $\mathrm{CORE}^2(A)$,若 $\mathrm{CORE}^2(A)=\Phi$,则计算 $\mathrm{CORE}^3(A)$,直到首次出现 $p(p\geqslant2)$值使 $\mathrm{CORE}^p(A)\neq\Phi$。

(4) 计算 $B=A-\mathrm{RED}(A)$中的元在 $\mathrm{CORE}^p(A)$中与其他元配对出现的次数,即 g 值,按从大到小的顺序给 B 中的元排序:$g(b_1)\geqslant g(b_2)\geqslant g(b_3)\geqslant\cdots$

(5) $\mathrm{RED}(A)\leftarrow\mathrm{RED}(A)\cup\{b_1\}$,判断 IND(RED($A$))=IND($A$)? 若成立,则输出最小约简 RED($A$),否则,$\mathrm{RED}(A)\leftarrow\mathrm{RED}(A)\cup\{b_2\}$,直到首次出现 b_i 使:IND(RED(A))=IND(A)。则输出最小约简 RED(A)。

在这一方法中,希望用首次非空的 $\mathrm{CORE}^p(A)(p\geqslant2)$,一般情况下,$\mathrm{CORE}^2(A)$是非空的,若非空,则 p 取为 2,即使 $\mathrm{CORE}(A)=\Phi$,这个 p 值也不会很大。

另外,这一方法也是在核的基础上逐个添加属性,不过添加时考虑它与其他属性的关系,即 p 值。一般来说,g 值越大,说明它与其他属性的关系越紧密,这样它的添加也在一定程度上相当于把其他未添加属性的知识添加到已有属性子集中去,有利于构造最小约简。

4 例

例 1 计算表1所给信息系统的最小约简。

表 1 一个信息系统

U	a	b	c	d
1	1	1	1	1
2	2	2	1	2
3	3	3	3	3
4	4	4	3	4
5	5	5	5	5
6	6	5	5	6
7	7	7	7	7
8	7	8	7	8
9	9	9	9	9
10	9	9	10	10

（续表）

U	a	b	c	d
11	11	11	11	11
12	12	12	12	11
13	13	13	13	13
14	14	14	14	13
15	15	15	15	15
16	16	15	16	15
18	17	18	18	17

在这个信息系统中，属性集 $A=\{a,b,c,d\}$，容易算出它的核为：

$$\mathrm{CORE}(A)=\Phi$$

二阶核为：

$$\mathrm{CORE}^2(A)=(\{a,c\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,d\},\{c,d\})。$$

从而有：
$$g(c)=g(d)=3>g(a)=g(b)=2$$

首先让 $\mathrm{RED}(A)=\{c\}$，判断得：$\mathrm{IND}(\{c\})\neq\mathrm{IND}(A)$。再将 d 赋予 $\mathrm{RED}(A)$ 得：$\mathrm{RED}(A)=\{c,d\}$。判断得：$\mathrm{IND}(\{c,d\})=\mathrm{IND}(A)$。所以最小约简为：$\mathrm{RED}(A)=\{c,d\}$。

例 2 如表2所示，计算这个信息系统[2]的最小约简。

表 2 一个信息系统

U	a	b	c	d	e
1	1	0	2	2	0
2	0	1	1	1	2
3	2	0	0	1	1
4	1	1	0	2	2
5	1	0	2	0	1
6	2	2	0	1	1
7	2	1	1	1	2
8	0	1	1	0	1

在这个信息系统中，属性集 $A=\{a,b,c,d,e\}$，容易算出它的核为：

$$\mathrm{CORE}(A)=\{a,b\}$$

首先让 $\mathrm{RED}(A)=\{a,b\}$。判断得：$\mathrm{IND}(\{a,b\})\neq\mathrm{IND}(A)$。

二阶核为： $\mathrm{CORE}^2(A)=\{\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{a,e\},\{b,c\},\{b,d\},\{b,e\},\{d,e\}\}$。

计算 $B=A-\mathrm{RED}(A)=\{c,d,e\}$ 中元的 g 值为：

$$g(c)=2,g(d)=3,g(e)=3$$

排序得：$g(d)=g(e)=3>g(c)=2$。

$\mathrm{RED}(A)\leftarrow\mathrm{RED}(A)\cup\{d\}$，得 $\mathrm{RED}(A)=\{a,b,d\}$，判断得 $\mathrm{IND}(\{a,b,d\})=\mathrm{IND}(A)$，因此最小约简为：$\mathrm{RED}(A)=\{a,b.d\}$。

5 结语

本文在信息系统中属性集的核的基础上引入二阶核与高阶核的概念，旨在求属性集的最小约简。并且对已有的从核的基础上逐个添加重要属性以求得最小约简的方法做了改进。已有的方法是单个考虑属性的重要度，我们引入的启发函数是从两个属性甚至多个属性的结合中考察核外属性的重要度。

求最小约简已证明是一个 NP-hard 问题,解决的方法是用启发函数,我们在此给出定义在属性集 A 上的函数 g 做为启发函数。当然,这也并非最优方法,但确实向最优化迈进了一步。

参考文献

[1] Pawlak Z. Rough sets-theoretical aspects of reasoning about data. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991.
[2] 曾黄麟. 粗集理论及其应用. 重庆:重庆大学出版社, 1998
[3] J. W. Guan, D. A. Bell. Rough computational methods for information systems. Artificial Intelligence105(1998)77~103.
[4] 苗夺谦,胡桂荣. 知识约简的启发式算法. 计算机研究与发展,1999,36(6)681~684

具有极点约束的容错控制器设计——LMI 方法*

张华春　谭　民　郁文生
（中国科学院自动化研究所，北京　100080）

摘　要：利用 LMI 理论，对于线性连续或离散时间系统，提出一种具有闭环极点约束的容错控制器设计方法。所设计的状态反馈控制器，不论对正常系统或对执行器失效的故障系统，都使得闭环系统的极点配置在一指定的圆形区域内。给出了基于线性矩阵不等式的状态反馈控制器存在的一个便于应用的充分条件。

关键词：容错控制，极点配置，线性矩阵不等式 LMI，执行器失效

1　引言

众所周知，线性系统的动态特性是由其闭环极点位置来决定的，因而对闭环系统传递矩阵的极点进行约束可保证系统具有良好的动态性能。而在实际应用中，精确的极点配置并不需要，也无必要。对线性连续时间系统而言，只要使闭环系统极点位于左半复平面上某一区域；对离散系统只要位于单位圆内某一区域，在工程上已足够了。

将闭环系统极点配置在复平面上某一圆域，也即 D 稳定理论，引起了许多学者广泛的重视。通过 Lyapunov 及 Riccati 矩阵方法，提出许多控制器综合方法，来设计具有 D 稳定性的控制器[1~5]。近来文献[6]利用线性矩阵不等式 LMI 方法，提出了具有极点配置约束的 H_∞/H_2 优化控制器设计方法。通过 LMI 最优化方法，数值解也易于获得。

在实际系统中，控制系统的故障是不可避免的。据统计，80％的故障起因于执行器或传感器失效[7]。在上述具有闭环极点约束的控制器设计中，大多都未考虑执行器或传感器可能失效的情形，当执行器或传感器失效时，系统的性能和稳定性就可能得不到保证。本文基于 LMI 方法，提出了一种新的具有闭环极点约束的容错控制器设计方法，对执行器或传感器故障下的控制器设计给出了一个设计框架。当系统正常时，使系统的闭环极点位于一指定的圆形区域中；当系统发生故障时，仍使故障系统闭环极点位于同一指定的圆域 D 中，给出了利用 LMI 方法，该容错控制器存在的便于应用的充分条件。

2　问题描述

考虑如下的线性连续或离散时间系统：

$$\delta[x(t)] = Ax(t) + Bu(t) \tag{1}$$

式中 $x\in R^n$ 为状态向量，$u\in R^m$ 是输入向量，A, B 为适当维数的常数矩阵。δ 对于连续时间系统是微分算子，即 $\delta[x(t)]=\dot{x}(t)$；而在离散时间系统则是延迟算子，即 $\delta[x(t)]=x(t+1)$。假设 (A,B) 可控，若采用状态反馈控制

$$u(t) = Kx(t)$$

式中 K 为状态反馈阵，则闭环系统为：

$$\delta[x(t)] = (A + BK)x(t) := A_c x(t) \tag{2}$$

为了表征系统发生执行器故障，引入表示执行器故障的切换阵 L。

$$L = \mathrm{diag}(\eta_1, \eta_2 \cdots \eta_m) \tag{3}$$

---

* 本项目为国家攀登计划项目基金资助课题。

式中 $\eta_i=1$ 或 0，当 $\eta_i=1$ 时，表示第 i 个执行器正常；当 $\eta_i=0$ 时，表示第 i 个执行器发生故障，$i=1,2\cdots m$。

考虑到系统发生执行器故障的状态反馈闭环系统为：

$$\delta[x(t)]=Ax(t)+BLu(t)=(A+BLK)x(t):=A_c x(t) \tag{4}$$

若用 Ω 表示对角元素为 1 和 0 的各种组合的对角阵 L 的集合（$L=0$ 除外），即 $\{\Omega: L_i\in\Omega, i=1,2\cdots N\}$，$N$ 为故障数的最大值，则本文研究的问题就是确定状态反馈增益矩阵 K，使系统在各种故障下及正常时，系统闭环极点都位于圆心在 $\alpha+\mathrm{j}0$，半径为 r 的圆形区域 $D(\alpha,r)$ 中。对连续时间系统，$\alpha<0$，且 $r<|\alpha|$；对离散时间系统，若 $\alpha>0$，则 $\alpha+r<1$；若 $\alpha<0$，则 $\alpha-r>-1$，即系统具有 D 稳定性。

3 主要结果

为了证明以下结果，先给出几个引理。

引理 1[8] 下述线性矩阵不等式 LMI

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix}>0 \tag{5}$$

式中 $Q=Q^T, R=R^T$，等价于

$$R>0 \qquad Q-SR^{-1}S^T>0 \tag{6}$$

换言之，一类非线性不等式(6)可以表达为线性矩阵不等式(5)。

引理 2[5] 对于给定的矩阵 $A\in R^{n\times n}$，其特征值位于圆域 $D(\alpha,r)$ 中的充分必要条件是，存在对称正定矩阵 P，$P\in R^{n\times n}$，满足下面的矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} -P^{-1} & A_\alpha \\ A_\alpha^T & -P \end{bmatrix}<0 \tag{7}$$

式中，$A_\alpha=(A-\alpha I)/r$。根据引理 2，显然可得到如下的定理 1。

定理 1 对于可能发生执行器故障 $L_i, i=1,2\cdots N$ 的系统(4)，状态反馈增益阵 K 使其闭环极点配置在圆域 $D(\alpha,r)$ 中的充分必要条件是存在 $P_i=P_i^T>0, i=1,2\cdots N$，使得下述矩阵不等式成立。

$$\begin{bmatrix} -P_i^{-1} & A_{\alpha li} \\ A_{\alpha li}^T & +P_i \end{bmatrix}<0 \quad (i=1,2\cdots N) \tag{8}$$

式中 $A_{\alpha li}=(A+BL_iK\text{-}\alpha I)/r$。类似地，可得到对可能发生传感器故障的系统，其闭环极点配置在圆域 $D(\alpha,r)$ 中的充分必要条件。

根据定理 1，对于发生任意一种执行器故障 $L_i(i=1,2\cdots N)$，利用上述充分必要条件，只要上述矩阵不等式有解，状态反馈增益阵 K，使得对应的故障系统 S_i 的闭环极点配置在圆域 $D(\alpha,r)$ 中。但是定理 1 在实际应用中，并不实用。由于 P^{-1} 的存在，上述充分必要条件并不是一个严格意义上的线性矩阵不等式 LMI。为了利用 LMI 来进行控制器的设计，下面给出利用 LMI 方法，该状态反馈容错控制器存在的一个便于应用的充分条件。

定理 2 如果下述线性矩阵不等式 LMI 有解，那么，对于可能发生执行器故障 $L_i(i=1,2\cdots N)$ 的系统(4)，状态反馈增益阵 K 使得闭环极点配置在圆域 $D(\alpha,r)$ 中。

$$\begin{bmatrix} r^2Z & ((A-\alpha I)Z+BL_iY)^T \\ (A-\alpha I)Z+BL_iY & Z \end{bmatrix}>0 \quad (i=1,2\cdots N) \tag{9}$$

此时，状态反馈增益矩阵 K 由下式确定。

$$K=YZ^{-1} \tag{10}$$

证明 在以下的证明中，假设对所有的 $L_i, i=0\cdots N$ 均成立。定义 $G:=A_{\alpha lc}=(A+BL_iK-\alpha I)/r=(A_{lc}-\alpha I)/r$，显然，原系统闭环极点要配置在圆域 $D(\alpha,r)$ 中等价于 G 的特征值位于单位圆 $D(0,1)$ 中。根据离散 Lyapunov 稳定性理论，对于系统(4)，如果存在正定对称阵 P，满足下述线性矩阵不等式 LMI

$$G^TPG-P<0 \tag{11}$$

则 G 为渐近稳定。将上式展开，为$((A+BL_iK-\alpha I)/r)^TP(A+BL_iK-\alpha I)/r-P<0$，即

$$(A + BL_iK - \alpha I)^TP(A + BL_iK - \alpha I) - r^2P < 0 \tag{12}$$

由于 P 对称正定，必有 $P^{-1}>0$，且$(P^{-1})^T=P^{-1}$，对式(12)分别左乘和右乘 P^{-1}，有

$$P^{-1}(A + BL_iK - \alpha I)^TP(A + BL_iK - \alpha I)P^{-1} - r^2P^{-1} < 0$$

即
$$[(A - \alpha I)P^{-1} + BL_iKP^{-1}]^TP[(A - \alpha I)P^{-1} + BL_iKP^{-1}] - r^2P^{-1} < 0$$

令：
$$KP^{-1} = Y \quad P^{-1} = Z$$

有
$$[(A - \alpha I)Z + BL_iY]^TZ^{-1}[(A - \alpha I)Z + BL_iY] - r^2Z < 0 \tag{13}$$

根据引理1，由于 P 对称正定，必然有 $Z=P^{-1}=Z^T$，且 $Z>0$，上式即可表达为线性矩阵不等式LMI

$$\begin{bmatrix} r^2Z & [(A - \alpha I)Z + BL_iY]^T \\ (A - \alpha I)Z + BL_iY & Z \end{bmatrix} > 0 \quad (i = 1,2\cdots N) \tag{14}$$

如果式(14)的线性矩阵不等式有解，那么对于执行器失效的故障系统(4)，必然使其闭环极点配置在圆域 $D(\alpha,r)$中。此时，状态反馈增益矩阵 K 由下式确定。

$$K + YP = YZ^{-1} \tag{15}$$

定理2表明，只要满足上述条件，一个确定的状态反馈增益阵 K，使得所有故障系统及正常系统的闭环极点都配置在圆域 $D(\alpha,r)$中，因此按照此方法设计的控制器，使得控制系统对执行器失效具有完整性。

注1 应当注意到，本文仅考虑不论是正常系统，还是故障系统，其闭环极点都配置在一个圆域中的情况。若考虑到更一般的情况，可选指定区域为文献[6]所示的区域，经过类似的推导，该文的结果可推广到更一般的区域。

注2 本文并未考虑所设计系统的性能指标，如考虑 H_2，H_∞性能指标，则可得出相应的控制器设计方法。

4 结论

本文针对实际系统中存在的执行器故障问题，利用 LMI 方法，提出一种多变量控制系统的设计方法。所设计的系统不仅使正常系统闭环极点位于指定的圆形区域，而且仍使执行器故障系统闭环极点也位于指定的圆形区域，保证系统在执行器故障下，仍然具有良好的动态性能。

参考文献

[1] K. Furuta, and S. B. Kim, Pole assignment in a specified disc, IEEE Trans. Autom. Contr., 1987, AC-32: 423～427

[2] N. Kawasaki, and E. Shimemura, Pole placement in aspecified region based on a linear quadratic regulator, Int. J. Control, 1988, 48: 225～240

[3] W. M. Haddad, and D. S. Bernstein, Controller design with regional poleconstraints, IEEE Trans. Autom. Control, IEEE Trans. Autom. Contr., 1992, AC-37: 54～69

[4] Wang, Z. D., Tang, G. Q. and Chen, X. M., Robust controllerdesign for uncertain linear systems with circular pole constraints. Int. J. Control, 1996, 65: 1045～1054

[5] G. Garcia, and J. Bernussou, Pole assignment for uncertain systems in a specified disk by state feedback, IEEE Trans. Autom. Control, 1995, AC-40: 184～190

[6] M. Chilali, and P. Gahinet, H_∞ design with pole placementconstraints: an LMI approach, IEEE Trans. Autom. Contr., 1996, AC-41: 358～367

[7] 闻 新，张洪钺，周 露. 控制系统的故障诊断和容错控制. 北京：机械工业出版社，1998

[8] S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, Linear matrix inequalities in system and control theory, 1994, vol. 15, Philadelphia: SIAM

n 阶稳定多项式对应严格正实域的刻划*

郁文生　谭　民
(中国科学院自动化研究所复杂系统工程学开放实验室,北京　100080)
王　龙
(北京大学力学与工程科学系,北京　100871)

摘　要:利用多项式正根判别准则,对于给定的 n 阶稳定的多项式,给出其所决定的严格正实域的完整刻划,并对低阶系统具体给出了依赖于给定多项式系数的严格正实域的显式表达式,较文献[10、11]的结果更为简单、适用、有效。

关键词:多项式完全判别系统,多项式正根判别准则,严格正实域

1　引言

传递函数的严格正实性(SPR)是系统的一种重要性能,在控制理论的多个领域中,都起着十分重要的作用[1-5]。

但是,由于 SPR 源于多个不同的领域,不同的文献采用了稍有不同的定义[6]。本文为明确起见,采用如下的定义。

记 P^n 为 s 的 n 阶实系数多项式集合,R 表示实数域,$H^n \subset P^n$ 是所有 n 阶实系数 Hurwitz 稳定多项式(仅具负实部的根)集合。

在下述定义中,$b(\cdot)\in P^m$,$a(\cdot)\in P^n$,$p(s)=b(s)/a(s)$是有理函数。

定义　$p(s)$ 称为是严格正实(SPR) 的,记为 $p(s)\in \mathrm{SPR}$,是指 $b(s)\in P^n$,$a(s)\in H^n$,且对 $\forall\,\omega\in R$,$\mathrm{Re}[p(j\omega)]>0$。

问题　给定 $a(s)\in H^n$,如何找出所有的 $b(s)$,使 $p(s)=\dfrac{b(s)}{a(s)}\in \mathrm{SPR}$?

该问题对系统鲁棒 SPR 分析与综合是有意义的。特别,给出 $b(s)$的基于 $a(s)$的系数的显式表达条件是文献[4]中提出的一个尚未解决的问题。

从上述有理函数 SPR 的定义容易得到如下的性质:

性质 1[2,3]　$p(s)\in \mathrm{SPR}$,则有 $b(s)\in H^n$。

性质 2[4]　$p(s)\in \mathrm{SPR}$,则所有的 $b(s)$的系数分别在 $n+1$ 维空间中构成一个凸锥。

另外,还可通过正实引理[2,3],给出有理函数的基于矩阵方程或矩阵不等式的正实性条件[2,3,5]。但用该方法描述 SPR 域,须引进较多的变元,得到的矩阵方程或矩阵不等式阶次较高,且所得条件是用矩阵方程或矩阵不等式的可解性来表述的,而这一点在理论上亦未有完整的结果[7]。

传递函数 SPR 性的判定,本质上可以化为多项式实根的判定问题。古典 Sturm 组方法或用牛顿递推公式法虽然也可用于判定多项式实根的分布,但其对文字(符号)系数的多项式建立判别系统是没有效率的[8,9]。

1996 年,杨路、侯晓荣、曾振柄等建立的多项式完全判别系统^{[8,9]},可以给出一组由多项式系数构成的显式表达式来判定多项式根的状况。文献[10、11]借此给出了传递函数 SPR 域的完整的刻划,从而回答了文献[4]中提出的问题。

通过文献[10、11]的研究可以看到,传递函数 SPR 性的判定,实际上仅需用到多项式正根的判定问题。最近,杨路、夏壁灿等又在多项式完全判别系统的基础上进一步得到了多项式正根或负根个数的判

* 本项目为国家自然科学基金资助项目。

别法[12]，其本质上与多项式完全判别系统相通，但计算则更为有效[12]。

本文利用多项式正根判别准则，对于给定的 n 阶稳定的多项式，给出其所决定的严格正实域的完整刻划，并对低阶系统具体给出了依赖于给定多项式系数的严格正实域的显式表达式，较文献[10、11]的结果更为简单、适用、有效。

2　多项式判别系统与多项式正根判别准则

设

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n \in P^n,$$

$f(x)$与 $f'(x)$的西尔维斯特(J.J.Sylvester)矩阵[8,9]

$$\begin{bmatrix}
a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n & & & \\
0 & na_0 & (n-1)a_1 & \cdots & a_{n-1} & & & \\
 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n & & \\
 & 0 & na_0 & \cdots & 2a_{n-1} & a_{n-1} & & \\
 & & & \cdots & \cdots & & & \\
 & & & \cdots & \cdots & & & \\
 & & & & a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\
 & & & & 0 & na_0 & \cdots & a_{n-1}
\end{bmatrix}$$

称为 $f(x)$的判别矩阵，记为 $\mathrm{Discr}(f)$。

$$[D_1(f), D_2(f) \cdots D_n(f)]$$

是 $\mathrm{Discr}(f)$的偶阶顺序主子式序列，称为 $f(x)$的判别式序列。

$$[\mathrm{sign}(D_1), \mathrm{sign}(D_2) \cdots \mathrm{sign}(D_n)]$$

称为判别式序列$[D_1, D_2 \cdots D_n]$的符号表，这里 $\mathrm{sign}(\cdot)$是符号函数，即

$$\mathrm{sign}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

给定一符号表$[s_1, s_2 \cdots s_n]$，构造一个符号修订表

$$[\varepsilon_1, \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_n]$$

其构造规则如下：

(1) 如果$[s_i, s_{i+1} \cdots s_{i+j}]$是所给符号表中的一段，并有 $s_i \neq 0, s_{i+1} = s_{i+2} = \cdots = s_{i+j-1} = 0, s_{i+j} \neq 0$，则将此段中的 0 元素构成的序列

$$[s_{i+1}, s_{i+2} \cdots s_{i+j-1}]$$

代之以项数相同的下述序列

$$[-s_i, -s_i, s_i, s_i, -s_i, -s_i, s_i, s_i, -s_i \cdots]$$

即 $\varepsilon_{i+r} = (-1)^{\frac{r+1}{2}} s_i, r = 1, 2 \cdots j-1$。

(2) 除此之外，令 $\varepsilon_k = s_k$，即其余各项保持不变。

引理 1[8,9]　给定实系数多项式 $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n \in P^n$，若其判别式序列的符号修订表的变号数是 υ，而符号修订表中的非零元个数为 μ，则 $f(x)$的互异实根个数为 $\mu - 2\upsilon$。

注 1　多项式 $f(x)$的判别式序列还可由 $f(x)$与 $f'(x)$的贝佐(E.Bezout)矩阵[8,9]的各阶顺序主子式而得到；多项式 $f(x)$的互异实根个数也可由 $f(x)$与 $f'(x)$的贝佐矩阵的符号差决定[8,9]。

注 2　原多项式完全判别系统[8,9]较上述引理还要丰富些，可进一步判定多项式复根个数及根的重数。

最近，杨路、夏壁灿等又进一步得到了多项式正根或负根个数的判别法[12]，其本质上与前述引理相通，但计算则更为有效。

引理 2[12] 给定实系数多项式 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n\in P^n, a_n\neq0$,令 $h(x)=f(-x)$,$\{d_1,d_2\cdots d_{2n+1}\}$是 $h(x)$的判别矩阵 Discr(h)的顺序主子式序列,序列$\{d_1d_2,d_2d_3\cdots d_{2n}d_{2n+1}\}$的符号修订表的变号数是 υ,而该符号修订表中的非零元个数为 μ 则 $f(x)$的互异正根个数为 $\mu-2\upsilon$。

3 严格正实域的显式表达式

下面,对于给定的 n 阶稳定的多项式,给出其所决定的严格正实域的完整刻划。根据严格正实的定义,设

$$a(s)=a_0s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_n\in H^n$$
$$b(s)=x_0s^n+x_1s^{n-1}+\cdots+x_n\in P^n$$

若引入$(n+1)\times(n+1)$阶矩阵 $A=(a_{ij}), a_{-ij}=(-1)^{i+j}a_{2i-j-1}, i,j=1\cdots n+1$,式中,$a_i=0, i<0$ 或 $i>n$.容易看出有

$$E_n:=\begin{bmatrix}1&&&&\\&-1&&&\\&&1&&\\&&&-1&\\&&&&\ddots\end{bmatrix}, A\times\begin{bmatrix}a_0&0&\cdots&0\\-a_2&&&\\a_4&&E_nH_a^TE_n&\\\vdots&&&\end{bmatrix}$$

这里 H_a 是$a(s)$的 Hurwitz 矩阵,

$$H_a:=\begin{bmatrix}a_1&1&0&0&0&\cdots&0\\&a_2&a_1&1&0&\cdots&0\\a_5&a_4&a_3&a_2&a_1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{2n-1}&a_{2n-2}&a_{2n-3}&a_{2n-4}&a_{2n-5}&\cdots&a_n\end{bmatrix}$$

记

$$b:=\begin{bmatrix}x_0\\x_1\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}, c:=Ab=\begin{bmatrix}c_0\\c_1\\\vdots\\c_n\end{bmatrix}$$

考虑多项式

$$f(\omega)=\sum_{l=0}^{n}c_l\omega^{n-l}$$

又,令

$$h(\omega)=f(-\omega)=\sum_{l=0}^{n}c_l(-\omega)^{n-l}$$

则有

定理 已知 $a(s)=a_0s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_n\in H^n$,设 $b(s)=x_0s^n+x_1s^{n-1}+\cdots+x_n\in P^n$,则$p(s):=\frac{b(s)}{a(s)}\in$SPR$\Leftrightarrow$序列$\{d_1d_2,d_2d_3\cdots d_{2n}d_{2n+1}\}$的符号修订表的变号数 υ 与其非零元个数 μ 满足 $\mu=2\upsilon$,其中,$\{d_1,d_2\cdots d_{2n+1}\}$是 $h(x)$的判别矩阵 Discr(h)的顺序主子式序列。

证明 因为

$$a(s)=a_0s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_n\in H^n$$
$$b(s)=x_0s^n+x_1s^{n-1}+\cdots+x_n\in P^n$$

直接计算可得,对$\forall\,\omega\in R$,有

$$\mathrm{Re}\left[\frac{b(j\omega)}{a(j\omega)}\right]=\frac{1}{|a(j\omega)|^2}\mathrm{Re}[b(j\omega)a(-j\omega)]=$$