

北京师范大学教师培训学院文丛

智慧的阶梯

——论数学思想方法的教与学

肖学平 编著

国防大学出版社

智慧的阶梯

——论数学思想方法的教与学

肖学平 编著

国防大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

智慧的阶梯——论数学思想方法的教与学/肖学平编著.
—北京:国防大学出版社,2002.5
ISBN 7-5626-1178-5

I. 论… II. 肖… III. 数学—思想方法—教学研究
IV. 01-0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 034726 号

智慧的阶梯

——论数学思想方法的教与学

出版发行:国防大学出版社

社 址:北京市海淀区红山口甲 3 号

邮 编:100091

经 销:全国新华书店

开 本:850×1168 1/32

印 张:10.75

印 刷:北京通州京华印刷制版厂印刷

字 数:221 千字

版 次:2002 年 6 月第 1 版

印 次:2002 年 6 月第 1 次印刷

印 数:1-18000

书 号:ISBN 7-5626-1178-5/G·58

定 价:19.80 元

(版权所有 翻印必究 印装有误 负责调换)

内 容 概 要

本书尽可能详细地论述了数学思想方法的教与学。首先介绍了数学思想方法,其次分析了高考中出现过的数学思想方法考题实例,再次按照高考明确要求考查的数学思想方法,分别阐述了如何讲授及掌握它们,一方面介绍基本知识,另一方面用分析、解答、评注等方式讲解典型例题。

本书概括了中学数学的主要内容、方法和技巧,重点剖析了通性、通法,有助于读者真正理解和掌握中学数学,从而提高数学素养。

运用阶梯式渐进的手法,遵循人们对数学思想方法认知的普遍规律,引导并启发读者了解、掌握书中内容,是本书力求体现的一大特点。

序

数学是一门非常重要的学科,它与人类的生活和发展密不可分,社会主义现代化建设的各行各业都需要数学。华罗庚先生曾说:“宇宙之大,粒子之微,火箭之速,化工之巧,地球之变,生物之谜,日用之繁,无处不用数学。”由于新技术革命的兴起和发展,整个社会生活与数学的关系更加密切了,社会科学化,科学数学化已成为当代社会发展的一种趋势。

数学是逻辑严谨的、不断发展着的“思想事物”构成的体系,数学思想是数学的核心。认识数学、研究数学、应用数学到什么程度,主要看人们对数学思想方法掌握得怎样。理论研究和人才成长的轨迹都表明,数学思想方法在人的能力培养和素质提高方面具有重要作用。数学思想方法作为数学教育的重要内容,已日益引起了人们的注意。

日本数学家和数学教育家米山国藏在多年从事数学教育研究之后深有感触地说:“学生们在初中或高中所学到的数学知识,在进入社会后,几乎没有什么机会应用,因而这种作为知识的数学,通常在出校门后不到一两年就忘掉了,然而不管他们从事什么工作,那种铭刻于头脑中的数学精神和数学思想方法,却长期地在他们的生活和工作中发挥着作用。”反观我国学校数学教学的现状,在数学思想方法的教育和培养方面明显做得不够,而且多数情况下还尚未完全被广大教师和学生所认识到。这表现在:受多年来应试教育模式的影响,教师、学生、课本、参考书都过多地把兴趣放在了具体的数学知识和解题技巧上,而对于数学思想方法只能是让学生悟到多少算多少了,学生能够机械地运用所学到的知识应

智慧的阶梯

付各级各类考试就算达到目的了。其后果是学生只了解了一些基础概念,学到一些简单的定义、定理和公式,而没有真正踏入数学科学殿堂的大门,体会不到数学的精髓所在,无法感受数学对思维能力发展的巨大作用,这个现象好比是成语所说的“买椟还珠”。因此,加强数学思想方法教学与研究已成为数学教育改革中一件重要而又迫切的任务,同时,这也是素质教育在数学教学中的要求和体现。

本书对中学阶段数学课程所涉及到的数学思想方法作了系统而全面的论述,深入分析了各个教学单元的重点与难点,具体阐述了培养数学思想方法的手段,指明了一些习惯做法的偏颇与不足之处,给出了帮助学生突破瓶颈真正提高数学能力的有效办法,它的一个最大特色就是在论述过程中尽量体现阶梯式的思维认识过程,即根据学生对不同阶段数学知识的认知规律,由浅入深、由易到难、逐步递进地把学生引入到充满思想菁华的数学王国中。在本书中能充分感受到作者对教师、学生理解之深切;对教材以及各类教学目标掌握之透彻,相信这些会给读者带来很大裨益。此外,本书语言通俗、文字流畅、体例新颖、与教学实际结合紧密,非常适合中学阶段数学教学所有参与者阅读。

培养学生基本的数学能力、了解基础的数学知识是数学教育的传统功能,而重视思想意识的培养更能使数学教育升华成为促进学生思维能力发展的不可替代的重要手段,数学教育也由此焕发出更大的活力,继而惠及到其他学科,并推动全社会科技文化水平的进步。

让我们共同努力,把我国的中学数学教育推上一个新高度。

俞启定

2002年5月

作者简介

肖学平,1962年生,毕业于福建师范大学数学系,特级教师,现任厦门海沧实验中学校长、书记。所教学生有30多人次在全国奥赛中获奖,高考成绩连年居省市前茅;在教研方面发表了30多篇论文,出版了《中学数学的基本思想和方法》、《你能学好数学》等百万余字的论著。并荣获省优秀教育工作者和全国苏步青数学教育奖等荣誉。

目 录

序	(1)
第一章 略论数学思想方法	(1)
§ 1.1 数学思想方法的内容、特点和作用	(1)
§ 1.2 数学思想方法的学习过程	(5)
§ 1.3 数学思想方法的教学原则	(8)
§ 1.4 数学思想方法教学的若干问题	(13)
第二章 高考中的数学思想方法	(19)
§ 2.1 高考要求考查的数学思想方法	(19)
§ 2.2 高考试题分析中的数学思想方法	(20)
§ 2.3 高考中考查数学思想方法试题的编写过程举例	(25)
§ 2.4 高考中考查数学思想方法试题举例	(31)
第三章 转化(或化归)思想的教学	(54)
§ 3.1 有关转化思想的基本知识	(54)
§ 3.2 转化思想的应用与教学	(61)
第四章 函数、方程、不等式思想的教学	(74)
§ 4.1 有关函数、方程、不等式思想的基本知识	(74)
§ 4.2 函数、方程、不等式思想的应用与教学	(77)
第五章 分类讨论(或逻辑划分)思想的教学	(98)
§ 5.1 有关分类讨论思想的基本知识	(98)
§ 5.2 分类讨论思想的应用与教学	(107)
第六章 数形结合思想的教学	(122)
§ 6.1 数形结合思想概述	(122)
§ 6.2 数形结合思想的应用与教学	(128)

第七章 观察、归纳、猜测思想的教学	(161)
§ 7.1 有关观察、归纳、猜测思想的基本知识	(161)
§ 7.2 观察、归纳、猜测思想的应用与教学	(177)
第八章 数学归纳法的教学	(195)
§ 8.1 数学归纳法的原理与常见形式	(195)
§ 8.2 数学归纳法的应用与教学	(201)
第九章 反证法的教学	(223)
§ 9.1 有关反证法的基本知识	(223)
§ 9.2 反证法的应用与教学	(230)
第十章 换元法(或代换法)的教学	(244)
§ 10.1 有关换元法的基本知识	(244)
§ 10.2 换元的技巧与方法	(250)
§ 10.3 换元法的应用与教学	(261)
第十一章 待定系数法的教学	(270)
§ 11.1 有关待定系数法的基本知识	(270)
§ 11.2 待定系数法的应用与教学	(277)
第十二章 分析法与综合法的教学	(292)
§ 12.1 有关分析法与综合法的基本知识	(292)
§ 12.2 分析法与综合法的应用与教学	(300)
第十三章 中学数学中其他几种基本方法的教学	(315)
§ 13.1 配方法的教学	(315)
§ 13.2 同一法的教学	(318)
§ 13.3 消元法的教学	(320)
§ 13.4 坐标法的教学	(322)
附录	(331)
后记	

第一章 略论数学思想方法

所谓“思想”是:客观存在反映在人的意识中经过思维活动而产生的结果,而“方法”是:关于解决思想、说法、行动等问题的门路、程序等。

我们把“数学思想方法”描述为:是人们对数学内容本质的认识,是对数学知识的抽象和概括,属于对数学规律的理性认识的范畴。

数学方法是处理、探索、解决问题的技巧、手段和工具,它的特点是比较具体简单,数学思想是数学中处理问题的基本观点,是对数学内容的本质概括,是解决数学问题的指导方针,它的特点是较为抽象,属于较高层次的地位。

数学思想和数学方法是很难区分的,因此,人们常常不加区分,而统称为数学思想方法。

§ 1.1 数学思想方法的内容、特点和作用

数学科学与自然科学和社会科学具有同等重要的地位。她不仅是人类文明的重要组成部分,而且还在推动科学与文化的进步。正如希尔伯特所说:她是描绘现实世界的一种方式 and 创造现实世界的一种力量。数学思想方法反映了数学的本质和发展,反映了数学的发明、发现与创造,是数学科学的核心。

一、数学思想方法的基本内容

数学可以说是由三部分内容组成的:基本知识、基本技能、基

智慧的阶梯

本思想方法,简称“三基”.数学思想方法是数学的重要组成部分.

数学思想方法可分成三类:

1. **思想观点类**.例如公理化的思想,转化思想,极限思想,结构思想(布尔巴基学派用这个观点统一地看待和概括全部数学,并指出数学有三种基本结构:代数结构、顺序结构和拓扑结构),等等.

2. **思维方法类**.例如分析与综合,抽象与概括,演绎与证明,观察、类比、归纳、猜想等等.

3. **技能技巧类**.例如待定系数法、配方法、坐标法、换元法等等.

中学数学的基本思想方法有:转化(或化归)的思想,分类讨论的思想,数形结合的思想,观察、归纳、猜测的思想,函数、方程、不等式的思想.数学归纳法、待定系数法、换元法、反证法、配方法、坐标法、分析法与综合法等.

二、数学思想方法的核心

数学思想方法的核心是转化的思想.

数学中的一切问题的解决归根结底就是转化,把未知的转化为已知的,难解的转化为易解的,数转化为形,形转化为数,实际问题转化为数学问题,等等.因此数学思想方法中的其它思想方法,也都是依据转化思想得来的.实际上从哲学角度来看,事物之间互相联系与转化,不断发展变化.

三、数学思想方法的特点

就数学而言,她有三大特征:抽象性,精确性,应用的广泛性.作为反映数学本质的数学思想方法,有三大特点:

(I) 抽象性,

(II) 指导性,

(III) 应用的广泛性.

关于抽象性.正如恩格斯所说:“为了能够从纯粹的状态中研

究这些形式和关系,必须使它们完全脱离自己的内容,把内容作为无关重要的东西放在一边;这样,我们就得到没有长宽高的点,没有厚度和宽度的线,形如 a 和 b 与 x 和 y ,即常数和变数;……”数学的这种点、线以及其它形式和关系,不同于客观实在的点、线或现实的形式和关系,已是一种“思想事物”了. 数学运用特制的抽象符号语言,在数学推理中,从前提到结论,每一推理步骤都是用符号进行的,所得到的结论也是用数学公式来表达的. 数学思想方法则是从众多的数学对象和内容中提炼抽象而成的,像公理化思想,先给出公理和定义,再用演绎的方式引出和证明定理,定理的引入是有序的,在一个定理的证明中,允许采用的论据只有公理和前面已经证明过的定理.

关于指导性. 在我们解决问题时,总是在寻求某种思想与方法,得到方向和途径. 比如实际应用问题,我们设法变成数学模型,用数学方法解决,再返回到实际中. 再如原来的理论无法解决问题时,试图寻找新的思想方法,像计算机的诞生. 数学思想方法的指导性,正如希尔伯特在《公理化思想》中所说:“我们能够获得科学思维的更深入的洞察力,并弄清楚我们的知识的统一性,特别是,得力于公理化思想,数学似乎就被请来在一切学问中起领导的作用”.

关于应用的广泛性. 这是不言而喻,无可怀疑的. 数学思想方法不但能应用于各门自然科学,而且可以应用于社会科学;不但应用于工程技术,农业生产,而且可以应用于经济和社会的各个领域,尤其是计算机信息技术,正像华罗庚所说:“宇宙之大、粒子之微、火箭之速、化工之巧、地球之变、生物之迷、日用之繁、无处不用数学”,因而无处不用数学思想方法.

四、数学思想方法的作用

数学思想方法有广泛的应用,在人们的各种认识和实践活动

智慧的阶梯

中都能发挥作用,表现出多重功能.概括地说,数学思想方法是思维的工具,计算机产生与发展的基础,解决问题的最有效的方法.

1. 数学思想方法是思维的工具.

诺贝尔物理学奖获得者麦克斯·冯·劳厄把数学称为“思想工具”,而数学思想方法反映数学的本质是核心,所以其思想的力量是数学思想方法提供的,表现在以下三个方面:

第一、数学思想方法具有一种抽象思维的能力.数学是研究思想事物的抽象的科学.数学思想方法的对象已是一种抽象的思维创造物.数学家正是在这个抽象的王国中搜寻着、思索着,不断地发现在一种数学结构内部或在不同数学结构之间所固有的关系或规律,当人们把这种成果运用于实际问题时,之所以成功,正是因为数学内容实质上是现实世界的规律性的反映和摹写.运用数学思想方法,对所要研究的问题建立数学模型,必须发挥其所独具的抽象思维能力,即善于把无关紧要的东西先撇在一边,抓住最主要的因素、关系,进行深入地分析和综合,经过合理的简化,把问题用数学语言表述出来.在这样抽象出来的数学模型上展开数学的推导和演算,以形成对问题的判断和预测,这是数学用抽象思维去把握现实的力量所在.

第二、数学思想方法是数学思维的基本方法.数学思维就是以数学问题为载体,通过发现问题、解决问题的形式,达到对现实世界的空间形式和数量关系的本质的一般性的认识的思维过程.数学思想方法对数学思维活动起决定性影响,它是数学思维的动力,并为思维指明了方向.解决问题成为思维的目的.数学思维过程就是不断地提出问题、解决问题的过程,由于解决问题的过程最后总可以归结为应用思想方法的过程,因此,可以认为数学思维过程就是使用思想方法提出和解决问题的过程.

第三、数学思想方法:辩证的辅助工具和表现方式.在数学中到处都充满着矛盾,充满着各种对立面的转化,如果说各门科学都

包含着丰富的辩证思想,那么,数学则有自己特殊的表现方式,即用数学的符号语言,甚至是用简明的数学公式表达出各种对立面的转化,例如有限与无限,近似和精确的辩证关系.要真正掌握好数学思想方法工具,只是知道许多数学知识是不够的,必须善于发现各种概念之间,各种运算之间,以及各个分支之间的关系,并且善于建立和运用它们之间的各种转化,这样才能发挥出蕴藏在数学思想方法中的辩证思维的力量.数学思想方法之所以强有力,无论是计算方法之灵巧,还是推理论证之美妙,常常在于有意识地利用或创造了各种转化.正象恩格斯说的:从一种形式到另一种相反的形式转变,是数学科学的最有力的杠杆之一.

马克思把数学看作建立辩证唯物主义的重要基础之一.数学思想方法的发展,积累了如此多的成果,不但为人类精神文明的宝库增添了财富,而且更加成为丰富和发展唯物辩证法的重要源泉了.

2. 数学思想方法是计算机产生与发展的基础.

计算机即信息技术是数学对现代文明的最大的贡献,也使数学本身的计算和推理进入一个崭新的时代.计算机帮助人们获得快速而准确的计算能力,许多新技术正是攻克了计算难关而“起飞”的,在计算机上进行数学证明,使数学推理机械化,可以帮助人们节约思维劳动.人脑加上电脑,实现人工智能,极大地增强了人的思维能力.

数学家使用数学思想创造了计算机,并且数学思想发展了计算机,成了当今最为重要的信息技术,给人类带来了极大的方便和财富.

§ 1.2 数学思想方法的学习过程

数学思想方法学习的意义在于,促成对正确方法的盲目地、不

自觉地模仿应用向有意识地、自觉地应用转化。而要达到这种状态，必须通过学习者自身的不断体会、挖掘、领悟、深化才能实现。

一、掌握数学思想方法的过程

1. 数学思想方法学习的模仿阶段

数学教学内容始终反映着数学基础知识和数学思想方法这两方面。数学教材的每一章乃至每一道题，都体现着这两者的有机结合。这是因为没有脱离数学知识的数学思想方法，也没有不包含数学思想方法的数学知识。而在数学课上，由于能力、心理发展的限制，学生往往只注意了数学知识的学习，而忽视了联结这些知识的观点，以及由此产生的解决问题的方法与策略。即使有所觉察，也是处于“朦朦胧胧”，“似有所悟”的境界。如学生学习用换元法解分式方程。对换元法的理解是按老师要求：设未知数，换元，解换元后的方程等解题步骤。学生把换元法当作解题步骤来记忆，而未能体会出换元思想是数学中常用的思想方法。这时，题目上要求用换元法，学生就可以正确做出，但题目上没有要求用换元法时，学生会有困难。

2. 数学思想方法学习的领悟阶段

在学生接触过较多的数学问题后，数学思想方法的学习逐渐过渡到领悟阶段。即学生对数学思想方法的认识已经明朗，开始理解解题过程中所使用的探索方法和策略，也会概括总结出来。如换元法解分式方程，由题目注明要求用换元法解分式方程，到题目没有注明换元法时，学生主动地用换元法解。说明学生对数学思想的认识已经领悟。

3. 数学思想方法学习的应用阶段

学生对数学思想方法有深入的理解与应用。即学生能依据题意，恰当运用某种思想方法进行探索，以求得问题的解决。这一阶段，即是进一步学习数学思想方法的阶段，也是实际运用数学思想

第一章 略论数学思想方法

方法的阶段。再如上例,无理方程在分式方程之后,学习无理方程时,若学生能不需教师讲解,主动根据方程特点运用换元法解无理方程,这说明学生已掌握了换元法,并能自觉用它探索解决新问题。如果学生在其它情况下,不仅在解方程时,也能适时地应用换元法解题,说明他对换元思想的理解已经比较深入了。这时,学习者在应用数学思想方法上已经没有了模仿的痕迹,而是主动,自觉地根据题目特点,运用数学思想方法解决探索性的数学问题。

学生的这三个学习阶段,界限不是象楼梯一样分明,但它们不可逾越,替代,颠倒顺序。由于个体的差异性,这三个阶段的时间于学生的不同而不同,教学的任务是促进前两个阶段的形成,尽快达到第三个阶段。

学生数学思想方法的学习过程,决定了数学思想方法的教学,不可能一步到位,也有一个相应的循序渐进,由浅入深的过程。因此,提出了数学思想方法的目标设置。

二、数学思想方法的分层教学目标

这是指在某个教学阶段后,学生在数学思想方法方面达到的学习成果或发展水平。这里从教学领域和认知领域两方面分别设置目标。

数学思想方法分层教学目标

	教学领域			认知领域
	教学方法	学习目标	教学目标	教学目标
初期	蕴涵	感受	渗透孕育	识记了解
中期	揭示	领悟	领悟形成	理解领会
后期	激活	发展	应用发展	掌握应用

为实现教学目标,使学生在认知的过程中,逐渐达到认识的飞跃.教师在教学中即要发挥自身的创造力又要遵循数学思想方法本身特有的教学规律.

§ 1.3 数学思想方法的教学原则

数学思想方法的教学原理是说明数学思想方法的教学规律的.

一、渗透性原则

中学数学的课程内容是由具体的数学知识与数学思想方法组成的有机整体,现行数学教材的编排一般是沿知识的纵方向展开的.大量的数学思想方法只是蕴涵在数学知识的体系之中,并没有明确的揭示和总结.这样就产生了如何处理数学思想方法教学的问题.一般认为,加强数学思想方法的教学,应当遵循渗透性原则.即在具体知识的教学中,通过精心设计的学習情境与教学过程,着意引导学生领会蕴涵在其中的数学思想和方法,使他们在潜移默化中达到理解和掌握.这是因为,首先,虽然数学思想方法与具体的数学知识是一个有机整体,它们相互关联,相互依存,协同发展.但是具体数学知识的教学并不能替代数学思想方法的教学.一般来说,数学思想方法的教学总是以具体数学知识为载体,在知识的教学过程中实现的.其次,数学思想方法是具体数学知识的本质与内在联系的反映,具有高度的抽象性与概括性.数学方法尚具有某种外在形式或模式,那么作为一类数学方法的概括的数学思想,却只表现为一种意识或观念.很难找到外在的固定形式.因此,数学思想方法的形成绝不是一朝一夕可以实现的,必须日积月累,长期渗透才能逐渐为学生所掌握.

如“用公式法求一元二次方程的根”这一节课.《初中教材》将直接开平方法,配方法,放在公式法的前面,不作单独的一节.这