壳体結构文汇

第 二 册

壳体結构文汇編輯組

中国工业出版社

目 录

苏联四十年壳体及其他薄壁空間結构的計算*

（1917~1957）**

О．Л．阿涅什維利

現代技术要求創造强度高、重量小和空間剛度大的結构。因此薄壁空間結构計算理論目前具有很大的現实意义。

这个理論的具体任务就是直接回答工程界各部門提出的問題。俄罗斯学者对其发展作了可貴的貢献。还在革命前就有И．Г．布波諾夫、Б．Г．加辽尔金、Л．С．列宾松、С．П．鉄木森柯等的基本著作，其中提出了新的問題，并拟定了解算这些問題的先进的新方法。在解算彈性平板理論的边界問題时，И．Г．布波諾夫和Б．Г．加辽尔金提出了解算数学物理問題的有成效的变分法，該法以策略性和簡洁性著称。

在苏維埃政权的年代里，由于技术的高速发展，薄壁空間結构計算理論方面的研究工作具有很大的規模，而目前苏联壳体理論的水平在世界科学界居于先进地位。我国科学在这个領域里朝着不同的方向发展；同时，在研究每一問題时，往往又有两个基本方向：即数学方面的和实用方面的。

下面我們把在苏維埃政权年代完成的壳体和其他空間結构計算的研究概况作簡短介紹。这些工作按照相应的領域或課題进行了分类。

广大研究者感兴趣的著作很多，而本文由于篇幅有限又不能詳尽提及，因此在文章后面附了大批文献目录，以供讀者参考。

1． 壳体的一般理論

在建立壳体理論基本微分方程和随后对它的定性分析方面，壳体数学理論得到了发展。同时，勒夫的古典理論在某些方面因利用曲面理論的近代方法而得到了补充。

借助某种省略，将彈性理論三維問題轉化为二維問題，在这方面进行了探討，这种省略是对壳体方程积分方法的精确程度进行評断的依据，这个理論的精确程度应与其方程的精确程度相一致。上述問題在А．Л．戈里金維塞尔〔159，166〕和А．И．魯利叶〔274，275〕的著作中得到了发展。

直到目前为止，壳体理論在关于基本假設的誤差缺乏精确估計这一矛盾方面仍然是一个弱点。此外，克希霍夫—勒夫关于法綫綫素的綫形和剛性的假設使壳体理論具有相当复杂的表达式，应当略去微小項使之簡化。在保留或去掉某些微小項方面，存在着一定的任意性，其影响如何尙未加以研究。

* 在編写本文第一、二两节时，作者从“苏联力学三十年”（391）文集中选用了Ю．Н．拉包特諾夫的某些提法。

** 标題的头尾“苏联四十年”及“（1917~1957）”是編者加的。

为了估計克希霍夫—勒夫假設的精确度，曾作了多次探討，以便在彈性理論方程的基础上，不作有关变形特征的簡化假定，而建立起壳体理論。

Л．С．列宾松〔267〕得到了估計球壳稳定性的首創公式，他把这个問题按照数学彈性理論問題进行了解算。Б．Г．加辽尔金〔128，129〕用彈性理論的一般方法解决了关于筒壳应力状态的复杂問題。

А．И．魯利叶〔274，275〕、В．В．諾瓦日洛夫和Р．О．芬凱里史欽〔348〕不用克希霍夫—勒夫假設，建立了壳体理論的方程系。分析結果表明，引用关于法綫綫素的假設，所导致的誤差与1相比約为$\frac{\delta}{R}$；因此在按这个假定建立的方程中保存相应的微小項目就沒有意义了。同样，企图对这些方程求得精确解答也是沒有价值的。

И．Н．文庫〔85〕所討論的壳体为一彈性体，其上边和下边为給定曲面，而側面則为具有竪向母綫的柱形面，假定壳体上下表面上的应力为已知，而在側表面則可給定应力分量或位移分量，也可能是各种混合条件。

上述彈性体約定称为棱柱形壳体。采用克希霍夫—勒夫假設来計算这种壳体时，在推导基本方程的过程中，需要在方程中略去一些由于某种假設而認为很小的項目。但是，相似的想法不能保証所选的簡化假定也相同。

此外，用克希霍夫—勒夫假設建立的微分方程，与实际边界条件是不相符的。在壳体理論中，根据克希霍夫—勒夫假設，在边界只給出四个条件，而不是五个普通条件。在著作〔85〕中，发展了不用克希霍夫—勒夫假設的上述形式壳体的近似計算方法。与普通壳体理論相比較，并无显著差異。И．Н．文庫提出的方程方案与以克希霍夫—勒夫几何假設为基础的壳体理論很接近，但不完全符合。这可与彈性平面問題相对照，其中有两个方程方案，其一，对应于平面变形状态；其二，对应于广义平面应力状态。

壳体理論实質上有两种方案，其一，采用几何假設（克希霍夫—勒夫），与平面变形状态类似；其二，采用物理假設（平行于中間面的面上沒有应力），与广义平面应力状态类似。

对壳体一般理論有較大貢献的要算А．Л．戈里金維塞尔的著作〔153，156〕，它对勒夫方程补充了变形分量和曲率变化参数間的协調条件，他还〔160〕发現了与应力函数相似的四个函数，通过它們可以表示內力和力矩，而平衡方程也自然滿足。

В．В．諾瓦日洛夫的著作〔351～354〕表明壳体理論方程可表成复数形式，使方程变成紧凑和一目了然，并开拓了求解方程的新途徑。

从普遍性的观点看来，Н．А．启里切夫斯基的著作〔232～234〕是有意义的。他研究了将三維問題化为二維問題的一般方法。他提出了多种壳体理論方案，从而普通的理論可以看作为它的特殊情形。

关于彈性理論的一般原理对壳体的适用性問題也曾討論过。А．Л．戈里金維塞尔的著作〔157〕研究了这个問題。

А．И．魯利叶〔275〕借助張量符号建立了在任意坐标情况下严整的壳体理論方程系；并引用与应力函数相似的函数，指出了求方程积分的途徑。В．З．符拉索夫〔111〕由于考虑了壳体沿厚度的变形，因而将薄壳理論方程推广到較厚的壳体。

关于壳体弯曲理論的軸对称問題的著作值得特别提出。在这个領域里，И．Я．施塔耶尔曼的貢献很大。他研究了旋轉壳体〔496〕，同时提出了平衡方程的漸近积分方法，作了力学上的解釋。

П．Л．巴斯捷尔納克拟定了旋轉壳的实用計算法，討論了薄壁圓池对称受載的情形。

对于任意形式的旋轉壳体，一般解可近似地用无弯矩方程和"边界效应"方程的解的总和来求得。对应于边界效应的解，离壳体边緣較远处很快会消失。在А．Л．戈里金維塞尔〔158，166〕、Ю．Н．拉包特諾夫〔387〕和Х．М．慕施塔利〔320〕的著作中闡明了这个問題。在上述著作中給出了可能将迅速衰減的部分分离出来的条件。

当对旋轉壳体的对称变形方程求积时，正如В．В．諾瓦日洛夫〔354〕所指出过的那样，漸近方法可与精确解法同等使用，因求积时的誤差与建立方程时允許的誤差将是同級的。

在В．З．符拉索夫的巨著〔111〕中可以找到壳体理論軸对称問題的一系列有成效的解答。

Л．И．巴拉布赫〔52〕完成了錐形壳体的一般研究。В．В．諾瓦日洛夫〔354〕研究了悬練壳体的計算。В．В．諾瓦日洛夫〔354〕、М．И．埃斯特灵〔511〕和С．А．吐馬尔金〔444〕研究了环形壳体的計算。

2. 壳体的无弯矩理論

В．Э．諾瓦德沃尔斯基〔341〕关于无弯矩穹頂和拱壳的著作是我国壳体文献中第一批著作。

这个在1932年出版的有趣的著作，除一般熟悉的材料外，概括了В．Э．諾瓦德沃尔斯基所进行的在文献中首次出現的一系列研究成果，其中包括：风应力計算的新图解法，在內部压力作用下确定壳体等强度形式的方法，交叉拱壳的計算等等。甚至对于某些迪辛盖尔曾經研究过和出版过的問題，例如歪形法的采用和封閉拱壳的計算，В．Э．諾瓦德沃尔斯基〔341〕在多数情况下按照自己的观点坚持了不同的証明。

对于壳体的一般无弯矩理論，В．В．索可洛夫斯基〔418〕的研究具有头等意义。他将无弯矩理論方程化为典型形式并指出其与曲率符号有关的特性。他还得出了二次曲面的解。В．В．索可洛夫斯基曾指出：用分离变量法由旋轉壳体一般平衡方程所得到的常微分方程，在三种情况下可化为超越几何方程，他得出了关于三类壳体的相应的解。

В．В．索可洛夫斯基所得到的結果在以后的壳体无弯矩理論研究中常被采用。

同样，Ю．Н．拉包特諾夫的研究〔388〕对于一般无弯矩理論問題也是有巨大意义的。它沟通了无弯矩理論問題和曲面弯曲問題；使得求无弯矩壳体的內力和位移的問題归結为两个独立的偏微分方程。Ю．Н．拉包特諾夫指出，假如取曲面的等溫共軛綫系統作坐标網格，这种壳体的平衡方程即化为与柯希—里曼方程类似的方程。

В．З．符拉索夫〔94〕、В．В．索可洛夫斯基〔417〕和其他作者研究了任意受載的旋轉壳。关于中曲面为二次曲面的壳体的无弯矩理論，В．З．符拉索夫〔108〕曾运

用复变函数理論进行了研究。

对于球壳，А．Л．戈里金維塞尔、А．К．慕罗辛斯基和Ю．В．里普曼的著作〔155〕提出了类似的意見。对于經綫为各阶双曲綫和抛物綫的旋轉壳体，В．З．符拉索夫采用分离变量法得到过解。他还指出了无弯矩理論的应用范圍。正高斯曲率的壳体当边界的支承使中面无法弯曲时卽屬于此范圍。

对于无弯矩理論問題，А．Л．戈里金維塞尔的著作〔166〕中相当大的一部分專門研究了相应平衡方程的积分和考虑边界条件时无弯矩壳体的計算等問題。

А．Р．热查尼采研究了承受任意荷載的小曲率无弯矩旋轉薄壳，以及任意外形的无弯矩扁壳〔398，400〕。Н．С．恰烏索夫采用了В．З．符拉索夫理論来計算无弯矩橢圓穹頂〔473，474〕。

3. 球　壳

球壳是壳体形式中研究得最多的一种。В．В．索可洛夫斯基〔415〕、Ю．В．里普曼〔397〕、А．Л．戈里金維塞尔〔157〕和В．В．諾瓦日洛瓦〔343〕解决了承受任意荷載的这种壳体的計算問題。

Ю．В．里普曼〔397〕把非对称受載的球壳計算問題归結为一个四阶方程和两个波松方程。

А．Л．戈里金維塞尔〔158〕提出了首創性的解，他将球壳应力状态表为弯矩、无弯矩和边界效应三种应力状态的总和。

И．Н．文庫把解橢圓方程的方法应用于球形薄壳理論，他提出了〔78，81〕球形薄壳平衡方程的积分方法。所得的公式将內力、力矩和位移由四个任意解析函数清楚地表示出来，并取周边固定的球壳边界問題作为一个例子加以闡明。

И．Я．施塔耶尔曼〔496〕研究了球壳軸对称問題。他首先提出了旋轉壳方程的漸近积分法〔496～498〕。这个方法后来在А．Л．戈里金維塞尔的著作中得到了重大发展。在其專著〔166〕中用了很大的篇幅来討論一般偏微分方程和壳体方程的漸近积分問題。

И．Я．施塔耶尔曼还給出了非常巧妙而应用簡便的比拟方法，卽关于穹頂和彈性地基上拱之間的比拟方法〔502〕。

В．З．符拉索夫在其著作〔111〕中給出了球形薄壳方程的新形式，利用这些方程，В．Г．列卡契在其博士論文〔396〕中給出了这些方程的积分方法，因而对与列讓德函数有关的方程研究了求解的計算法。他还将論文中的解法和漸近积分方法作了比較。

4. 筒壳、褶結构和薄壁棱形結构

由于工程实踐中的广泛采用，关于筒壳的計算有着大量的著作。常用的筒壳有管道、拱壳屋盖和其他薄壁結构，柱形格板在造船及航空中得到应用。

有关筒壳計算理論的著作可分为三类；第一类是以勒夫壳体理論为基础的著作，第二类是以运用彈性理論一般方法为基础的著作，第三类是在簡化假定下以筒壳实用計算为目的的著作。

第一类包括С．П．鉄木森柯、И．Г．布波諾夫和П．Ф．帕普可維奇的著作。

屬于第二类的有Б．Г．加辽尔金〔128，129〕和Л．С．列宾松〔267〕的著作。Б．Г．加辽尔金在其著作中将筒壳按彈性理論空間問題来考虑，并将应力表成壳体厚度上任意点的三个坐标的函数；根据Б．Г．加辽尔金方法，除可对薄壳近似計算方法进行核算外，还可研究中等厚度筒壳的应力状态。

Л．С．列宾松〔267〕給出了关于在內外均匀压力下无限長圓柱形管的稳定問題的解。

由于壳体用来作大跨屋盖的結构型式，第三类著作得到了巨大的发展。柱形拱壳的計算在很大程度上由于边界条件而复杂化了。

由于弯曲值很大，无弯矩理論在筒壳計算中已不适用；此外，壳体和側边构件間的彈性联接条件对壳体的使用性能来講是很重要的，而无弯矩計算方法却不可能滿足这种联接条件。鉴于无弯矩理論的这种缺陷，А．А．格握滋捷也夫于1930年在坌苏結构研究院提出了按照勒夫弯曲理論来計算薄壁拱壳的任务。就沿母綫为單跨的圓壳来講，А．Л．戈里金維塞尔〔141，142，153〕解决了这个問題。微分方程的解沿母綫方向展成三角級数，而对每一个展开項沿圓环方向表成閉合形式。

В．З．符拉索夫在中央工业建筑研究所根据彈性理論方法和結构力学方法的綜合运用〔88，89〕解决了关于滿足壳体和側边构件或与相邻跨度壳体的彈性联接条件的問題。

以对弯矩理論微分方程求积为基础的拱壳計算，不仅在实用上是繁杂的，而且也仅适用于圓壳。这些缺点为В．З．符拉索夫于1932年所建議的〔88，89，92，112〕半无弯矩方法所消除。这个方法也称作替代褶壳法。根据这个方法壳体被看作为一种薄壁連續空間体系，它由无限多个横向弯曲的剛架元素所組成，而沿縱向則具有无弯矩构造。

替代褶壳法基于下面两个假設。

第一个假設是靜力方面的；根据这个假設，我們忽略縱向弯矩和扭矩，因为他們很小。因此对于那些作用在壳体截面上，而平行于壳体中面的法向应力和切向应力，我們也忽略了它們沿壳体厚度分布的不均匀性。

第二个假設是几何方面的；它假定中間棱形面的变形系来自两个方面，即由于这个曲面只在縱方向受拉，和由于組成此曲面的矩形板条受弯及受扭。

关于忽略剪切变形的假定，主要适用于沿母綫方向有足够長度的棱形壳体。

內力状态和变形状态，在沿棱壳母綫方向可用滿足壳端支承条件的梁函数来表示。采用这种力学模型可将問題化为求解关于广义內力因素（即縱向应力和横向弯矩）的具有对称构造的八項代数綫性方程。

考虑横向弯矩的棱形褶壳的計算問題，П.Л.巴斯捷尔納克〔375，376〕也曾研究过。

在В．З．符拉索夫計算筒壳的替代褶壳法和其它方法的基础上进行了大量的研究工作。現指出其中最重要的成果如下：

С．И．斯間勒瑪赫提出了金屬褶板的計算方法〔428〕。Н．Д．列維斯卡婭研究了支承在中間柱上并用击杆加强的筒壳〔265，266〕。Б．С．瓦西里克夫拟定了筒壳某些新的結构型式的計算方法，并研究了筒壳的预应力問題〔72～76〕。

应当特别指出И．Е．米廉柯夫斯基等的很有价值的著作〔300～303〕，它們討論了关于筒壳屋盖計算的某些实际問題，关于用位移法計算拱壳，以及将函数按微分方程組的特征解进行分解等問題。

Х．Х．拉勒〔257～260〕研究了从实用观点看来很有趣的筒壳計算問題。这些工作的主要特点是企图对計算方法作巨大的簡化。Г．С．薩赫拉瑪諾夫〔488〕提出了褶壳的表格計算法。

В．З．符拉索夫还拟制了計算筒壳較精确的方法，这个方法考虑了縱向和横向的弯矩和拉伸变形〔92，112〕。

В．З．符拉索夫提出了将板壳理論中复杂二維接触問題化为一維問題的一般变分法〔101，112〕。这个方法曾用来拟定某些棱壳的計算理論，其中包括由一定数目狹窄矩形板所組成的而其横截面具有一定数目閉合圈的棱壳，以及横断面为任意框架形式的棱壳。

В．З．符拉索夫所建議的方法，是建立在可能位移原理上的。与两个变数有关的未知函数可表成两个函数的乘积，其中一个函数指定与一个变数相关，而另一个函数則是未知的，它与另一个变数相关。未知函数系由常微分方程的解来决定。

近来变分法曾应用于箱型結构，И．Ф．敖布拉佐夫在其博士論文中討論了机翼式箱型結构的强度計算〔357〕。在其著作里介紹了考虑断面扭凸因素的計算方法。用这个方法所得到的結果曾为实驗所証实。

应用替代褶壳法計算筒壳时曾作了沒有剪切变形的假定。对这个假定，1948年Ａ．Ａ．德查布阿〔187〕运用В．З．符拉索夫的变分法进行了評价。

具有不变形横向輪廓的带肋筒壳，可用В．З．符拉索夫薄壁杆件理論来計算，即在計算中顧及了平面横断面的扭凸。

В．З．符拉索夫关于筒壳和棱壳的研究給結构力学开辟了新的領域〔92，103，112〕。

5. 扁　壳

1944年В．З．符拉索夫創立了扁壳的弯矩理論，方程式表成非常緊凑和易于了解的形式。这个理論使有可能解决薄壁空間結构建筑力学中一系列新的重要实际問題〔99，100，103，111〕。

扁壳方程是对两个未知函数来写出的；其中一个是应力函数，通过它可确定无弯矩力組，另一个是撓度函数，通过它可确定弯矩力組〔3〕。在这組方程中，第一个是几何方程，它表明变形連續条件，第二个是靜力方程。

在В．З．符拉索夫理論中消去了克希霍夫—勒夫理論原有的与貝蒂交互原理不适应的缺点，这可从弯矩理論基本微分方程的构造上得到証实。每边的边緣条件应按上述应力函数和撓度函数加以表述。对于很扁的壳，为了簡化計算，第一个高斯二次型的系数可取等于一。

扁壳理論对扁平屋盖实用計算法的发展有重大的意义。在这个理論的基础上完成許多理論的和实用的研究。

首先应指出A．И．魯利叶的著作〔277〕，他应用扁壳理論方程来討論受内压的圓管在小孔附近的应力集中問題。

Т．Т．哈卡杜良〔464〕采用了В．З．符拉索夫理論来計算扁柱壳，将平板的解从中分离出来作为基本部分，幷将曲率修正項表成迅速收斂的級数形式。

А．Г．那扎洛夫〔334〕提出采用脉冲函数来計算中間面具有折角的扁壳，特别是尖頂拱壳和幕型屋盖的計算。根据А．Г．那扎洛夫的意見，折角可解釋为相应的曲率冲量。我們在主曲率的表示式中引入沿接触綫分布的單位脉冲函数，幷乘以折角值，这样，复杂接触問題的求解就得到了簡化。

И．Н．文庫〔81〕将扁壳方程化为复杂区域的瓦利特积分方程。这个方程他建議用逐次漸近法来解。他以球壳和筒壳为例进行了討論。

关于扁壳弯矩理論綫性方程的求解問題采用三角級数法的有С．А．阿墨巴勒初墨揚〔28，29〕、А．С．卡勒門諾克〔226〕、А．А．那扎洛夫〔332，333〕、Т．Т．哈卡杜良〔464〕；采用变分法的有О．Д．阿涅什維利〔368〕、Е．И．西利金〔411〕（用于橢圓扁壳和鋸齿形屋盖計算）。В．Н．薩依西面拉斯維里采用定差法和直条法来解扁壳方程，在著作〔480～485〕中他研究了不同荷載和不同边界条件下某些外形的扁壳。

И．Е．米廉柯夫斯基和Б．С．瓦西里克夫〔301〕給出了凸形扁壳的屋盖和楼盖的計算法。

6. 壳体非綫性理論

在壳体非綫性理論中Х．М．穆斯塔里的著作〔310～320〕具有头等意义。他在1935～1938年研究了任意外形的柔性彈性壳的一般情形。

与勒夫不同，Х．М．穆斯塔里得出了在位移与壳体厚度为同級大小的条件下中間面变形和轉角的表达式。对壳体体素的平衡方程进行分析之后，Х．М．穆斯塔里对各項的量級作了估計幷找出了簡化的可能性。給出了在有限位移下壳体势能的表达式。在圓筒壳的情况下，Х．М．穆斯塔里指出問題可化为八阶綫性偏微分方程的求积問題。

1948年В．В．諾瓦日洛夫〔354〕在非綫性彈性理論一般方程的基础上研究了柔性壳体。

Х．М．穆斯塔里、Н．А．阿魯米亞埃和К．З．格里莫夫〔11，134，318，320〕应用張量符号，获得柔性壳在任意坐标內的平衡微分方程系。根据定性分析的結果，他們說明了在怎样的弯曲变形下应当采用那一种方程系。

为了判断变形的微小程度，取材料在比例极限时的延伸值作为对比量。近年来我国学者在采用变分原理于非綫性壳体理論和制定非綫性方程系的其他积分法等方面进行了研究；順便指出，关于用变分法解非綫性問題，在Н．А．阿魯米亞埃的著作〔13，15〕中有了发展。

驗算壳体的稳定性是很重要的問題，因为即使在很小的厚度下，壳体还拥有較大的承載能力，因此稳定性的不足，将成为計算中的决定因素。特别需要校核金屬壳（壳格板）的稳定性，因为此处往往由于形成跳跃現象而丧失稳定。

有巨大价值的著作可以举出И．Я．斯大耶瑪的著作〔500，502～504〕、П．А．索

柯洛夫的著作〔414〕（研究具有剛性肋的筒壳）、Б．В．布勒加高夫的著作〔63〕（研究圓形横截面的几何偏差对临界压力值的影响）、Н．В．茲瓦林斯基的著作〔206，207〕（按照里茲法解稳定問題，同时其解用积分方法作了論証）。

Ю．Н．拉保德諾夫〔390〕提出了描述壳体局部丧失稳定的近似方程，并用它来研究对称承載的旋轉壳丧失稳定时的不对称形式。金屬薄格板壳常用于飞机和造船业，因此壳体稳定問題的发展是和这些技术部門的发展紧密相联的。当对飞机和造船业中所用壳体进行試驗研究时，临界应力的理論值和实驗值有很大的差別，同时临界应力比按綫性理論公式求得的理論值要小得多。这种情况在这个領域里的研究工作者中引起了很大的兴趣。在1941年О．А．顧德林〔252〕研究了柔性柱形格板的稳定并得出結論：临界应力比計算值低是由于初弯曲的影响所造成的。

1944年А．С．沃里米勒〔119〕建議柱形格板在丧失稳定后的撓度，可采用如下的表达式：

$$w=f_1\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}+f_2\sin^2\frac{m\pi x}{a}\sin^2\frac{n\pi y}{b}。$$

有很大价值的是Х．М．穆斯塔里的著作〔310，314〕，它研究了超过临界值后柱形格板的变形。在Х．М．穆斯塔里和他的学生們的大量研究工作中还討論了不同外形的柔性壳，特别是球壳和錐壳〔313，321，325〕。

Х．М．穆斯塔里和Р．Г．苏尔金发展了自己早先对于球壳的研究〔321〕。采用李茲法他們确定了球壳的下临界应力和«等能量»应力。Р．Г．苏尔金还采用布波諾夫—加辽尔金法进行了研究。

М．С．哥尔尼欣和Х．М．穆斯塔里詳細地研究了关于長柱形格板的变形問題〔246〕。关于彈性壳体非綫性理論的一般理論和个别問題的研究，在Х．М．穆斯塔里和К．З．加里莫夫的巨著〔329〕中作了闡述。

А．С．沃里米勒〔120〕研究了鉸支扁柱形格板沿母綫受压和受剪时超过临界值后的变形。在另一著作〔122〕里他說明了弯曲对格板稳定的影响，叙述了具有各种曲率的格板的精細試驗結果。А．С．沃里米勒的大量理論和試驗研究工作在其卓越的專著〔123〕中有了全面的闡述。其中介紹了柔性壳的一般知識，在横向荷載下扁壳的大撓度問題，以及筒壳和球壳的稳定問題和超过临界值后的变形問題。它还給出了关于柔性板和柔性壳的发展的第一批有趣資料。在这方面还应当提及以下的著作：Т．В．湟夫斯卡婭〔338〕討論了扁柱形格板在剪力作用下以及在縱向力和剪力共同作用下横向荷載对其稳定性的影响問題；О．Н．林柯〔268〕討論了各向異性柱形格板当受压及受剪时的稳定問題；О．И．捷連布斯柯〔431〕討論了具有彈性縱梁的受压格板在超过临界值后的变形問題；В．М．切巴諾夫〔475，476〕討論了壳体紙模型的試驗問題。

关于各向異性圓管在縱向力和外压力共同作用下的临界荷載，С．В．亞力克山大罗夫斯基〔6〕进行了理論計算。

关于超临界阶段壳体非綫性平衡微分方程的求解問題，С．А．阿列克塞夫在其博士論文〔9〕中建議采用迭代法：先按綫性理論求得問題的解答，然后将此时壳体丧失稳定时的形式作为迭代法的起点。

在B．З．符拉索夫的巨著〔111〕中，他給出了柔性扁壳非綫性微分方程系。这个方程对下述情形，即当壳体只在所研究的那一部分范圍內才可看作是扁壳的情况下也将是正确的；在推导中曾假定：伸長和剪切変形中还含有只因撓度而产生的非綫性項，即

$$\varepsilon_1=\frac{\partial u}{\partial \alpha}+k_1 w+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial \alpha}\right)^2,$$

$$\varepsilon_2=\frac{\partial v}{\partial \beta}+k_2 w+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial \beta}\right)^2,$$

$$\omega=\frac{\partial u}{\partial \beta}+\frac{\partial v}{\partial \alpha}+\frac{\partial w}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial w}{\partial \beta},$$

式中：　α，β——沿中面主曲率的坐标綫；

u，v，w——位移矢量的分量；

ε_1，ε_2，ω——伸長变形和剪切变形。

非綫性方程具有下列的形式

$$\frac{1}{E\delta}\nabla^4\varphi-\left(k_2\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}+k_1\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2}\right)+\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2}-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha\partial \beta}\right)^2=0;$$

$$\left(k_2\frac{\partial^2\varphi}{\partial \alpha^2}+k_1\frac{\partial^2\varphi}{\partial \beta^2}\right)+D\nabla^4 w-\frac{\partial^2\varphi}{\partial \beta^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial \alpha\partial \beta}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha\partial \beta}$$

$$-\frac{\partial^2\varphi}{\partial \alpha^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2}-Z=0。$$

此处　∇^2——拉普拉斯算子；

k_1和k_2——主曲率；

φ——广义应力函数。

假使忽略非綫性項，那末就得到扁壳弯曲理論的基本微分方程。B．З．符拉索夫〔111〕提出上述方程的积分方法将未知函数表成：

$$\varphi=AU(\alpha)V(\beta);\qquad w=BX(\alpha)Y(\beta);$$

幷对上述非綫性方程組应用布波諾夫—加辽尔金方法。关于函数U、V、X、Y，建議选用梁的横向振动函数。

苏联作者在这个方法的基础上提出了有关扁壳大撓度問題一系列的研究工作，其中包括M．A．高勒杜諾夫的著作〔240，241，242〕，他討論了柔性扁壳的弯曲和稳定問題，以及O．Д．阿涅什維利的著作〔366，368〕，他討論了大撓度情形下平衡状态附近的靜力和振动問題。

7．壳体的动力計算

对于在建筑結构、飞机和机器的构件中所采用的承受动力作用的薄壁壳体来講，壳体动力計算是极重要的。

A．П．菲里包夫給出了边緣固定的筒壳振动頻率的計算方法〔459〕。壳体振动的一些特殊問題在M．Г．烏拉兹巴也夫〔448〕和Ш．X．楊顧拉佐夫〔513〕的著作里作了闡述。

在С．А．捷勒塞諾夫的著作〔435～438〕里，对于慣性力所产生的附加弯矩作了估計，并在某些边界条件下証明了固有值（自然振动頻率）和固有函数的存在問題。

Е．И．敖保拉斯維里的著作〔355〕討論了球壳的振动理論；其中給出了球壳振动方程的复数形式。利用复变数解析函数給出了方程的一般积分；証明了固有值（固有振动頻率）的实数性質。筒壳的振动問題在Т．Т．哈卡杜良的著作〔465〕里作了討論。

В．Е．布連斯拉夫斯基〔58〕研究了閉合圓筒壳的振动。在著作〔58〕中給出了閉合圓筒壳自由振动的理論和試驗的研究結果；討論了各种軸对称振动形式和弯曲振动形式。在討論軸对称振动时，縱向位移和波桑系数取等于零。在弯曲振动的方程中，保留了慣性力的所有三个分量；对于在边緣自由支承的壳得到了自由振动的頻率值。并用很大的注意力討論了結綫数何时为最小的問題。

应当特別指出Э．И．格利哥留克关于在有限撓度下筒壳振动的研究工作〔174〕。

关于褶壳和筒壳的动力計算，有В．З．符拉索夫和Б．М．捷連宁的著作〔102，107〕。

О．Д．阿涅什維利的著作〔361～364，368〕研究了（在В．З．符拉索夫的工作的基础上）壳体理論的某些动力問題，討論了高陡筒壳和不同外形的扁壳：圓柱形的、球形的、双曲的、鋸齿的、尖頂型拱壳和幕型屋盖；給出了在任意支承情况下壳体边緣問題的解；研究了动力稳定和地震耐力問題。理論数据和原型試驗結果进行了对比。

对于扁壳的稳定标准、薄壁管道和高陡筒壳的动力計算，以及在地震作用下薄壁壳型結构的計算等方面給出了計算公式及数值結果。

8. 各向異性壳体

第一个研究各向異性彈性壳体的是И．Я．施塔耶尔曼。他早在1924年就发表了关于各向異性旋轉壳的对称变形的著作〔496〕。

将С．Г．列赫尼茲基关于各向異性板的方法加以推广，С．А．阿墨巴勒初墨楊在1948年研究了各向異性扁壳，其材料在每一点具有一个彈性对称面〔33〕。基本平衡微分方程是建立在克希霍夫—勒夫假設上的。在这个著作中給出了应变应力关系。

在同一作者的著作〔32〕中研究了多层扁壳，其构造是对称于中間面的。假設每一层材料遵守广义虎克定律和每一点仅有一个平行于中間面的彈性对称面，各层沿接触面不許有滑动。对于板束整体，克希霍夫—勒夫假定仍被采用。

在另一著作〔37〕中，С．А．阿墨巴勒初墨楊发表了各向異性多层壳体溫度应力的結果，其中溫度系假定沿壳体厚度按綫性規律变化。各向異性多层旋轉壳他在著作〔34〕中用漸近积分法作了分析。

他还研究了由各向異性薄层組成的筒壳〔35〕，并以三合板壳体作为数字例子进行了討論。計算出来的应力图表明了多层性和各向異性对壳体截面上应力分布的影响。

Э．И．格利哥留克〔170〕研究了軸对称双金屬筒壳的强度和稳定，其中規定关于薄层不可压縮和法綫綫素不变形的假定对于双金屬壳仍然有效。研究了有限長和无限長壳体，举了算例。

Э．И．格利哥留克的著作〔170〕討論了在小位移和彈性变形下双金屬彈性薄壳的一

般理論。壳体外形和荷載是任意的，又温度沿壳体厚度和表面的分布也是任意的。推导了平衡方程和边界条件，以及各层应力公式和势能公式。薄层的接触面（即焊接面）被用来作原始曲面。采用克希霍夫—勒夫假設等于将双金屬壳体的三維物体变形問題化为薄层曲面的变形問題，亦即化为二維問題。假如各材料彈性模数的比值不大于10～15，則克希霍夫—勒夫假定是可用的。在相反的情况下，剪切变形很大，而壳体焊接面的法綫在变形过程中也不能再看作为直綫。这些研究工作Э.И.格利哥留克以后作了进一步发展，并推广于正交異性多层壳体〔176,177〕。他还特别研究了多层壳体在大撓度下的稳定問題。

9. 彈塑性壳体，极限平衡問題

超过彈性极限后板和壳的稳定試驗資料証明A.A.依留辛小彈塑性变形理論具有足够的准确度。用这个理論可解决許多实用上很重要的具体問題〔212～215〕。

依照这个理論在彈塑性状态下，壳体的平衡方程以及位移和变形分量間的几何关系，将保留与在彈性理論中同样的形式。至于变形分量和內力及力矩間的关系，在彈塑性領域中将与彈性状态不同，正如A.A.依留辛〔215〕所指出，其形式如下：

$$T_1=\frac{4}{3}\left[\left(\varepsilon_1+\frac{\varepsilon_2}{2}\right)J_1+\left(\varkappa_1+\frac{\varkappa_2}{2}\right)J_2\right];$$

$$T_2=\frac{4}{3}\left[\left(\varepsilon_2+\frac{\varepsilon_1}{2}\right)J_1+\left(\varkappa_2+\frac{\varkappa_1}{2}\right)J_2\right];$$

$$S_1=-S_2=\frac{1}{3}(\omega J_1+2\tau J_2);$$

$$M_1=-\frac{4}{3}\left[\left(\varepsilon_1+\frac{\varepsilon_2}{2}\right)J_2+\left(\varkappa_1+\frac{\varkappa_2}{2}\right)J_3\right];$$

$$M_2=-\frac{4}{3}\left[\left(\varepsilon_2+\frac{\varepsilon_1}{2}\right)J_2+\left(\varkappa_2+\frac{\varkappa_1}{2}\right)J_3\right];$$

$$H_1=-H_2=\frac{1}{3}(\omega J_2+2\tau J_3),$$

此处

$$J_1=\int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}}\frac{\sigma_i}{e_i}dz,\qquad J_2=\int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}}\frac{\sigma_i}{e_i}zdz,\qquad J_3=\int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}}\frac{\sigma_i}{e_i}z^2dz;$$

其中 σ_i——壳体横截面某一点的应力集度；

e_i——在同一点的变形集度，按照下式計算：

$$e_i=\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{P_\varepsilon+2zP_{\varepsilon\varkappa}+z^2P_\varkappa};$$

$$P_\varepsilon=\varepsilon_1^2+\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_2^2+\frac{1}{4}\omega;$$

$$P_{ex}=\varepsilon_1 x_1+\varepsilon_2 x_2+\frac{1}{2}(\varepsilon_2 x_1+\varepsilon_1 x_2)+\frac{1}{2}\omega\tau;$$

$$P_x=x_1^2+x_1x_2+x_2^2+\tau_2。$$

函数J_1，J_2和J_3按已知关系

$$\sigma_i=\phi(e_i)$$

算出。

关于解彈塑性平衡問題，由A．A．依留辛所制定的很有成效的彈性解法是众所周知的〔215〕。在这个方法里把当材料假設为完全彈性时所得的变形状态作为第一次近似解。这个起始变形状态将根据在平衡方程中考慮某些由位移所表示的項目而得到修正，这些項目在相应变化的边界条件下具有体力的特性。在板和壳方面，彈性解法的收斂性由B.M.巴菲洛夫〔373〕作了証明。他同时还指出这个理論与实际数据很接近。

A.A.依留辛将彈性解法用于筒壳的弯曲問題〔215〕。他指出，当无限長管为分布于某一截面的力逐漸压縮时，压力在受載截面附近将形成有限長度的塑性区域，随后是塑性和彈性状态并存的区域，最后是完全彈性区域*。A.A.依留辛建立了筒壳体系上的軸向力，弯矩和扭矩間的关系，使有可能求出壳体的承載能力。

此外，A.A.依留辛和他的学生們解决了一系列具体問題。大家都知道由A.A.依留辛所建立的超出彈性极限后板和壳的稳定理論；他获得了柱壳的稳定方程，后来又求得了方程的积分。

Ю.Н.拉保德諾夫提出了彈塑性壳体的近似实用理論〔392〕。

И.С.楮勒高夫的博士論文〔470〕討論了彈塑性平衡問題的解。应用上述A.A.依留辛方程和彈性解法，И.С.楮勒高夫研究了无弯矩的零曲率壳体和对称变形的旋轉壳体。其中最有意义的是边界效应区域內的应力和变形。

內力、弯矩和位移的n次近似公式已經求得。在論文〔470〕中有專門一章討論了扁壳的彈塑性平衡問題，它是以B.З.符拉索夫的扁壳彈性理論和A.A.依留辛方程为基础的。此外，И.С.楮勒高夫給出了某些彈塑性問題的数値解答，即：沿边緣有均布力矩作用时圓筒的彈塑性弯曲問題；在均布压力作用下，具有方形底面的鉸支球形扁壳的彈塑性弯曲問題；当壳体的部分表面承受法向分布荷載时具有中等長度的正交異性筒壳的彈塑性变形問題。

M.Ш.米給拉德捷的著作〔296〕討論了各向異性的板和壳的塑性变形問題。

根据霍尔的正交異性体的塑性流理論，M.Ш.米給拉德捷〔297,298〕研究了在A.A.依留辛的含义下的單层和多层正交異性壳的承載能力。

M.Ш.米給拉德捷得到的內力和弯矩間的关系与A.A.依留辛关于各向同性壳体的关系相符。这样就有可能在許多情况下，把关于各向異性壳体承載能力的問題化为已經研究过的关于各向同性壳体相应的問題。

同一作者在著作〔297〕討論了在边緣簡支和边緣固結的情况下正交異性柱形短壳的承載能力問題。

---

* 譯者按，原文为完全塑性区域。

А.Р.热阿尼采按照极限平衡来研究板和壳的承載能力的著作〔401〕是很有价值的。

关于只在端隔板处有支撑的單跨長筒壳問題，Г.Л.卓杰拉瓦〔209〕根据精密进行的試驗得到了解决。

А.М.敖維其金在他的博士論文〔358〕中研究了鋼筋混凝土穹頂的极限平衡問題。

Н.В.阿赫夫列金尼和В.Н.夏依斯面拉斯維里采用А.А.格握滋捷也夫理論来确定具有矩形平面輪廓的鋼筋混凝土扁壳的承載能力；此时鋼筋混凝土周边取作固有元素，而壳体本身的受压区域取作非固有元素〔47〕。Н.В阿赫夫列金尼〔48〕还解决了旋轉扁壳的极限平衡問題。

10. 关于薄壳式結构的若干实际应用

苏联制訂的壳体和其他薄壁空間結构的計算方法，在各个技术部門里得到了应用，其中主要是建筑、航空、造船和机器制造业。

关于采用壳体理論来計算航空設备，Р.Г.洛斯托夫采夫〔404〕和И.Ф.敖布拉佐夫〔356,357〕的著作是很好的例子。

在建筑方面壳体理論用来計算薄壁鋼筋混凝土結构：П.Л.巴斯捷尔納克〔375〕、Б.А.謝布也夫〔489〕关于貯池和其他容器的計算；А.М.德魯赫洛夫〔443〕关于斗仓外壳的研究；В.З.符拉索夫关于輕型棱形坝的研究。

壳体在建筑业中应用的主要場所是大跨屋盖和楼盖。

中央工业研究所从1928年起进行了木拱壳的研究〔186〕。在这个基础上建造了两个木拱壳，其跨度为99.83米，寬度为29.00米，矢高为11.75米。以后，拱壳和穹頂主要用鋼筋混凝土建造。

在苏联第一个薄壁穹頂于1928～1929年在莫斯科的天文館建造。其直徑是28米，壁厚为6厘米。1934年按照П.Л.巴斯捷尔納克設計在諾沃西比尔斯克某剧院观众厅上部造了一个穹頂，其底部直徑为55.5米，矢高为直徑的$^1/_8$，厚度为8厘米。

Ю.Я.施塔耶尔曼〔506,507〕建議采用具有矩形平面輪廓的鋼筋混凝土扁壳作楼盖結构，他称之为凸帆式板。Я.А.高戈比德兹〔151〕建議并成功地应用了磚的和鋼筋混凝土的扁壳，他称之为“Дарбази”，还有М.С.杜保列夫〔445〕的磚拱壳体系等等。

在苏联科学院力学研究所拟制的扁壳理論的基础上，曾經建成了許多有趣的建筑物，应当特别提及的有：在加里宁城建造的橢圓鋸齿型扁壳，其平面尺寸为16×21米，厚度为7厘米；以及在阿夫多夫(列宁格勒)建筑构件联合厂的主要厂房所建造的装配式鋼筋混凝土双曲壳；其平面尺寸为40×40米。矢高为8米，即为跨度的$^1/_5$，由5厘米厚的扇形板装配而成，板边鑲有30厘米高的肋。在外緣及角隅处板厚为8～12厘米，边緣支承在預应力鋼筋混凝土桁架上。每个壳体在零标高处装配好，然后用四个带式起重机靠水压千斤頂安装在設計高程处。

在格魯吉亞苏維埃社会主义共和国科学院建筑研究所参加下建成了下列壳体結构：配筋的輕質混凝土筒壳，其平面最大尺寸为20.6×50.4米，厚度为10厘米，带有一个双层空腹隔板，其扁度是$^1/_5$；厚度为8厘米的多波筒壳；作为运动厅屋盖的双曲壳，其

尺寸为18×32米，厚度为8厘米，扁度为$^1/_{10}$；有一个直綫边緣的双曲鋸齿型加筋輕質混凝土壳体，每个單元的尺寸是8×12米，厚度为8厘米；各种跨度的具有八角形閉合边緣的壳体，其厚度为7～8厘米，扁度达到$^1/_{20}$。

最近知名的壳体結构有M.C.杜波列夫建議的由鋼筋混凝土梯形格板組成的装配式褶板薄壁屋盖和И.C.别塞勒尼格建議的鋼筋混凝土拱架式網形拱壳。Г.И.布謝尼其諾夫〔385〕对其計算方法作了討論。

* * *

关于今后研究的远景問題，在壳体和其他薄壁空間結构計算方面，首先可提出：对壳体計算理論中的个别边界問題作詳尽研究；进一步研究在各种类型的荷載下的表格計算法，以及解算壳体和支承边緣共同工作时复杂的接触問題。在具有中間支座的情形下，应当考虑边緣的柔性、这是具有特殊理論兴趣的問題，支承在中間柱上的球形穹頂就是其中一个例子。

除上述問題外，应該注意下列問題：

考虑徐变的預应力鋼筋混凝土壳体的研究；由扁壳組成的具有桥面部分的鋼筋混凝土桥梁結构及其計算法的研究；

壳体动力問題和地震耐力問題的进一步研究，特别是壳体在非周期性荷載下动力計算方法的研究；

壳体彈塑性平衡的复杂問題的理論和实驗研究，以及与此相关的按极限平衡确定承載能力的問題；

在复杂荷載和有限撓度下的塑性問題；

棱形壳和箱型壳的計算理論的进一步发展；

薄壁壳体特别是高水头拱垻的計算理論及实用方法的研究，此时解决最小重量和最低造价問題是重要的。

在壳体非綫性理論方面应継續研究的有：

扁壳在横向荷載下的研究；

在不同的类型的內力共同作用下筒壳的研究；

在薄壳稳定問題中綫性理論应用极限的确定；

考虑材料的塑性性質时壳体临界应力的确定。

当解决个别复杂問題时，使用电子計算机是适时的。与此相关应发展：逐次漸近法、迭代法、变分法和定差法及其計算程序的拟定。

薛振东、龙馭球、刘振华等譯自“苏联建筑力学四十年（1917～1957）”

1. Абрамов Г. Д., Исследование устойчивости и сложного изгиба пластин, стержневых наборов и оболочек разностными уравнениями. Л., Судпромгиз, 1951.

2. Абрамович С. В., Расчет тонких оболочек, очерченных по поверхностям второго порядка положительной кривизны, на сосредоточенные силы. Труды Новочеркасского политехнического института, т. , 1953.

3. Агамиров В. Л., Устойчивость замкнутых цилиндрических оболочек при совместном действии осевого сжатия и внешнего давления. Автореферат кандидатской диссертации, М., 1955.

4. Ададуров Р. А., Напряжения и деформации в цилиндрической оболочке с жесткими поперечными сечениями. «Доклады АН СССР», т. 62, № 2, 1948.

5. Александровский С. В., Расчет безмоментных оболочек на основе теории Власова. Диссертация канд. техн. наук, М. 1947.

6. Александровский С. В., Об устойчивости цилиндрической оболочки при больших прогибах. Сб. «Расчет пространственных конструкций», вып. III, М., Гос. изд. литературы по строительству и архитектуре, 1955.

7. Алексеев С. А., Мягкие нерастяжимые оболочки. Труды конференции по гибким пластинкам и оболочкам, изд. ВВИА, 1952.

8. Алексеев С. А., К теории мягких оболочек вращения. Сб. «Расчет пространственных конструкций», вып. III, М., Гос. изд. литературы по строительству и архитектуре, 1955.

9. Алексеев С. А., Гибкие пластинки и оболочки в закритической области. Автореферат докторской диссертации. М., 1956.

10. Алумяэ Н. А., Равновесие тонкостенных упругих оболочек в послекритической стадии. ГИЗ, «Научная литература», Тарту, 1948; Труды Таллинского политехн. института, серия А, 1948; «Прикладная математика и механика», т. 13. вып. 1, 1949.

11. Алумяэ Н. А., Дифференциальные уравнения состояний равновесия тонкостенных упругих оболочек в послекритической стадии. «Прикладная математика и механика», т. 13, вып. 1, 1949.

12. Алумяэ Н. А., К одной формуле критического напряжения безмоментного напряженного состояния тонкостенных упругих оболочек. «Прикладная математика и механика», т. 16, вып. 6, 1950.

13. Алумяэ Н. А., Применение обобщенного вариационного принципа Кастильяно к исследованию послекритичеcкой стадии оболочек. «Прикладная математика и механика», т. 14, вып. 1, 2, 1950.

14. Алумяэ Н. А., О критическом значении осесимметричного безмоментного напряженного состояния длинной катеноидной оболочки. «Прикладная математика и механика», т. 16, вып. 6. 1952.

15. Алумяэ Н. А., Вариационные формулы исследования гибких пластинок и оболочек. Труды конференции по расчету гибких пластин и оболочек, изд. ВВИА, 1952.

16. Алумяэ Н. А., К теории осесимметричной деформации оболочек вращения при конечных перемещениях. «Прикладная математика и механика», т. 16, вып. 4, 1952.

17. Алумяэ Н. А., Об определении состояний равновесия круговой оболочки при осесимметричной нагрузке. «Прикладная математика и механика», т. 17, вып. 5, 1953.

18. Алумяэ Н. А., К определению состояния равновесия длинных цилиндрических оболочек при осесимметричной нагрузке. «Известия АН Эстонской ССР», т. 3, № 1, 1954.

19. Алумяэ. Н. А., Критическая нагрузка длинной цилиндрической круговой оболочки при кручении. «Прикладная математика и механика», т. 18, вып. 1, 1954.

20. Алумяэ Н. А., Об аналогии между геометрическими и статическими соотношениями нелинейной теории оболочек. «Известия АН Эстонской ССР», т. 2, 1955.

21. Алумяэ Н. А., О представлении основных соотношений нелинейной теории оболочек. «Прикладная математика и механика», т. 20, вып. 1, 1956.

22. Алумяэ Н. А., Лурье А. И., Рецензия на книгу А. Л. Гольденвейзера «Теория