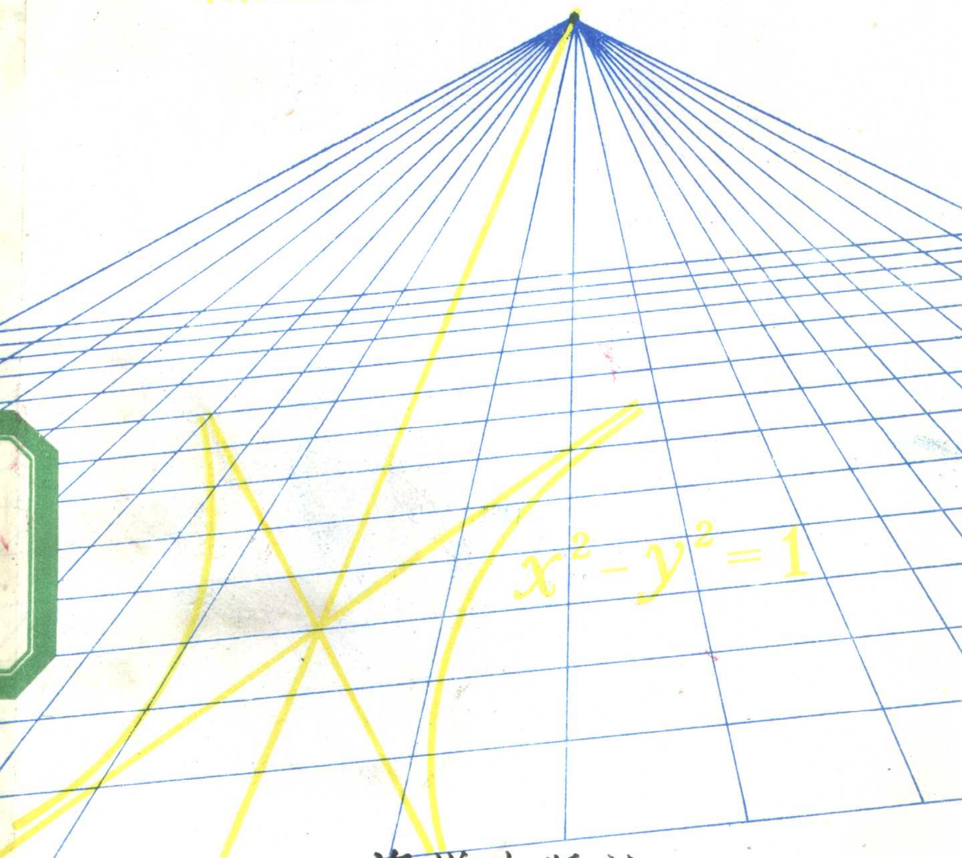
# 数学思维能力训练

中外文化书林

主编　冯跃峰

审订　翟连林




海洋出版社

# 数学思维能力训练

主编：冯跃峰

编者：方宏伟　任宝林　陈文明　包韬略
包先强　曾　奋　肖体松　鲍兰生
张焕明　许永忠　陈益生　黄国初
梁瑞兴　周万林　李德雄　马法强

审订：翟连林

海 洋 出

**数学思维能力训练**

主编 冯跃峰　　审订 翟连林

海洋出版社出版（北京市复兴门外大街1号）

新华书店北京发行所发行

保定一中印刷厂印刷

开本：787×1092　1/32　印张：7　字数：147千字

1990年6月第一版　　1990年6月第一次印刷

印数1—15000

统一书号：ISDN7—5027—1033—7/O·24　定价：2.50元

# 前　言

数学是一切自然科学的基础和工具。因此，学好数学是广大中学生的共同愿望。长期以来，中学生常常为书中那一个个数学问题的奇妙解法而赞叹，却又困惑不解：这些美妙的解法是怎样找到的？为了帮助学生了解人们寻求解题方法的思维过程，掌握正确的思维方法，提高解题能力，我们根据中学数学教学的实际，结合作者多年从事中学数学教学研究取得的成果，编写了这本《数学思维能力训练》。

本书选编了十八个数学专题，涉及代数、三角、几何各个方面，但以代数为重点；各专题均围绕典型问题和典型方法这两条主线按不同层次展开；选题源于教材，高于教材，且具有一定坡度；各例题均按“思路指导、解或证明、归纳提要”三个层次编写。“思路指导”着重剖析寻求解题方法的思维过程。其中包括观察、尝试、联想、期望、猜想等非逻辑的思维方式，并且特别注重分析题中给出的各种信息对解题思路的导向和监控作用；“解或证明”则力求简明扼要、规范准确，旨在给学生提供一个完美示范；“归纳提要”主要概括解题中所用的知识、方法和技巧以及使用这些方法技巧的时机和注意事项，着眼于思维变通，使之举一反三；每节之后配有A、B两组习题，A组属低、中档习题，B组属中、高档习题，读者可根据自己的实际水平选用。书后附有答案或提示，以供查对。

读者阅读本书的例题，应按如下四个步骤进行：（1）读懂题目，捕捉信息，并尝试着寻求解法；（2）认真阅读“思路指导”，这是阅读的重点。一方面，要深刻理解“指导”中每句话的含义，使之真正成为自己的思路，直至解题“胸有成竹”。另一方面，应将自己的思路与书中思路比较，找到异同，鉴别优劣；（3）独立完成题解。若不能获解则再看“思路指导”，直至求出其解，然后与书中解答对照，找到差距，使之完美。（4）思考本题训练的目的，总结解题经验与收获，并与“归纳提要”的内容相对照，力求自化和自得。

本书可作为高中各年级学生课外阅读资料，尤为适合高三毕业生系统复习之用。而且对中学数学解题研究和解题思维过程研究亦不失参考价值。

参加本书编写的还有：姜崇坤、徐博良、梅声应、薛盘龙、徐新宏、唐杰、方光雄、陈善弟、章舜生、李尧亮、吴沈泉、刘永春、陈耿等。

作者虽潜心于中学数学教学研究，但限于水平，错误难免。恳请读者、专家不吝指教，以便有机会再版时进行修改，使之逐步完善。

编　者

1990年8月

# 目　录

# 一、集合中的综合问题

集合是中学数学中的基本概念之一．集合概念已渗透到中学数学的各个方面．本节中，我们主要介绍一些与集合概念有关的综合问题的解法，旨在帮助读者牢固掌握和灵活运用集合概念，提高综合运用知识的能力．

## （一）集合运算与证明

**例1** 设 $A=\{x|x=\frac{t+1}{t-1},\ t\in R\}$，

$$B=\{x|x=t^2+t+1,\ t\in R\},$$

求$A\cap B$．

**【思路指导】** 欲求$A\cap B$，须先弄清$A$、$B$的意义．为此，须讨论$t\in R$时，$x$有哪些可能取值，这实际上就是要求出函数的值域．

**【解】** 由$\frac{t+1}{t-1}=1+\frac{2}{t-1}\neq1$，

知 $A=\{x|x\neq1,\ x\in R\}$，

同样可知 $B=\{x|x\geqslant\frac{3}{4}\}$，

故 $A\cap B=\{x|x\geqslant\frac{3}{4}$ 且$x\neq1\}$．

**【归纳提要】**（1）集合的运算，关键是透彻理解题中集合的意义，尽量将集合的表述形式化为常见的形式．（2）

一般地，集合$\{x|x=f(t), t\in R\}$表示函数$f(t)$的值域。

**例2** 设 $A=\{x|x=14m+36n, m、n\in Z\}$，

$B=\{x|x=2k, k\in Z\}$，求证：$A=B$。

**【思路指导1】** 显然有$A\subseteq B$，因而只须证明$B\subseteq A$，即对任何整数$k$，有$2k\in A$。为此，应找到整数$m_k$、$n_k$，使

$$2k=14m_k+36n_k,$$

即 $$k=7m_k+18n_k.$$

通过观察，发现取$n=2k$，$m_k=-5k$即可。

详细解答留给读者。

**【思路指导2】** 因$B$是一切偶然组成的集合，欲证$A=B$，只须证明：当$m$、$n\in Z$时，$14m+36n$可取遍一切偶数，也即$7m+18n$可取遍一切整数。为此，可令$n$取特殊整数来讨论。

**【证明】** 在$7m+18n$中，令$n=0,1,\cdots,6$，分别得如下诸数：$7m+0$，$7(m+2)+4$，$7(m+5)+1$，$7(m+7)+5$，

$7(m+10)+2$，$7(m+12)+6$，$7(m+15)+3$。

注意到$m\in Z$，从而$7m+18n$可取遍一切整数。

$$\begin{aligned}故\quad A&=\{x|x=14m+36n, m、n\in Z\}\\&=\{x|x=2(7m+18n), m、n\in Z\}\\&=\{x|x=2k, k\in Z\}=B.\end{aligned}$$

**【归纳提要】** (1)证明两集合相等，通常有两条途径：一是让它们相互包含，二是让它们都与同一个集合相等。(2)欲证$A\subseteq B$，关键是将$A$中元素用$B$中元素的表现形式表出。如本例，关键是将$2k$($k\in Z$)表成$14m+36n$($m$、$n\in Z$)的形式。

## （二）集合计数

**例3** 设$A$是$n$元集，$B$是$m$元集（$n\leqslant m$），$A\subseteq B$．试求分别满足下列条件的集合$X$的个数．（1） $A\subseteq X\subseteq B$；（2）$X\subseteq B$ 且$A\cap X\neq X$．

**【思路指导】**欲求集合$X$的个数，必须明确集合$X$的性质．由条件（1），$X$必须含有$A$中的一切元素；其次，$X$中还可含有$B\cap\overline{A}$中的元素，由此可求得集合$X$的个数．对于(2)，由已知条件可知，$X$是$B$的子集，但不是$A$的子集．从而可由$B$的子集数减去$A$的子集数即得集合$X$的个数．

**【解】** （1）∵ $A\subseteq B$，$A$中有$n$个元素，$B$中有$m$个元素，从而$B\cap\overline{A}$有$m-n$个元素．于是，含有$n+t$（$t=0,1,\cdots,m-n$）个元素的集合$X$的个数为$C_{m-n}^{t}$，故满足条件(1)的集合$X$的个数为$C_{m-n}^{0}+C_{m-n}^{1}+\cdots+C_{m-n}^{m-n}=2^{m-n}$．

（2） ∵ $B$的子集个数为$2^m$，$A$的子集个数为$2^n$，于是，符合条件（2）的集合$X$的个数为$2^{m-n}$．

**【归纳提要】** 求集合的限定条件的子集个数，通常是转化为求某些集合的无限定条件的子集个数．$n$元集合的无限定条件的子集个数为$C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n$．

**例4** 已知集合$A$、$B$各含有12个元素，$A\cap B$含有4个元素．试求同时满足下面两个条件的集合$C$的个数．
（1）$C\subset A\cup B$且$C$中含有三个元素；（2）$C\cap A\neq\phi$．

**【思路指导】** 欲求集合$C$的个数，只须弄清集合$C$中的三个元素可在哪些元素中选取，因而应求出$A\cup B$中元素的个数；又注意到$C\cap A\neq\phi$，即$C$中至少含有$A$的一个元素，

由此，我们从反面考虑求解要简单得多。

【解】 用$n(X)$表示集合$X$中元素的个数，则

$n(A)=n(B)=12$，$n(A\cap B)=4$，

$\therefore\ n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=20$。

于是，满足条件（1）的集合$C$的个数为$C_{20}^{3}=1140$。

又$n(B\cap\overline{A})=n(B)-n(A\cap B)=12-4=8$，于是，上述集合中，不含$A$中元素的集合有$C_8^3=56$个。故同时满足条件（1）、（2）的集合$C$的个数为$1140-56=1084$。

【归纳提要】 求某个集合$A$的含$n(n\in N)$个元素的子集$B$的个数，关键是弄清集合$A$中有多少元素以及子集$B$必含、可含、不含$A$中的哪些元素。集合中的元素计数有如下两个常用公式：$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$；

$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)$

$-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$。

## （三）求集合中的参数

**例5** 设 $A=\{x\,|\,x^2-ax+a^2-19=0\}$，

$B=\{x\,|\,\log_2(x^2-5x+8)=1\}$，

$C=\{x\,|\,x^2+2x-8=0\}$，

且 $A\cap B\supset\phi$，$A\cap C=\phi$，求实数$a$。

【思路指导】因$a$是方程$x^2-ax+a^2-19=0$中的系数，欲求$a$，只须知道其方程的解，也即弄清$A$中的元素，这可从$A$所满足的条件：$A\cap B\supset\phi$，$A\cap C=\phi$中去发掘。再注意到$B$、$C$都是确定的集合，结合上述已知条件，不难推出$A$中所含的元素。

【解】 易知，$B=\{2,\ 3\}$，$C=\{2,\ -4\}$，

又　$A\cap B\supset\phi$，即　$A\cap B\neq\phi$，从而$2\in A$或$3\in A$。

但　$A\cap C=\phi$　知　$2\notin A$，∴　$3\in A$。

即　3为方程$x^2-ax+a^2-19=0$的根，

于是，$3^2-3a+a^2-19=0$，解得　$a=5$，或$a=-2$。

又　$a=5$时，$A=\{x|x^2-5x+6\}=\{2,3\}$，

此时$A\cap C=\{2\}\neq\phi$，此与题设矛盾，故舍去。

而　$a=-2$时，$A=\{x|x^2+2x-15\}=\{3,-5\}$，

此时$A\cap C=\phi$，$A\cap B=\{3\}\supset\phi$，符合题意，

故　所求的$a=2$。

**【归纳提要】**　"已知$\rho(x)$成立，求$a$"等问题，实质上是求$\rho(x)$成立的充要条件。也就是讨论当且仅当$a$为何值时$\rho(x)$成立。但通常的解题思路是由$\rho(x)$成立去求$a$，这实际上只求出了$\rho(x)$成立的必要条件，条件的充分性还须检验。如本例，容易增解$a=5$。产生增解的原因是推理过程不可逆。实际上，由条件$A\cap B\supset\phi$、$A\cap C=\phi$可推出$3\in A$，但$3\in A$却不能保证$A\cap C=\phi$，是因$A$中可能还含有 2 或 $-4$。

**例6**　设$A=\{z|1z-2|\leqslant 2\ \ z\in C\}$，

$$B=\{z|z=\frac{z_1 i}{2}+b,\ z_1\in A,\ b\in R\}.$$

（1）若$A\cap B=\phi$，求$b$的取值范围；

（2）若$A\cap B=B$，求$b$的值。

**【思路指导】**　欲求$b$，关键是明确$B$中元素应满足的条件，这必须由$A\cap B$的特征来确定。为此，先应弄清集合$A$、$B$的意义。其中$A$的意义是显然的；为了弄清$B$的意义，就要求出符合$B$中约束条件的一切复数，这实质上属于复数中的轨迹问题（详见本书六、复数中的轨迹与极值），用

"代入法"易求.

【解】 集合$A$表示以$P(2, 0)$为圆心，以$r_1=2$为半径的圆及其内部.

由 $z=\dfrac{z_1 i}{2}+b$,

得 $z_1=\dfrac{2(z-b)}{i}=2(b-z)i$.

但 $z_1\in A$, 即 $|z_1-2|\leqslant 2$.

于是 $|2(b-z)i-2|\leqslant 2$.

化简得 $|z-b-i|\leqslant 1$.

则，集合$B$表示以$Q(b, 1)$为圆心，$r_2=1$为半径的圆及其内部.

(1) 若 $A\cap B=\phi$，则两圆$P$、$Q$外离，

因此，$|PQ|>r_1+r_2=2+1=3$,

即 $\sqrt{(b-2)^2+1}>3$,

解得 $b<2-2\sqrt{2}$或$b>2+2\sqrt{2}$;

(2) 若$A\cap B=B$,即$B\subseteq A$,则两圆 $P$、$Q$内切或内离，

因此 $|PQ|\leqslant|r_1-r_2|=1$,

即 $\sqrt{(b-2)^2+1}\leqslant 1$,

解得 $b=2$.

【归纳提要】 (1)求集合中参数的取值(范围)，关键是明确集合的意义，由此结合已知条件布列方程或不等式.当集合的表述形式较抽象时，可先列举集合中的几个元素，借以理解集合的意义.(2)集$A$是集$B$的子集有很多等价叙述，如$A\subseteq B$，$A\cap B=A$,$A\cup B=B$，$A\cap\overline{B}=\phi$都表示同一意义.

## （四）求集合

**例7** 设 $A=\{x,\ xy,\ \lg(xy)\}$、$B=\{0,|x|,y\}$ 都是三元集，试求集合$P=\{x+y|A=B\}$.

**【思路指导】** 欲求集合$P$，先应求出使$A=B$的一切$x$、$y$的取值，然后求出它们的一切可能的和。为求$x$、$y$，应由$A=B$去建立方程。但$A$、$B$的元素之间的相等关系有$3!=6$种可能，一一枚举，则嫌繁锁。因而应抓住一些已知元素如$B$中的元素0，去建立相等关系，由此逐步求出其它元素。

**【解】** $\because$ $0\in B$，又 $A=B$，则 $0\in A$.

由 $\lg(xy)$有意义，知 $xy\neq 0$，于是 $\lg(xy)=0$，即 $xy=1$. 这样$A=\{x,\ 1,\ 0\}$.

又 $1\in A$，$A=B$，则 $1\in B$. 于是$y=1$或$|x|=1$.

若 $y=1$，由 $xy=1$ 知 $x=1$，这与$A$是三元集矛盾，从而$y\neq 1$，于是$|x|=1$.

但 $x\neq 1$，则 $x=-1$，再由$xy=1$得$y=-1$.
此时，$A=B=\{0,\ 1,\ -1\}$符合题意。

故 $P=\{x+y|A=B\}=\{-2\}$.

**【归纳提要】** 求有关参数取值的集合，通常可分为两个步骤：首先弄清参数满足的约束条件，由此求出参数的所有可能取值；其次，根据题中集合的实际意义，将所得的结果写成题设的集合形式。

**例8** 设 $A=\{(x,\ y)|\dfrac{y-3}{x-2}=a+1, x、y\in R\}$，

$B=\{(x,\ y)|(a^2-1)x+(a-1)y=15,\ x、\ y\in R\}$.

试求集合$P=\{a|A\cap B=\phi,\ a\in R\}$.

**【思路指导】** 本题实质上是求使$A\cap B=\phi$的一切实数$a$的集合. 为此，只须讨论$a$为何值时，方程组

$$\begin{cases}\dfrac{y-3}{x-2}=a+1. & ①\\ (a^2-1)x+(a-1)y=15 & ②\end{cases}$$

无实数解。

**【解】** 由①得 $y=(a+1)(x-2)+3$ ③

将③代入②，得

$2(a^2-1)x=2a^2-3a+16$ ④

欲使①、②无公共解，只须方程④无解或④的解为$x=2$. 于是，令 $a^2-1=0$，得 $a=\pm1$，此时④无解；又在④中令 $x=2$，得 $2a^2+3a-20=0$，解得$a=\frac{5}{2}$或$a=-4$.

又当 $a=\frac{5}{2}$或$-4$时，方程④只有唯一解$x=2$，从而此时方程组无解.

综上述，方程组无实数解的充要条件是$a=\pm1$，$-4$，$\frac{5}{2}$，故 $p=\{1,\ -1,\ -4,\ \frac{5}{2}\}$。

**【归纳提要】** 关于方程组的解的讨论，常常是通过消元，将之化为一元方程处理. 但要注意有些变形不是同解变形，因而消元后所得方程有解（无解）只是原方程组有解的一个必要（充分）条件.

## 习题一 （A组）

1. 设 $A=\{x|x^2-px+q=0\}$，

$$B=\{x|6x^2+(p+2)x+5+q=0\},$$

$$A\cap B=\{\frac{1}{2}\}，求A\cup B.$$

2. 设 $A=\{x|x=-t^2, t\in R\}$，

$B=\{x|x=3+|t|, t\in R\}$，$I=R$，

求$\overline{A}\cap\overline{B}$.

3. 设 $I=\{x|\lg(10-x)=t, t\in R\}$，

$A=\{x|x=4-t, t\in R^+\}$，

$B=\{x|(x-2)(7-x)>0\}$，

求$\overline{A}\cup\overline{B}$.

4. 设 $A=\{x|x^2+ax-12=0, x\in R\}$，

$B=\{x|x^2+bx+c=0, x\in R\}$，

又 $A\cap B=\{-3\}$，$A\cup B=\{-3, 4\}$，求$a+b+c$.

5. 设 $A=\{a, a+d, a+2d\}$，$ad\neq 0$，

且 $A=B$，$B=\{a, aq, aq^2\}$，求$2q+3a+4d$.

6. 设 $A=\{x|x=k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in Z\}$，

$B=\{x|x=2k\pi\pm\frac{\pi}{2}k\in Z\}$，求证：$A=B$.

7. 设 $A=\{x|x^2-3x+2=0\}$，

$B=\{x|x^2-5x+6=0\}$，

$C=\{x|x^2+nx+n^2-7\}$，

且 $A\cap C\supset\phi$，$B\cap C=\phi$，求$n$.

8. 设 $A=\{(x, y)|x^2+y^2<2\}$，

$B=\{(x, y)|x^2+y^2<a^2\}$，

求集合$P=\{a|A\cap B=B, a\in R\}$.

9. 设 $A=\{(x, y)|y=|x|+1, x、y\in R\}$，

$B=\{(x,y)|2y=x+2a,\ x、y\in R\}$，

试求集合$P=\{a|A\cap B=\phi,\ a\in R\}$.

10. 设 $A=\{x|x^2-3x+2=0\}$，

$B=\{x|x^2-ax+a-1=0\}$，

求集合$P=\{a|A\cup B=A,\ a\in R\}$

## （B组）

11. 设 $A=\{x|x=3m+1,\ m\in N\}$.

$B=\{y|y=5n+2,\ n\in N\}$，求$A\cap B$，

12. 设 $a\in R^+$，$A=\{2,\ 4,\ a^3-2a^2-a+7\}$，

$B=\{-4,\ a+3,\ a^2-2a+2,\ a^3+a^2+3a+7\}$，

且 $A\cap B=\{2,\ 5\}$，求$A\cup B$。

13. 设 $A=\{(x,\ y)|x^2+y^2\leqslant 1\}$，

$B=\{(x,\ y)|(x-1)^2+(y-1)^2\leqslant 1\}$，

$C=\{(x,\ y)|y-x\leqslant 0\}$，

求点集$(A\cup B)\cap C$的面积.

14. 设 $A=\{x|x=12m+8n+4l,\ m、n、l\in Z\}$

$B=\{x|x=20p+16q+12r,\ p、q、r\in Z\}$，

求证：$A=B$。

15. 设 $A=\{x|\ |x^2-2x|\leqslant x\}$，

$$B=\left\{x\ \middle|\ \left|\frac{x}{1-x}\right|\leqslant\frac{x}{1-x}\right\},$$

$C=\{x|ax^2+x+b<0\}$，

又 $(A\cup B)\cap C=\phi$，$(A\cup B)\cup C=R$，求$a$、$b$.

16. 设 $A=\{(x,y)|(x-1)^2+y^2\leqslant 25\}$，

$B=\{(x,\ y)|(x+1)^2+y^2\leqslant 25\}$，

$$C_t=\{(x,\ y)\mid |x|\leqslant t,\ |y|\leqslant t\},$$

又 $C_t\subset(A\cap B)$，求$t$的最大值.

17. $A=\{(x,\ y)\mid x=n,\ y=na+b,\ n\in Z\}$,

$B=\{(x,\ y)\mid x=m,\ y=3m^2+15,\ m\in Z\}$,

$C=\{(x,\ y)\mid x^2+y^2\leqslant 144\}$.

试证：不存在$a$、$b$使$A\cap B\neq\phi$且$(a,\ b)\in C$.

18. 设 $a$、$b$、$c\in R$,

$A=\{(a、b、c)\mid a^2-bc-8a+7=0\}$,

$B=\{(a、b、c)\mid b^2+bc+c^2-6a+6=0\}$,

求集合$P=\{a\mid A\cap B\neq\phi\}$.

19. 设 $A=\{1,\ 2\}$，$B=\{x\mid x^2-mx+2=0\}$,

求集合$P=\{m\mid A\cap B=B,\ m\in R\}$.

20. 设 $P=\{x\mid (x-1)(x-4)\geqslant 0\}$,

$Q=\{(n-1)(n-4)\leqslant 0,\ n\in N\}$,

求集合$A=\{S\mid S\cap P=\{1,\ 4\},\ S\cap Q=S\}$.

# 二、函数性质的应用

函数是中学数学中的重要内容．这不仅因为函数内容丰富、方法灵活，更重要的是函数应用广泛．本节中，我们主要介绍函数基本性质的应用．

## （一）定义域的应用

定义域是函数的一个基本概念，它是研究和运用函数的