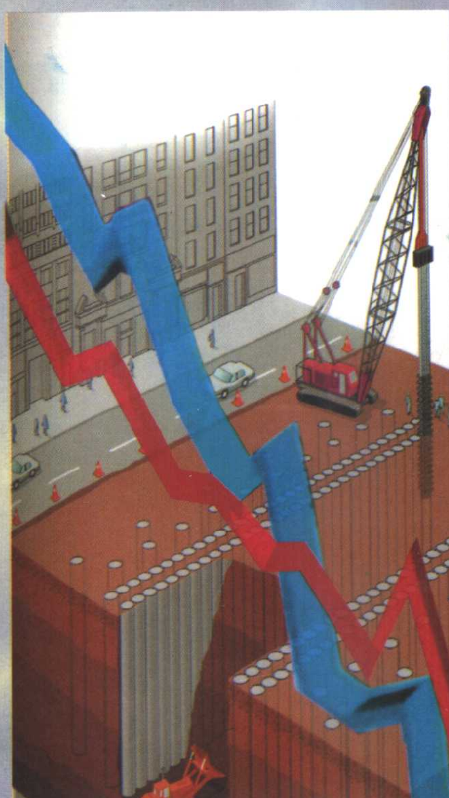
全国成人高等教育规划教材

经济数学基础

教育部高等教育司　组编



北京师范大学出版社

全国成人高等教育规划教材

经济数学基础

教育部高等教育司　组编
顾问　王梓坤
主编　钟　宜

北京师范大学出版社
·北京·

图书在版编目(CIP)数据

经济数学基础/钟宜主编．—北京：北京师范大学出版社，2001.8重印
ISBN 7-303-05024-8

Ⅰ．经…　Ⅱ．钟…　Ⅲ．经济数学　Ⅳ．F224.0

中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第11363号

北京师范大学出版社出版发行
(北京新街口外大街19号　邮政编码：100875)
出版人：常汝吉
北京师范大学印刷厂印刷　全国新华书店经销
开本：850mm×1 168mm　1/32　印张：13.75　字数：340千字
1999年8月第1版　2002年8月第9次印刷
印数：55 301～60 300　定价：16.50元

出版说明

为了加强成人高等教育教学的宏观管理，指导并规划成人高等教育的教学工作，保证达到培养规格，教育部于今年4月颁布了全国成人高等教育公共课和经济学、法学、工学等学科门类主要课程的教学基本要求。教学基本要求是成人高等教育的指导性教学文件，是成人高等教育开展有关课程教学工作和进行教学质量检查的重要依据。为了更好地和更迅速地贯彻这个教学基本要求，我司又组织制订了全国成人高等教育主要课程教材建设规划。经过有关出版社论证申报和教育部组织的成人教育专家评审，确定了各门课程教材的主编人选及承担出版任务的出版社。

承担任务的出版社，遴选了学术水平高、有丰富成人教育经验的专家参加教材及教学辅助用书的编写和审定工作。新编教材尽可能符合成人学习特点，较好地贯彻了成人高等教育教学基本要求。推广使用这套教材，对于加强成人高等教育的教学工作，提高教学质量，促进成人高等教育的改革与发展具有十分重要的意义。

首批完成的有公共课和经济学、法学、工学三大学科门类共81门主要课程的教材。由于此项工作是一项基础性工作，具有一定的开创性，可能存在不完善之处。我司

将在今后的教学质量检查评估中，及时总结经验，认真听取各方反馈意见，根据教学需要，适时组织教材的修订工作。

教育部高等教育司

1998年12月1日

前　言

这本教材是按照教育部成人教育司1998年4月审定的成人高等教育《经济数学基础》课程教学基本要求编写的。

本教材包括微积分、线性代数和概率论三部分内容。其中微积分占六章，系统讲述了一元微积分的基本理论和方法并附有二元微分学及微分方程简介；线性代数占一章，重点讲述矩阵和线性方程组，作为应用介绍了投入产出模型；概率论占一章，讲述概率论的初步知识。本教材适用于专科程度，建议总学时数为100～120学时。

在编写过程中，我们充分考虑了以下几点：

1. 内容取舍、结构安排、讲述深度是按照教学基本要求确定的。与现有教材相比有所变化。

2. 既照顾到成人学员学习的特点又要保持学科自身的系统性与严密性。在不影响学科体系的前提下略去了个别定理和某些比较复杂的定理证明；编排了相当数量的典型例题，并对解题思路及方法进行了详细的说明。

3. 本教材力求满足各类成人教育，包括夜大、电大、函授和自学考试的需要，文字通俗易懂，例题由浅入深，便于自学。

4. 为了提高读者运用数学分析方法处理实际经济问题的能力，介绍了简单的建模知识，几乎每章都选有经济应用的例题。

5. 为了使读者能够巩固所学的知识，教材中选配了大量的习题，并在书后附有习题参考答案。教师可根据情况选择其中的一部分布置作业，而其余的留给学生自行练习。

6. 目前国内已出版了很多同类教材，这些教材都是各兄弟院校教师教学经验的结晶，在编写过程中我们参考了其中一部分，希望能将兄弟院校的先进经验尽量反映出来。

由于水平有限并且时间仓促，教材中一定还存在着很多缺点和问题，希望阅读本书的专家、使用本书的教师和学生批评指正。

编　者

1998 年 12 月

目　录

第一章　极限与连续

［**内容提示**］极限概念是在研究变量在某一过程中的变化趋势时引出的，它是微积分学的重要基本概念之一．微积分学中的其他几个重要概念，如连续、导数、定积分等，都是用极限表述的，并且微积分学中的很多定理也是用极限方法推导出来的．这一章我们在对函数概念进行复习和补充的基础上，将介绍数列与函数极限的概念、求极限的方法及函数的连续性．

第一节　函　数

函数是微积分学的研究对象．虽然在中学里我们都学习过函数概念，但是现在则要从全新的视角来对它进行描述．

一、函数的概念

（一）常量与变量

在日常生活、生产活动和经济活动中，经常遇到各种不同的量．例如：身高、气温、产量、收入、成本等．

这些量可以分为两类，一类量在考察的过程中不发生变化，只取一个固定的值，我们把它称作**常量**．例如，圆周率π是永远不变的量；而某种商品的价格、某个班的学生人数是在某一段时间内保持不变的量，这些量都是常量．另一些量在所考察的过程中是变化的，可以取不同数值，我们把它们称作**变量**．例如，一天中的气温、

生产过程中的产量都是在不断变化的，它们都是变量.

关于常量与变量，我们要做几点说明：

1. 常量和变量依赖于所研究的过程. 同一个量，在某种情况下可以认为是常量，而在另一种情况下则可能是变量；反过来也是同样的. 例如，某种商品的价格在一段时间内是常量，但在较长的时间内则是变量. 这说明常量和变量具有相对性.

2. 从几何意义上讲，常量对应着实数轴上的定点，变量则对应着实数轴上的动点.

3. 一个变量所能取的数值的集合叫做这个**变量的变动区域**.

有一类变量，例如时间，可以取介于两个实数之间的任意实数值，叫做**连续变量**，连续变量的变动区域常用区间表示.

常量习惯用字母 a,b,c,d 等表示，变量习惯用 x,y,z,u,v,w 等表示.

（二）函数的概念及表示法

在某个变化过程中，往往出现多个变量，这些变量不是彼此孤立的，而是相互影响和相互制约的，一个量或一些量的变化会引起另一个量的变化. 如果这些影响是确定的，是依照某一规则的，那么我们说这些变量之间存在着函数关系.

例如，生产某种产品的固定成本为 8 000 元，每生产一件产品，成本增加50元，那么该种产品的总成本 y 与产量 x 的关系可用下面的式子给出

$$y = 50x + 8\ 000.$$

当产量 x 取任何一个合理的值时，成本 y 有确定的值和它对应，我们说成本 y 是产量 x 的函数.

定义 1.1 设 x 和 y 是两个变量，若当变量 x 在其变动区域 D 内，任取一数值时，变量 y 依照某一法则 f 总有一个确定的数值与之对应，则称变量 y 为变量 x 的**函数**，记作 $y = f(x)$.

这里，x 称为**自变量**，y 称为**因变量或函数**. f 称为**函数符号**，

它表示 y 与 x 的对应法则. 有时函数符号也可以用其他字母来表示,如 $y=g(x)$ 或 $y=\varphi(x)$ 等.

x 的变动区域 D 叫做函数的**定义域**,相应的 y 值的集合叫做函数的**值域**.

当自变量 x 在其定义域内取某确定值 x_0 时,因变量 y 按照所给函数关系 $y=f(x)$ 求出的对应值 y_0,叫做当 $x=x_0$ 时的函数值,记作 $y|_{x=x_0}$ 或 $f(x_0)$.

例 1 已知 $f(x)=2x^2-3x+7$,求 $f(0)$,$f(4)$,$f\left(-\frac{1}{2}\right)$,$f(a)$,$f(x+1)$.

解
$$f(0)=2\times 0^2-3\times 0+7=7,$$
$$f(4)=2\times 4^2-3\times 4+7=27,$$
$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2-3\times\left(-\frac{1}{2}\right)+7=9,$$
$$f(a)=2a^2-3a+7,$$
$$f(x+1)=2(x+1)^2-3(x+1)+7=2x^2+x+6.$$

例 2 求下列函数的定义域.

(1) $f(x)=\dfrac{x}{3x+2}$;

(2) $f(x)=\sqrt{3-5x}$;

(3) $f(x)=\lg(4x-3)$;

(4) $f(x)=\arcsin(2x-1)$;

(5) $f(x)=\lg(4x-3)-\arcsin(2x-1)$.

解 (1) 在分式 $\dfrac{x}{3x+2}$ 中,分母不能为零,所以 $3x+2\neq 0$,解得 $x\neq-\frac{2}{3}$,即定义域为 $\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right)\cup\left(-\frac{2}{3},+\infty\right)$.

(2) 在偶次根式中,被开方式必须大于等于零,所以有 $3-5x\geqslant 0$,解得 $x\leqslant\frac{3}{5}$,即定义域为 $\left(-\infty,\frac{3}{5}\right]$.

(3) 在对数式中，真数必须大于零，所以有 $4x-3>0$，解得 $x>\frac{3}{4}$，即定义域为 $\left(\frac{3}{4},+\infty\right)$.

(4) 反正弦或反余弦中的式子，其绝对值必须小于等于 1，所以有 $-1\leqslant 2x-1\leqslant 1$，解得 $0\leqslant x\leqslant 1$，即定义域为 $[0,1]$.

(5) 容易看出，该函数为(3)，(4) 两例中函数的代数和，此时函数的定义域应为(3)，(4) 两例中定义域的交集，即 $\left(\frac{3}{4},1\right]$.

应当指出，在实际应用问题中，除了要根据解析式子本身来确定自变量的取值范围外，还要考虑到变量的实际意义，一般来说，经济变量往往取正值，即变量都是大于零的.

常用的函数表示法有**解析法**(又称**公式法**)、**表格法**和**图形法**. 下面各举一个例子.

1. $y=\sqrt{3-x^2}$.

这是一个用解析式子表示的函数. 当 x 在 $-\sqrt{3}$ 到 $\sqrt{3}$ 之间取任意值时，由公式可以确定唯一的 y 值.

2. 某商店一年中各月份毛线的销售量(单位：$\times 10^2$kg) 如表 1.1 所示.

表 1.1　某商店一年中各月份毛线的销售量　　$\times 10^2$kg

月份 t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
销售量 y	81	84	45	45	9	5	6	15	94	161	144	123

这是用表格表示的函数. 当自变量 t 取 1 到 12 之间任意一个整数时，从表格中可以查到一个 y 的对应值. 例如 t 取 10，从表中可以看到它对应的 y 值是161，即10月份毛线销售量为16 100 kg.

3. 图 1.1 是气象站用自动温度记录仪记录下来的某地一昼夜气温变化曲线.

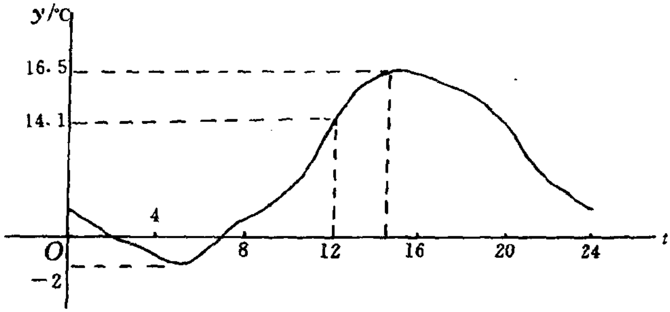


图 1.1

这是用图形表示的函数. 气温 y 与时间 t 的函数关系是由曲线给出的. 当 t 取 0 到 24 中任意一个数时，在曲线上都能找到确定的 y 值与它对应. 例如 $t = 12$ 时，$y = 14.1$℃.

（三）分段函数

现在我们来观察一个实际问题.

某市电话局规定市话收费标准为：当月所打电话次数不超过 30 次时，只收月租费 25 元，超过 30 次的，每次加收 0.23 元. 则电话费 y 和用户当月所打电话次数 x 的关系可用下面的形式给出

$$y = \begin{cases} 25, & 0 \leqslant x \leqslant 30, \\ 25 + 0.23(x - 30), & x > 30. \end{cases}$$

像这样把定义域分成若干部分，函数关系由不同的式子分段表达的函数称为**分段函数**. 分段函数是微积分中常见的一种函数. 实际上，我们在中学数学里就遇到过分段函数，只不过那时没有使用这个名称罢了. 例如，绝对值函数可以表示成

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

我们通过一个例子来讲解分段函数如何求值.

例 3

$$y = f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x > 0, \\ 2, & x = 0, \\ 3x, & x < 0. \end{cases}$$

就是说，当 x 取 $(0, +\infty)$ 内的值时，y 的值由关系式 $y = x^2 + 1$ 来计算；当 $x = 0$ 时，$y = 2$；当 x 取 $(-\infty, 0)$ 内的值时，y 的值由关系式 $y = 3x$ 来计算. 例如，$f(3) = 3^2 + 1 = 10$，$f(-5) = 3 \cdot (-5) = -15$.

它的图象如图 1.2 所示.

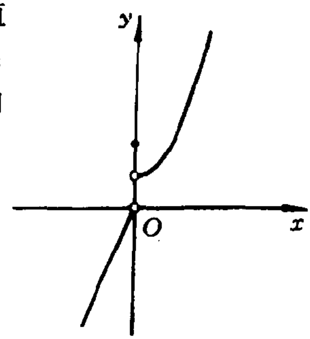


图 1.2

注意 分段函数是由几个关系式合起来表示一个函数，而不是几个函数. 对于自变量 x 在定义域内的某个值，分段函数 y 只能确定唯一的值.

分段函数的定义域是各段定义域的总和.

例 4 设函数

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & -4 \leqslant x < 1, \\ 1, & 1 \leqslant x < 3, \\ 5x - 1, & x \geqslant 3. \end{cases}$$

求 $f(-\pi)$，$f(1)$，$f(3.5)$ 及函数的定义域.

解 $-\pi \in [-4, 1)$，$f(-\pi) = \sin(-\pi) = 0$；

$1 \in [1, 3)$，　　$f(1) = 1$；

$3.5 \in [3, +\infty)$，　　$f(3.5) = 5 \times (3.5) - 1 = 16.5$.

定义域为 $[-4, +\infty)$.

例 5 用分段函数表示函数 $y = 3 - |2 - x|$，并画出图象.

解 根据绝对值定义可知

当 $x \leqslant 2$ 时，$|2 - x| = 2 - x$；

当 $x > 2$ 时，$|2-x| = x-2$.

于是有

$$y = \begin{cases} 3-(2-x), & x \leqslant 2, \\ 3-(x-2), & x > 2, \end{cases}$$

即 $$y = \begin{cases} 1+x, & x \leqslant 2, \\ 5-x, & x > 2. \end{cases}$$

其图象如图 1.3.

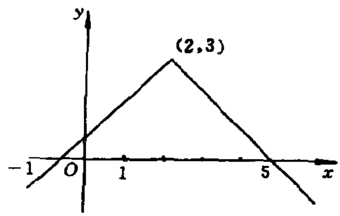


图 1.3

（四）反函数

设某种商品的单价为 p，销售量为 x，则收入 y 是 x 的函数

$$y = px.$$

这时 x 是自变量，y 是函数；

若已知收入 y，反过来求销售量 x，则有

$$x = \frac{y}{p}.$$

这时 y 是自变量，x 变成 y 的函数了.

上面的两个式子是同一个关系的两种写法，但从函数的角度来看，由于对应法则不同，它们是两个不同的函数，我们称它们互为反函数.

定义 1.2 设 $y = f(x)$ 是 x 的函数，其值域为 R. 如果对于 R 中的每一个 y 值，都有一个确定的且满足 $y = f(x)$ 的 x 值与之对应，则得到一个定义在 R 上的以 y 为自变量，x 为因变量的新函数，我们称它为 $y = f(x)$ 的**反函数**，记作 $x = f^{-1}(y)$，并称 $y = f(x)$ 为**直接函数**.

当然我们也可以说 $y = f(x)$ 是 $x = f^{-1}(y)$ 的反函数，就是说，它们互为反函数.

显然，由定义可知，单调函数一定有反函数.