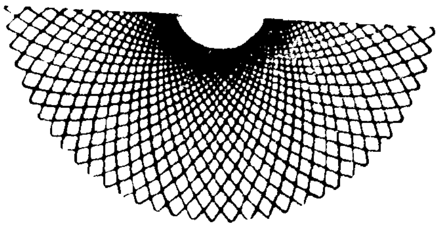

主编 罗四维 杨泰良

代数式的恒等变形

唐瑞志 欧阳锦城

四川教育出版社
一九九二年二月·成都

前言

这套读物主要是为初中学生而写的。我们当然希望，这套书对于执教中学数学的老师们也非常适用。

中学生的书包已经很沉了，在推出这套读物之前，我们已深有感触。作为教师和家长，我们常见到孩子们老是摆弄他们那些堆积如丘的题集，并深埋其间。书店里又似乎难于使这些小读者们满意地挑出几本自己真正喜爱的数学图书，这无疑是一桩憾事。在今天，在大力倡导“素质教育”、“公民教育”的九年制义务教育的时代要求下，该做些什么呢？

我们主张激励学生学习的自发因素，让孩子们在志趣的牵引下主动、愉快地学习；主张开阔学生的知识视界，让他们能见多识广；主张启动学生的高级心理活动，发展他们的思维能力和认识能力。为此，编写一些有益于启迪学生智力、开拓知识视野、激发学习兴趣、加深对课本知识理解的数学读物是十分必要的。这就是编写这套读物的初衷。

这套书是按知识专题来编写的（个别册子除外）。各专题都紧扣九年制义务教育初中数学课本的基础知识，并适当加深、拓广，联系知识的产生及其发展过程，揭示知识之间的内在联系，着重分

析内容反映的数学思想、原理、方法和实际应用。本书注重取材的新颖、叙述的生动、思想方法的引导，力求能适应初中不同层次学生的需要，能为九年制义务教育的发展起积极的配合和促进作用。我们也编拟了适量的练习题，以巩固、加深对课本知识的理解掌握，也提供一部分给学有余力或热心参加数学竞赛的学生选用。

我们的意愿未必能都形诸于笔端，呈现给读者的这套图书，尚祈请各方指正。

本套读物由杨泰良、罗四维修改、统稿。

1992年2月

目录

一　从算术到代数

§1　奇妙的数字模型

自古以来，人们对数学模型的研究，一直有着浓厚的兴趣.古希腊数学家毕达哥拉斯甚至提出"万物皆数"的论断，认为是宇宙的本源.毕达哥拉斯十分重视数与图形的关系，把数与各多边形的点对应起来研究，提出了三角形数、四角形数、五角形数、六角形数等.他的学派还把数与音乐联系起来研究，提出了弦长的比数与音的和谐性的关系，得到所谓"五度相生律".这些都是一种数学模型思想.

观察下面的数字运算：

$$6\times7=42$$

$$66\times67=4422$$

$$666\times667=444222$$

$$6666\times6667=44442222$$

$$66666\times66667=4444422222$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$(1\times9)+2=11$$

$$(12\times9)+3=111$$

$$(123\times 9)+4=1111$$

$$(1234\times 9)+5=11111$$

$$(12345\times 9)+6=111111$$

$$\vdots$$

$$\vdots\ .$$

如此和谐的运算，真是奇妙极了．像这样具有一定规律、排列和谐的数字运算形式，我们称之为数字模型．研究数字模型，不仅可以找到简便的计算方法；而且能锻炼人们的头脑，启迪人们去认识规律、发现规律．

1989年7月在德国不伦瑞克（Braunschweig）举行的第30届国际数学奥林匹克竞赛满分金牌获得者——罗华章，少年时代就喜欢研究数字模型．由于他的初中数学教师鼓励学生撰写数学小论文，罗华章在初中一年级上期学习有理数这一章时，对两位数的平方数发生了兴趣．他用实验法对下面一些两位数进行了研究：

$$15^2=225$$

$$16^2=256$$

$$29^2=841$$

$$31^2=961$$

$$35^2=1225$$

$$\cdots\cdots.$$

首先发现任何一个两位数的平方数的尾数，是原数尾数的平方数的尾数．他用平方数减去原数尾数的平方数：

$$
\begin{array}{ll}
225-25=200 & 200=(15+5)\times 10 \\
256-36=220 & 220=(16+6)\times 10 \\
841-81=760 & 760=(29+9)\times 20 \\
961-1=960 & 960=(31+1)\times 30 \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots
\end{array}
$$

又发现一个两位数的平方数减去原数尾数的平方数，其差数等于原数加上原数尾数之和的整10倍（若原数的第一位数是1，则为10倍；若原数的第一位数是2，则为20倍；……）.罗华章经过研究，概括出两位数的平方数的一个模型，总结出一条两位数的平方数的计算规律："求一个两位数的平方，就等于原数加上原数尾数的和乘上原数的第一位数的10倍，再加上原数尾数的平方".例如：

$$49^2=(49+9)\times 40+9^2=2320+81=2401.$$

罗华章将这一数字模型的发现，写成了一篇数学小论文.他在这篇小论文的结尾写到："发现这个规律，也是微乎其微的，要想获得最后胜利，只有四个字：'拼搏、谦虚'！"

认识规律，发现规律——这正是罗华章少年时代治学的秘诀．加上他那"拼搏、谦虚"的勤奋精神，从这篇小论文到摘取国际奥林匹克数学竞赛的满分金牌，只有短短的六年时间.

§2　从特殊到一般

观察下面的数字模型：

$$1\times1-1=2\times0$$
$$2\times2-1=3\times1$$
$$3\times3-1=4\times2$$
$$4\times4-1=5\times3$$
$$5\times5-1=6\times4$$
$$\cdots\cdots.$$

对上面这些式子的两端分别进行计算，不难验证等式都是成立的．从这些特殊等式中可以发现它们的一般规律．如果用n表示正整数，上面这个数字模型可以写成更一般的表达式：

$$n\times n-1=(n+1)\times(n-1),$$

或 $$n^2-1=(n+1)\times(n-1).$$

继续观察下面的数字模型：

$$(1+1)^2=1^2+1+1+1$$
$$(2+1)^2=2^2+2+2+1$$
$$(3+1)^2=3^2+3+3+1$$
$$(4+1)^2=4^2+4+4+1$$
$$(5+1)^2=5^2+5+5+1$$
$$\cdots\cdots.$$

表达成一般形式：

$$(n+1)^2=n^2+n+n+1,$$

或 $$(n+1)^2=n^2+2n+1.$$

再观察下面一组数字模型：

$$1=1$$

2个连续奇数相加： $1+3=4$

3个连续奇数相加： $1+3+5=9$

4个连续奇数相加：　　$1+3+5+7=16$

5个连续奇数相加：　$1+3+5+7+9=25$

　　……　　　　　　……．

像这样加下去，n个连续奇数相加应该怎样表示出来呢？

首先，不难观察出上面这组等式的右边是自然数的平方，第n个自然是n^2．关键是等式左边如何表示出第n个奇数．因为第n个偶数表示为$2n$，第n个奇数就应表示为$(2n-1)$．因此，n个连续奇数相加，可表示为：

$$1+3+5+7+\cdots+(2n-1)=n^2.$$

根据上面的规律，我们还可以将自然数的平方表示为下面的数字模型：

$1^2=1$

$2^2=(1+2)+1$

$3^2=(1+2+3)+(1+2)$

$4^2=(1+2+3+4)+(1+2+3)$

$5^2=(1+2+3+4+5)+(1+2+3+4)$

……．

再研究自然数的立方的数字模型，看有什么规律：

$1^3=1$

$2^3=8=3+5$

$3^3=27=7+9+11$

$4^3=64=13+15+17+19$

$5^3=125=21+23+25+27+29$

……

继续变形：

$1^3=1$

$2^3=(1+3+5)-1$

$3^3=(1+3+5+7+9+11)-(1+3+5)$

$$4^3=(1+3+5+7+9+11+13+15+17+19) \\ -(1+3+5+7+9+11)$$

$$5^3=(1+3+5+7+9+11+13+15+17+19 \\ +21+23+25+27+29)-(1+3+5+7 \\ +9+11+13+15+17+19)$$

……

对照自然数平方的数字模型，可以将自然数立方的数字模型写为：

$1^3=1^2$

$2^3=3^2-1=(1+2)^2-1$

$3^3=6^2-3^2=(1+2+3)^2-(1+2)^2$

$4^3=10^2-6^2=(1+2+3+4)^2-(1+2+3)^2$

$$5^3=15^2-10^2=(1+2+3+4+5)^2 \\ -(1+2+3+4)^2$$

……

上面这些有规律的变形，真是不胜枚举，令人眼花缭乱。只要我们细心观察，合理猜想，是不难发现这些有规律的数字模型的。

§3 字母可以运算吗？

在中国古代，有一种数字模型叫幻方。下面是一个三阶幻方：

4	3	8
9	5	1
2	7	6

这种幻方的特点是：无论哪一行、哪一列、哪一对角线上的数相加，其和均相等，且等于一个常数。三阶幻方是由1—9这9个自然数组成的，每一行、每一列、每一对角线上的三个数相加，都等于15。

如果我们以每一格的数作指数，并把每一格的数改为以2为底的幂，就得到下面的幻方：

2^4	2^3	2^8
2^9	2^5	2^1
2^2	2^7	2^6

或

16	8	256
512	32	2
4	128	64

这个幻方的特点是：每一行、每一列、每一对角线上的三个数连乘，其乘积都等于32768。真是奇

妙极了，难怪古人把这类幻方作成装饰品的图案，以显示一种神秘的力量.

这种幻方有规律可循吗？

以三阶幻方为例，为了探索每个方格中的数字排列规律，不妨用9个字母代替1—9这9个数字：

a	b	c
d	e	f
g	h	i

字母代表数字，也就可以把字母看作是数，当然也可以进行运算.由于

$$a+b+c+d+e+f+g+h+i=1+2+3$$
$$+4+5+6+7+8+9$$
$$=\frac{(1+9)\times 9}{2}=45,$$

又因 $a+b+c=d+e+f=g+h+i$,

所以 $3(a+b+c)=45$，即$a+b+c=15$.

三阶幻方的常数是15.

由于$(a+e+i)+(b+e+h)+(c+e+g)$
$+(d+e+f)=60$,

即 $3e+(a+b+c)+(d+e+f)+(g+h+i)=60$,

所以 $3e+45=60$，$e=5$.

中心方块里的数字是5.

根据幻方的基本特性，若令x，y分别代替1或3，三阶幻方的数字排列规律可以表示为：

$5-x$	$5+x-y$	$5+y$
$5+x+y$	5	$5-x-y$
$5-y$	$5-x+y$	$5+x$

在研究数字模型的一般规律中，必不可少地需要对字母进行运算，字母代数的运算规律是代数学研究的内容，人们自然会跨上数学的一个新台阶。

练习一

1. 任取小于10的三个不同的自然数，如（2，5，7）、（1，2，8）、（4，6，9）、（3，5，8）、……，任意选出一组.在这组数中任取两个作成二位数，总共可以得到6个不同的二位数.然后将这6个二位数相加，得到6个二位数的和.再把这组数中的3个一位数相加，最后将6个二位数的和除以3个一位数的和，其商是多少？再选一组试试，看有什么结果？为什么具有这样的规律？

2. 观察下面的一组数字模型，请说出为什么会具有这样的规律？

$$12345679\times18=222222222$$

$$12345679\times27=333333333$$

$$12345679\times36=444444444$$

$$12345679 \times 45 = 555555555$$
$$12345679 \times 54 = 666666666$$
$$12345679 \times 63 = 777777777$$
$$12345679 \times 72 = 888888888$$
$$12345679 \times 81 = 999999999$$

3. 观察下面两组数字模型：

$1^2 = 1$ $\qquad\qquad$ $1^2 = 1$

$2^2 = (1+1)^2 = 1+2+1$ $\qquad\qquad$ $11^2 = 121$

$3^2 = (1+1+1)^2 = 1+2+3+2+1$

$111^2 = 12321$

$4^2 = (1+1+1+1)^2 = 1+2+3+4+3+2+1$

$1111^2 = 1234321$

…… $\qquad\qquad$ ……

请根据这两组数字模型的规律，直接填出下列各题的答案：

(1) $\dfrac{22 \times 22}{1+2+1} =$ ________________；

(2) $\dfrac{333 \times 333}{1+2+3+2+1} =$ ________________；

(3) $\dfrac{4444 \times 4444}{1+2+3+4+3+2+1}$

$=$ ________________；

(4) $\dfrac{55555 \times 55555}{1+2+3+4+5+4+3+2+1}$

$=$ ________________；

（5）$\dfrac{666666\times666666}{1+2+3+4+5+6+5+4+3+2+1}$

$=$______________________________.

4．由1—16这16个自然数所构成的四阶幻方，每一行、每一列、每一对角线上的四个数之和是一个什么常数？为什么？

二　整式变形

§1　代　数　式

为了表达数字运算的一般规律，需要引入字母代数.把数或代表数的字母，用加、减、乘、除、乘方、开方等运算符号以及表示运算顺序的括号所连接而成的式子叫做代数式.例如：

$$5a^2b，3x-2y^2，\frac{7ax-2by}{13xy}，\sqrt{x+2y-z}，$$

…….

用数代替代数式里的字母，计算后所得的结果叫代数式的值.

1．对代数式中字母的认识

在代数式中，字母不仅可以代数，也可以代替某一个代数式。代数式中的字母代数，既有任意性，又有确定性．例如，$2a+5$中的a可以取任何数值，说明a的取值的任意性；当a取某一特定值时，如$a=5$，这时a的取值又是确定的.当$a=5$时，代数式$2a+5=15$，也是确定的.在方程$4x-8=0$中，x的取值是确定的，只有$x=2$时，$4x-8=0$才成立；在关于x的不同的方程中，x的取值又可以不同，这

也反映出x取值的任意性．我们把允许任意取值的字母叫做变元，约定取确定值的字母叫做常数。这样，对于一个代数式，可以把一些字母视为常数，把另一些字母视为变元．

例如，在$\frac{7ax-2by}{13xy}$中，若视x，y为变元，这个代数式就是分式；若视x、y为常数，a、b为变元，这个代数式就是关于a、b的整式．

又如，在$P=x^2+x^2y-2x+4y-5$中，

若视x为变元，y为常数，$P(x)=(y+1)x^2-2x+(4y-5)$是关于x的二次整式；

若视y为变元，x为常数：$P(y)=(x^2+4)y+(x^2-2x-5)$是关于y的一次整式；

若视x、y都为变元：$P(x,y)=x^2y+x^2-2x+4y-5$是关于x、y的三次整式．

一般地，在未事先约定代数式中的字母为常数时，应把代数式中的每个字母都当变元看待．

2．整式的排列规范

人们在列队时，前后左右都要依高矮次序排队，这样不仅队列整齐，而且美观．在整理代数式时，也要根据需要，把它整理成比较规范的形式，使之能显示出一定的排列规律，方便运算，也使人享受到一种美感．整式的排列规范有以下几种形式：

①按某字母的降幂排列：ax^2+bx+c；