向量代數學

В. П. МИНОРСКИЙ
В. П. УЛАНОВСКИЙ 著
趙根榕 譯

商務印書館

向量代數學

B. П. 米諾爾斯基
B. П. 烏拉諾夫斯基 著
趙根榕 譯

商務印書館

本書是根據蘇聯國營技術理論書籍出版局（Государственное издательство технико-теоретической литературы）1951年出版的米諾爾斯基（В. П. Минорский）和烏拉諾夫斯基（В. П. Улановский）合著的"向量代數學"（Векторная алгебра）第二修訂補充版譯出的。

內容講述向量代數的基本知識，建立了向量運算的理論基礎。書中對於定義與證明有嚴格的敍述，同時文字明晰易懂，並附有許多例題及習題。讀者演算過這些習題以後，不僅對本文可以更清楚地了解，並且也可學會向量的應用（尤其在幾何學方面的應用）。內容特別注重基本概念，例如對於向量與數量的詳加區分，向量的概念與分類由具體例子導入等，這是它的特點。

本書可作爲高等工業學校學生的教材，也可作爲與向量的記號和運算有關的工程人員的參考書。

向　量　代　數　學

趙根榕譯

商　務　印　書　館　出　版

上海河南中路二一一號

（上海市書刊出版業營業許可證出字第〇二五號）

新　華　書　店　總　經　售

商務印書館北京廠印刷

＊(52624)

1954年3月初版　1955年4月再版

版面字數54,000　印數6,001－7,000

定價0.40元

序

這本書是砲兵大學 1941 年出版的、作者所著的小册子"向量代數學"的澈底修正與補充版。

本書講述向量代數學的基本知識，打算把它設計成高等技術學校學生的教材與已具備工程知識而不得不跟向量記號與運算發生關係的人們的參考書。

在本書這一修正版中，作者確立了向量運算的理論基礎，並增加了所敍述的定義和定理的嚴密性，同時保持着行文的明顯與易懂。

在新版中又加進了向量代數學在直線與平面的研究中的應用與對空間笛氏坐標變換方面的應用。

此外，在新版中增加了許多為自習用的例子和問題，大部分新的例子和問題是向量代數在解析幾何方面的應用。

作　者

目　錄

§ 1 空間的方位·方向

假設在空間已知任意的一條直線 AA_1（圖 1）。茲來考察與直線 AA_1 平行的所有直線（包含直線 AA_1 本身）的總合（線束）(M)。如果已知這樣的線束，就說：在空間給出來了直線 AA_1 所確定的方位。屬於線束 (M) 的任意一條直線都可用以確定這個方位。如果在線束上的任意一條直線上安一個箭頭，就說：給出來了這個箭頭所確定的方向。每一個線束有兩個相反的方向。例如，在第 1 圖中，線束 (M) 的不同直線上的箭頭 $\boldsymbol{u}$ 與 $\boldsymbol{u}_1$ 表示線束的同一方向，而箭頭 $\boldsymbol{v}$ 所表示的與它相反。

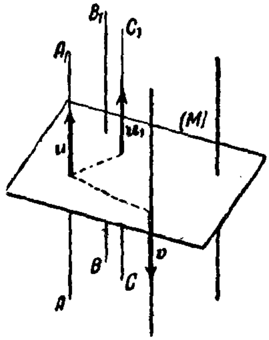

圖 1

§ 2 向量與它的元素

以 A 點（圖 2）爲起點而以 B 點爲終點的有向線段 AB 稱爲向量。

由這個定義可見，向量由下列四個元素所決定：

1）向量的起點 A；

2）向量所在的那條直線所確定的方位；

3）向量的箭頭所指示的方向；

4）線段 AB 的長度，它稱為向量的模。

向量或用指明它的起點與終點的 $\overrightarrow{AB}$ 來表示，或用一個任意的字母，比如說，用 $\boldsymbol{u}$（印刷用粗號字，書寫在上面加一個短劃 $\bar{u}$）來表示。向量的模用 $|\overrightarrow{AB}|$、$|\boldsymbol{u}|$、AB 或 u 來表示。

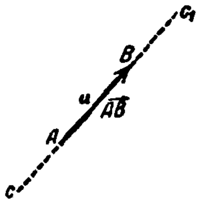

圖 2

起點終點重合的向量稱為零向量，而用 $\boldsymbol{0}$ 或 $\vec{0}$（書寫時用 $\bar{0}$）來表示。它的模等於零，而方向不固定。

平行於同一直線的向量稱為共線的。平行於同一平面的向量稱為共面的。

§ 3 數量與向量・向量的三種型

用一個數值可以完全確定的量（例如質量、溫度等）稱為數量。由此可見，任意一個實數也是一個數量。

不僅要用數值，還要用方向才能確定的量（例如力、速度等）稱為向量。

茲舉例說明：就向量的數學式來說，向量的第一個元素（見§2），即它的起點並非永遠是極為重要的。

例 1：平移運動的剛體上的點 A、B、C、… 經過一段時間畫向量 $\overrightarrow{AA_1}$、$\overrightarrow{BB_1}$、$\overrightarrow{CC_1}$、…(圖 3)，它們有三個相同的元素：長度、方位與方向。物體的位移由這些向量中的任何一個向量都可以完全決定，甚至於由隨意一個有相同的長度、方位與方向的向量 $\overrightarrow{OM}$ 可以完全決定。這樣，當用向量描述剛體的平移位移時，可以把空間的任何一點取爲這個向量的起點。這種具有隨意起點的向量叫做自由向量。

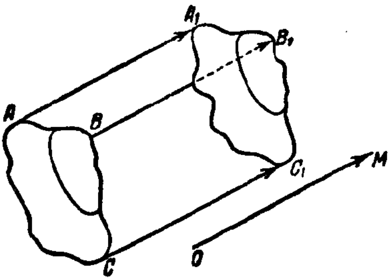

圖 3

例 2：顯然將原來作用於剛體上 A 點(圖 4)的力如沿着力的作用直線 AB 移到着力點 B，則力作用的結果不變。這樣，當用向量表示作用於剛體的力時，可將力的作用直線 AB 上的任何點取爲向量的起點。這種向量稱爲滑動向量。

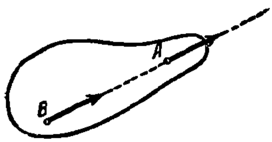

圖 4

例 3：帶電的金屬小球 O (圖 5)在它周圍的空間作成電場，在這個電場中每一個點都有電壓作用着，或說有用有固定起點的向量 H 所表示的力作用着，這種

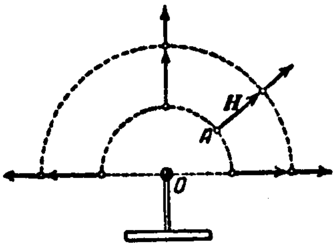

圖 5

有固定起點的向量稱為固定向量。

這樣，向量有三種型：

1）自由向量，只用三個元素：模、方位和方向所確定的；可將空間的任意點取為自由向量的起點；

2）滑動向量，用模、向量所在的直線和方向所確定；可將向量所在直線上的任何點取為滑動向量的起點。

3）固定向量，由所有的四個元素，其中也包含有向量的起點所決定。

§ 4 向量的相等

兩個自由向量 $\boldsymbol{a}$ 與 $\boldsymbol{b}$（圖 6）如有

1）相等的模：$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$,

2）相同的方位：$\boldsymbol{a}\,||\,\boldsymbol{b}$,

3）相同的方向：$\boldsymbol{a}\uparrow\uparrow\boldsymbol{b}$,

則稱為相等的。

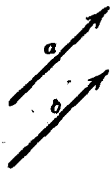

圖 6

向量的相等寫為 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$。

由相等的定義可知，兩個自由向量可以平行於自己而移動。

要兩個滑動向量相等，還需要要求它們在同一直線上；要兩個固定向量相等，還須它們有共同起點；這就是說，它們需完全重合。能够證明，滑動向量與固定向量的運算以本書中所講述的自由向量的代數學為基礎，所以今後“向量”二字只指由三個元素：模、方位與方向就確定了的“自由向量”而言。

註：由向量相等的第一個條件可見，如 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，則顯然 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，但反之不眞。例如，若將第 10 圖中正方形的兩邊 OA 和 OB 看成向量，則得 $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|$，但 $\overrightarrow{OA}\neq\overrightarrow{OB}$。還要提出注意：對向量不用"大於"與"小於"二概念，向量的不等式不可能，而且不相等的向量只比較其模，即如 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{b}$，則 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$、$|\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{b}|$ 或 $|\boldsymbol{a}|<|\boldsymbol{b}|$。

§ 5 向量乘上數量的乘法

定義 I：1) 長度(模)爲 $a\cdot|m|$，2) 與向量 $\boldsymbol{a}$ 共線而且 3) 當 $m>0$ 時，方向與 $\boldsymbol{a}$ 的相同；當 $m<0$ 時，方向與 $\boldsymbol{a}$ 的相反的新向量 $\boldsymbol{b}$ 叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 乘上實數(數量) m 的積。

向量 $\boldsymbol{a}$ 乘上數量 m 的結果寫成向量等式：

$$m\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b} \quad 或 \quad \boldsymbol{a}m=\boldsymbol{b}. \tag{1}$$

在圖 7 中用圖象表示出來向量 $\boldsymbol{a}$ 乘上數量 2 與 -2 的乘法。

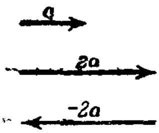

圖 7

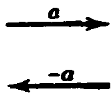

圖 8

現在來考察兩種向量乘上數量 m 的乘法的特別情形：

1) 假設 $m=0$。由定義，積 $0\cdot\boldsymbol{c}$ 是長度爲 0 的一個新向量，即零向量 $\boldsymbol{0}$。

2) 假設 $m=-1$。由定義，積 $-1\cdot\boldsymbol{a}$ 是方向與 $\boldsymbol{a}$ 的相反而長度與它的相同的向量 $\boldsymbol{b}$。這種向量簡記爲 $-\boldsymbol{a}$：

$$\boldsymbol{b}=-1\cdot\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a},$$

並且叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 的反向量(圖 8)。

定義 II: 向量 $\boldsymbol{a}$ 除上數 m, 就是它乘上 $\frac{1}{m}$, 即

$$\frac{\boldsymbol{a}}{m}=\frac{1}{m}\boldsymbol{a}. \tag{2}$$

定義III: 向量 $\boldsymbol{a}$ 乘上數 m, 得向量 $\boldsymbol{b}$。m 叫做兩個共線向量的比 $\boldsymbol{b}:\boldsymbol{a}$, 即如

$$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}m, \quad 則 \quad \boldsymbol{b}:\boldsymbol{a}=m.$$

要求兩個共線向量的比，只須求它的模的比，如果向量方向相同,取+號;如果相反,取負號,即

$$\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}=\pm\frac{b}{a}. \tag{3}$$

§ 6 單位向量

模等於單位的向量叫做單位向量。每個向量 $\boldsymbol{a}$ 都可以化爲與向量 $\boldsymbol{a}$ 的方位及方向相同的方位及方向所確定的單位向量 $\boldsymbol{a}^0$ 乘上向量 $\boldsymbol{a}$ 的模的積:

$$\boldsymbol{a}=a\boldsymbol{a}^0,$$

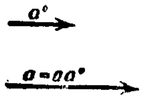

圖 9

其中 $\boldsymbol{a}^0$ 是單位向量(圖 9)。

習 題

1. 試指出下列的量中哪些是數量?哪些是向量?

1) 時間，2) 速度，3) 體積，4) 溫度，5) 力，6) 功，7) 加速度，8) 活力，9) 動量。

2. 已知正方形 $OACB$ (圖 10)。如將它的邊看成向量，試指出它們中相等的與相反的。

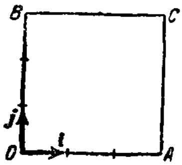

圖 10

3. 順着正方形 $OACB$ 的邊 OA 與 OB (圖 10)放上單位向量 $\boldsymbol{i}$ 與 $\boldsymbol{j}$。如果正方形的邊等於 3，試用 $\boldsymbol{i}$ 與 $\boldsymbol{j}$ 表示向量 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CB}$ 與 $\overrightarrow{BO}$。

4. 已知邊等於 a 的正方六角形。如各用 $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{p}$ 表示向量 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ 的單位向量，試用它們表示向量 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EO}$, $\overrightarrow{OC}$ 與 $\overrightarrow{BE}$。

§ 7 向量加法

假設已知幾個，例如四個隨意佈置在空間的向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$。由隨意點 O (圖 11)引一個等於已知向量中的一個的向量，例如向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$。由它的終點引一個等於已知向量中第二個向量的向量 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，然後引 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{c}$，最後引 $\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{d}$。我們得到這樣由已知向量所作成的一條折線 $OABCD$，每一個向量的終點與次一個向量的起點相重。這種由已知向量作折線的方法叫做已知向量的多角形化。封閉向量多角形 $OABCD$ 的向量

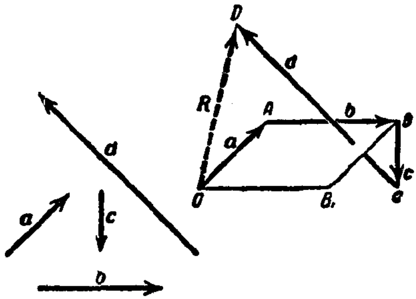

圖 11

$\overrightarrow{OD}=\boldsymbol{R}$(圖 11)叫做組成多角形的向量的和。這樣，

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OD}$$

或
$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}=\boldsymbol{R}.$$

向量相加的結果與向量多角形化的次序無關。為了證明這一點，我們在多角形 $OABCD$ 的任意兩個相隣的節上作平行四邊形，例如作平行四邊形 $OABB_1$。這時注意，向量 $\overrightarrow{OD}=\boldsymbol{R}$ 也封閉折線 OB_1BCD，即

$$\overrightarrow{OD}=\boldsymbol{R}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}.$$

完全同樣，如在向量 $\overrightarrow{B_1B}$ 與 $\overrightarrow{BC}$ 上作平行四邊形，則將向量 $\boldsymbol{a}$ 與 $\boldsymbol{c}$ 的多角形化的次序互換，其餘類推。因為連接點 O 與 D 的直線段(圖 11)比連接這兩個點的折線短，故

$$OD<OA+AB+BC+CD.$$

這就是說，

$$|\boldsymbol{R}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{c}|+|\boldsymbol{d}|$$

或
$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{c}|+|\boldsymbol{d}|, \tag{4}$$

即，向量和的模小於向量的模的和或者在下列特殊情形等於它，即 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ 共線並由同一方向所確定的特殊情形，因而也就是多角形 $OABCD$ 變為直線的情形。

在其它的特殊情形，多角形的終點可能與它的起點 O 相重。這時封閉向量 $\boldsymbol{R}=0$ 而且

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}=0,$$

即如果由已知向量所作成的多角形是封閉多邊形，那麼向量的和就等於 0。

如果向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ 是作用於剛體的一點的力的向量，那麼由力學可知，我們用所描述的多角形化的方法所作的它們的和 $\boldsymbol{R}$ 確定已知諸力的等作用力。

除向量的多角形化而外，還有將它們中心化的必要，即將向量平移到一個公共起點。

引到公共起點 O（圖 12）的兩個向量 $\boldsymbol{a}$ 與 $\boldsymbol{b}$ 的和是已知向量上所作的平行四邊形的向量對角線 $\overrightarrow{OC}$，因為

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}.$$

為了比較起見，我們可以回憶一下在力學中按平行四邊形法則加兩個速度或兩個力。

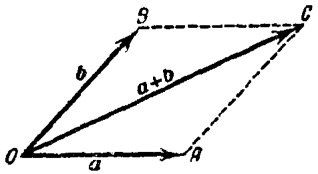

圖 12

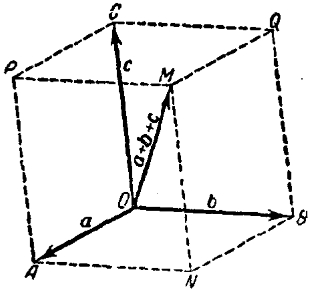

圖 13

引到一個公共起點 O（圖 13）的三個向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 與 $\boldsymbol{c}$ 的和是在已知向量上所作的平行六面體的向量對角線 $\overrightarrow{OM}$，因為

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{NM}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}.$$

§ 8 向量減法・向量和

這樣的第三個向量 **c** 叫做兩個向量的差 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b}$ 必須加上它才能得到向量 $\boldsymbol{a}$, 即

$$\text{如 } \boldsymbol{b}+\mathbf{c}=\boldsymbol{a}, \text{ 則 } \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\mathbf{c}.$$

要作差 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的圖，我們引向量 $\boldsymbol{a}$ 與 $\boldsymbol{b}$ 到公共起點 O(圖 14) 然後連接它們的終點 A 與 B。向量 $\overrightarrow{BA}$ 就是差 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$, 因爲 $\boldsymbol{b}+\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}$。由作法可知，

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\geqslant|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|. \qquad (5)$$

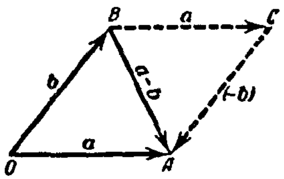

圖 14

記住下列事實是有益的：差 $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$ 的方向由被減向量的終點 B 到減向量的終點 A。

也要記着，在向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$ 與 $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$ 上所作的平行四邊形 $OACB$ (圖 12 與 圖 14) 中，一個向量對角線 $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, 而另外一個 $\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$。

定理: 要減向量 $\boldsymbol{b}$, 只須加反向量 $(-\boldsymbol{b})$ 即可。

證明: 由圖 14，求出

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$

由定理可得，每個以向量的加法與減法作爲最後運算的向量式子都可以看成向量和，例如

$$1)\ \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\mathbf{c}+\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})+(-\mathbf{c})+\boldsymbol{d}, \qquad (6)$$

$$2)\ 2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+4\mathbf{c}=2\boldsymbol{a}+(-3\boldsymbol{b})+4\mathbf{c}.$$

這樣，式子 $x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}+\cdots$(其中 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\cdots$是向量，而 $x,y,z,\cdots$ 是正或負實數)是向量和的一般形式。

習　題

5. 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 與 $\boldsymbol{b}$, 其夾角等於 60°。試作向量 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 與 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的圖，如 $a=4$ 及 $b=3$ 並求定它們的模。

6. 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 與 $\boldsymbol{b}$, 其夾角等於 45°。試作向量 $\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}-1.5\boldsymbol{b}$ 的圖並求定它們的模。

7. 在已知向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$ 與 $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$ 上作出了平行四邊形 $OADB$ (圖 15)。如果

$$BM=\frac{1}{3}BC \text{ 且 } CN=\frac{1}{3}CD,$$

試求定圖上所表出的向量 $\overrightarrow{MN}$。

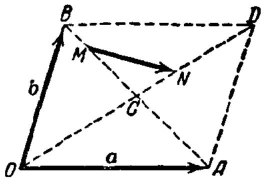

圖 15

8. 在已知向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$ 與 $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$ 上作出了梯形 $OACB$, 其中 $BC||OA$ 而且 $BC=\frac{1}{2}OA$。試求定向量 $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$ 與 $\overrightarrow{MN}$, 其中 M 與 N 各爲梯形的底 OA 與 BC 的中點。

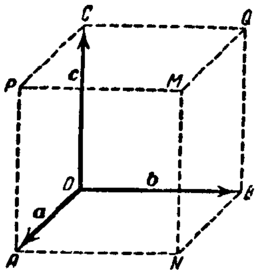

圖 16

9. 在已知直交向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$ 上作出了平行六面體 $OANBQCPM$ (圖 16)。試求向量 $\overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{NQ}$ 與它們的模。

10. 試求關聯 圖 17 中所表出的向量