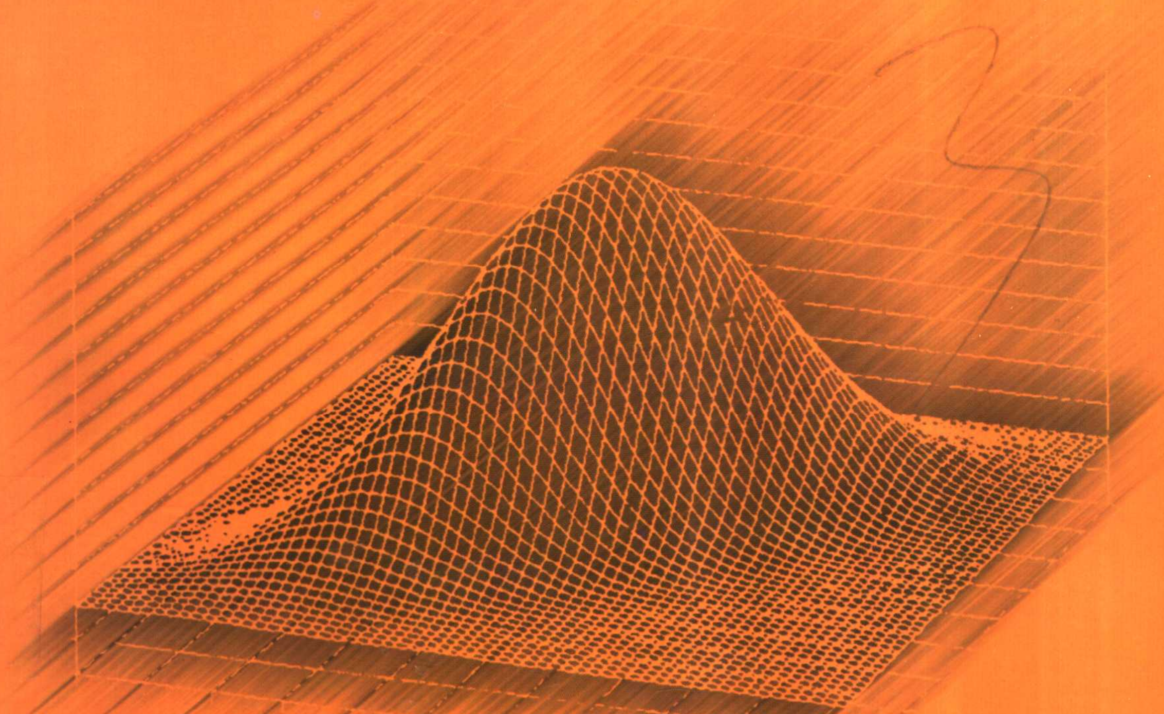
新世纪财经院校经济数学系列教材

GAILÜLUN YU SHULI TONGJI

概率论与数理统计

上海财经大学应用数学系　编



上海财经大学出版社

新世纪财经院校经济数学系列教材

概率论与数理统计

上海财经大学应用数学系　编

上海财经大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/上海财经大学应用数学系编. —上海:
上海财经大学出版社,2004.2
(新世纪财经院校经济数学系列教材)
ISBN 7-81049-991-2/O·19

Ⅰ.概... Ⅱ.上... Ⅲ.① 概率论-高等学校-教材
② 数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 086318 号

GAILÜLUN YU SHULITONGJI
概 率 论 与 数 理 统 计

上海财经大学应用数学系　编

责任编辑　刘光本　封面设计　周卫民

上海财经大学出版社出版发行
(上海市武东路 321 号乙　邮编 200434)
网　　址:http://www.sufep.com
电子邮箱:webmaster@sufep.com
全国新华书店经销
上海第二教育学院印刷厂印刷
上海浦东北联装订厂装订
2004 年 2 月第 1 版　2004 年 2 月第 1 次印刷

787mm×1092mm　1/16　19.25 印张　480 千字
印数:0 001--5 000　定价:28.00 元

内 容 提 要

本书系上海财经大学应用数学系编写的经济数学系列教材之一。全书共十一章，内容包括事件与概率、条件概率与独立性、随机变量及其分布、随机向量及其分布、数字特征与特征函数、极限定理、统计量和抽样分布、参数估计、假设检验、线性统计推断、SAS软件简介等。各章均配有适量的习题，并附有参考答案。

本书可供高等院校财经管理类专业作为教材使用，也可作为考研学生自学、复习用书。

前　言

概率论与数理统计作为现代数学的重要分支，由于它在研究方法上的鲜明特色，在自然科学、社会科学和工程技术的各个领域都有着广泛的应用。特别是最近二三十年来，概率论与数理统计的思想和方法在经济、管理、金融、保险等方面得到了大量、深入的应用，使得这些领域的研究方法和研究范围取得了实质性的进步并得到了蓬勃的发展，正因为如此，概率论与数理统计已成了财经类专业最重要的数学基础课之一。

在撰写本书时，根据我们在上海财经大学二十余年的教学实践，考虑到财经类专业的特点、后继课程以及研究生教学的需要，对教材内容作了认真精选。在写作上，我们作了以下几方面的考虑：

第一，在全书的叙述上，力求用较少和较浅的数学知识，避免采用过于抽象的数学化的论证，但仍保持系统性和严谨性。

第二，考虑到本教材的适用对象主要为财经类大学生，因此书中的大多数例题和习题都体现了经济管理的特色，以便于读者更直观、透彻地理解有关概念和方法。

第三，考虑到财经类专业对概率论与数理统计的要求也不尽相同，我们对部分内容加注了“*”号，各专业可以根据需要以及教学时数的不同，作适当取舍，对其余章节内容的教学并无影响。

第四，本书的最后一章，我们对 SAS 软件作了简要的介绍，通过这一章的学习，读者可以对这一目前国际上最流行、最优秀的统计分析软件有一个大致的了解。

本书由上海财经大学应用数学系的教师集体编写，何其祥最后进行了统稿。具体参加编写的成员有：何其祥（第一、二、八、九章），杨勇（第三、四、七章），杨晓斌（第六、十章），潘群（第五、十一章）。在编写过程中，得到了上海财经大学“2.11”教学基金的资助，并得到了上海财经大学出版社的大力协助，在此一并致谢。

限于编者水平，自知书中不当和谬误之处在所难免，恳请专家与读者不吝赐教，不胜感激。

编　者

2004 年 2 月

目　　录

第一章　事件与概率

概率论是研究随机现象的数量规律的学科，是统计学的理论基础。事件和概率是概率论中最基本的两个概念。在这一章中，我们将以深入浅出的方式介绍这些概念，并将较完整地研究一类特殊的随机现象——古典概型，之后介绍一类颇有启发性的问题——几何概率，最后给出概率的公理化定义。

第一节　随机现象与样本空间

一、随机现象

当我们观察自然界和人类社会中各种事物的变化规律时，会发现两种不同类型的现象。一种我们称之为决定性现象，它在一定的条件下必然会出现某个结果。例如，在没有外力作用下，作匀速直线运动的物体必然继续作匀速直线运动；太阳必然从东方升起；任何一种生物总要经历生长、发育、衰老直至死亡等各个阶段等。这种在一定条件下必然会发生的事情称为必然事件。反之，那种在一定条件下必然不会发生的事情称为不可能事件。例如，"在一个大气压下，没有加热到 100℃的水沸腾"是不可能的。

必然事件和不可能事件虽然表现形式有所不同，但两者的本质是一样的。必然事件的反面就是不可能事件，而不可能事件的反面就是必然事件。必然事件和不可能事件组成决定性现象，它广泛存在于自然现象和社会现象中，概率论以外的数学学科研究的就是决定性现象的数量规律。

除了决定性现象以外，在自然现象和社会现象中还存在着与它有着本质区别的另一类现象。例如，今天无法准确地确定明天的最高或最低气温；金融领域中事先无法断言将来某时刻某证交所的指数；同一条生产线上用同样的工艺生产出来的灯泡寿命长短也呈现出偶然性，这是由于在生产过程中乃至对灯泡寿命试验的过程中种种偶然性的条件差异，使得每只灯泡的寿命不能事先确定。概率论中最经典的例子要数向上掷一枚硬币，结果可能是正面也可能是反面，事先无法断定。这些例子的一个共同特点是：在基本条件不变的情况下，一系列的试验或观察会得到各种不同的结果。换言之，就某一次的试验或观察而言，它可能会出现这种结果，也可能会出现那种结果，事先无法确定，呈现出一种偶然性，这种现象称为随机现象(random phenomenon)。概率论研究的就是这种随机现象所包含的数量规律。

那么随机现象是否普遍呢？回答是肯定的。世界上的万事万物都是相互依赖、相互影响的，某一次观察或试验的结果如何，往往受到许多偶然因素的影响，表现形式往往是偶然的或"随机的"，因而随机现象是普遍存在的，从而概率论的研究不但具有理论上的意义，而且具有广泛的应用价值。

二、样本空间

对于随机现象，我们感兴趣的是它的结果，因此必须对它进行观察或试验，这种对随机现象的某一特征的试验或观察，称为随机试验，简称试验(trial)。具体说来，称一个试验为随机试验，必须满足下述条件：

(1) 试验可以在相同的条件下重复进行；

(2) 试验之前能确定所有可能的结果；

(3) 试验之前不能确定将会出现所有可能结果中的哪一个。

例如，T_1：向上掷一枚硬币，观察正反面出现的情况；

T_2：检查生产流水线上的产品是否合格；

T_3：检查某商店某柜台的营业额。

我们把随机试验的每一个可能结果称为样本点(sample point)，用 ω 表示；样本点全体组成的集合称为样本空间(sample space)，用 Ω 表示。要认识一个随机试验，首先必须弄清楚它可能出现的各种结果，因此确定样本空间是研究随机现象的第一步。下面我们来看几个例子。

［例 1-1］ 向上掷一枚骰子，观察朝上一面的点数，所有可能的结果为 $\Omega=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，如果将六个面分别涂以红、黄、蓝、绿、白、黑六种颜色，则 $\Omega=\{$红、黄、蓝、绿、白、黑$\}$，这两个样本空间表面上不同，但本质上应该是一致的，它们可以统一抽象地记为 $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_6\}$。

一般地，像上面只有有限个样本点的样本空间可以表示为 $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$。

样本空间的这种抽象表示，实质上是抓住了随机现象的本质，使得那些表面上不同而本质上一致的各种随机现象能用统一的模型来表示。例如，只包含两个样本点的样本空间，既能作为掷硬币出现正面、反面的模型，又能用于人寿保险中“生存”与“死亡”的模型，以及描述天气时“下雨”与“不下雨”的模型，或者某公共汽车站“有人排队”与“无人排队”的模型等。

［例 1-2］ 观察某电话交换台在$[0, t]$内来到的电话呼叫数，其结果显然为一非负整数，但很难确定呼叫数的上界，因此样本空间 $\Omega=\{0, 1, 2, \cdots\}$，这一样本空间中包含有无穷多个样本点，但它们可以按某种次序排列出来，这时我们称它有可列个样本点，其一般形式为 $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \cdots\}$。

［例 1-3］ 测量某一零件的长度，考察其测量结果与真正长度的误差，样本空间 Ω 可取作$[-M, M]$，其中 M 为最大正误差，如果无法确定这一最大值，将 Ω 取作$(-\infty, +\infty)$也无妨。这里的样本空间$[-M, M]$也含有无穷多个样本点，但它无法像例 1-2 中的样本空间那样将样本点一一排出，我们称这样的样本空间所包含的样本点为不可列个。

［例 1-4］ 为评价某学校小学生的生长发育状况，需要同时测量小学生的身高、体重和胸围，在这一随机试验中，任一可能的结果即样本点是一个有序数组(x, y, z)，其中 x、y、z 分别表示被测量小学生的身高、体重和胸围，因此样本空间为 $\Omega=\{(x, y, z) \mid 0<x\leqslant a, 0<y\leqslant b, 0<z\leqslant c\}$，这里的 a、b、c 分别表示该校学生身高、体重和胸围的最大值。

从以上这些例子不难发现，随着所讨论随机试验的不同，相应的样本空间可能很简单，也可能很复杂。在今后的讨论中，我们一般都假定样本空间是预先给定的，这种必要的抽象使我们能更好地抓住随机现象的本质，得到的结果也能得到广泛的应用。

第二节 随机事件与频率稳定性

一、随机事件

对于随机现象，我们关心的通常是在随机试验中某一结果是否会出现，或会出现什么结果，这些结果称为随机事件，简称事件(event)。习惯上，用 A, B, C 等大写拉丁字母表示随机事件。

例如在例 1-1 中，样本空间 $\Omega=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，如果以 A 表示"得到的为奇数"，则显然 $A=\{1, 3, 5\}$，B 表示"得到的点数不大于 4"，则 $B=\{1, 2, 3, 4\}$，这里的 A、B 均为随机事件，它们都是由 Ω 中的若干个样本点所构成。当然，像"出现的点数为 1"、"出现的点数为 5"等也都是随机事件，它们只包含单个样本点。又如在考察测量误差的例 1-3 中，样本空间 $\Omega=[-M, M]$，如果以 A 表示"测量结果与真正长度的误差绝对值不大于 0.5 个单位"，则 $A=[-0.5, 0.5]$。

由此可见，准确地讲，随机事件是由若干个样本点组成的集合，或者说是样本空间的某个子集。称某个随机事件 A 发生，当且仅当该事件所包含的某个样本点出现。

由于随机事件是样本空间的子集，所以样本空间 Ω 本身也可以看做一个事件；由于在任何一次试验中总有 Ω 中的某一样本点出现，也就是说 Ω 总会发生，所以 Ω 就是必然事件。类似地，不包含有任何样本点的空集 $\varnothing$ 也可以作为一个事件，由于在任何一次试验中总不可能有 $\varnothing$ 中的某一样本点出现，即 $\varnothing$ 总不发生，因此 $\varnothing$ 就是不可能事件。当然，必然事件和不可能事件均属决定性现象，但我们宁可把它们作为随机现象的两个极端来处理，这样既是必需的也是方便的。

二、事件之间的关系与运算

给定一个样本空间，显然可以定义不止一个随机事件，分析这些事件之间的相互关系不仅有助于认识事物的本质，而且可以通过对简单事件规律的研究去推算复杂事件的规律。下面我们介绍事件之间的相互关系和运算。在下面的叙述中，如果没有特别声明，均认为样本空间 Ω 已经给定，而 A, B, $A_i(i=1, 2, \cdots)$ 等均表示 Ω 的一些事件。

1. 事件之间的关系

(1) 包含关系

若事件 A 的每一个样本点都属于事件 B，则称 A 包含于 B，或称 A 是 B 的特款，记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$，这时事件 A 的发生必然导致事件 B 的发生。

例如在例 1-2 中，若以 A 表示事件"$[0, t]$内来到的电话呼叫数不少于 1 500 次"，而 B 表示事件"$[0, t]$内来到的电话呼叫数不少于 1 200 次"，那么 $A=\{1\,500, 1\,501, \cdots\}$，$B=\{1\,200, 1\,201, \cdots\}$，容易看出 A 的每一个样本点都属于事件 B，即 $A\subset B$，此时 A 的发生必然导致事件 B 的发生。显然，对任一事件 A，总有 $\varnothing\subset A\subset\Omega$。

(2) 相等事件

对事件 A 与 B，如果同时成立 $A\subset B$ 和 $B\subset A$，则称事件 A 与事件 B 是等价的或 A 等于 B，记为 $A=B$。实际上，此时 A 与 B 表示同一个事件，它们所包含的样本点完全相同。

(3) 不相容事件

若在任何一次试验中,事件 A 与 B 不可能同时发生,则称事件 A 与 B 互不相容,也称 A 与 B 为互斥事件。类似地,若 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容,则称这 n 个事件互不相容。更进一步,若可列个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 两两互不相容,则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 互不相容。

2. 事件之间的运算

(1) 交(积)

由同时属于事件 A 与事件 B 的样本点组成的集合称为事件 A 与 B 的交或积,记为 $A \cap B$ 或 AB,事件 AB 表示事件 A 与事件 B 同时发生。显然,A 与 B 互不相容,即 $AB = \varnothing$。

两个事件的交运算可以容易地推广到 n 个事件以至于可列个事件的场合。事件 A_1, $A_2, \cdots, A_n$ 的交事件记为 $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$,它由同时属于 A_1、$A_2, \cdots, A_n$ 的样本点组成,表示 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生。在可列个事件的场合,我们定义 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \triangleq \lim\limits_{n\to\infty} \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$。

(2) 并

由至少属于事件 A 与 B 中的一个样本点组成的集合称为事件 A 与 B 的并,记为 $A \cup B$,事件 $A \cup B$ 表示事件 A 与 B 中至少有一个发生。

如果事件 A 与 B 互不相容,则称它们的并为和,记为 $A + B$。

两个事件的并运算可以容易地推广到 n 个事件以至于可列个事件的场合。事件 A_1, $A_2, \cdots, A_n$ 的并事件记为 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$,它由至少属于 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中的一个样本点组成,表示 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一个发生。同样,如果事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 互不相容,则称它们的并为和,记为 $A_1 + A_2 + \cdots + A_n$ 或 $\sum\limits_{i=1}^{n} A_i$。

对于可列个事件的场合,我们定义 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \triangleq \lim\limits_{n\to\infty} \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$。进一步,若这可列个事件互不相容,则称它们的并为和,记为 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i$。

(3) 逆

对于事件 A,由所有不属于 A 的样本点组成的集合称为事件 A 的逆事件或对立事件,记为 $\overline{A}$。$\overline{A}$ 表示事件 A 不发生。例如,若 A 表示事件"$[0, t]$内来到的电话呼叫数为偶数或 0",则 $\overline{A}$ 表示"$[0, t]$内来到的电话呼叫数为奇数"。显然,若 $\overline{A}$ 是 A 的对立事件,则 A 也是 $\overline{A}$ 的对立事件,即 $\overline{\overline{A}} = A$。必然事件和不可能事件互为对立事件。

(4) 差

由属于事件 A 而不属于 B 的样本点组成的集合称为事件 A 与 B 的差,记为 $A - B$,事件 $A - B$ 表示事件 A 发生而事件 B 不发生,显然 $A - B = A\overline{B}$。

在进行事件的运算时,我们作如下顺序的约定:首先进行逆的运算,再进行交的运算,最后才进行并或差的运算。

由于事件是通过集合来定义的,所以上面介绍的事件之间的关系与运算和相应的集合之间关系与运算非常相似。一方面,我们可以借助集合论的知识和方法来帮助理解事件之间的关系与运算,譬如可以用直观的维恩(Venn)图(见图 1-1)来描述上面介绍的这些关系与运

算；但另一方面，应学会用概率论的观点来解释这些关系与运算。

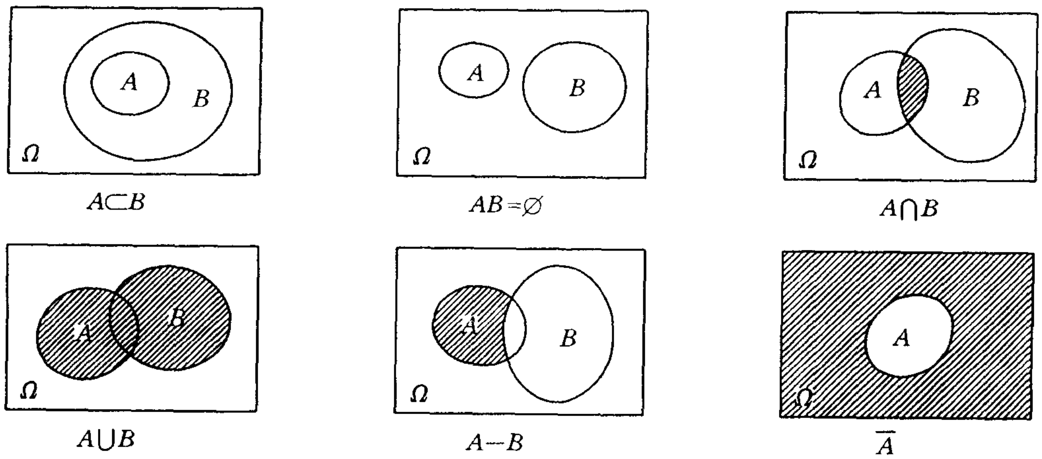


图 1-1　事件之间的关系与运算

对于事件之间的运算，有以下法则：

① 交换律：$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

② 结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

③ 分配律：$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$；

④ 德莫根(De Morgan)定理：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$。

上述运算法则可以推广到多个事件甚至可列个事件，譬如对于德莫根定理，我们有：

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A}_i,\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A}_i;$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcap_{i=1}^{\infty}\overline{A}_i,\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{A}_i。$$

[例 1-5]　设 A，B，C 为三个事件，利用它们表示下列事件：

(1) A 发生而 B，C 都不发生：$A\overline{B}\,\overline{C}$ 或 $A-B-C$ 或 $A-(B\cup C)$；

(2) 三个事件都不发生：$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$或$\overline{A\cup B\cup C}$；

(3) 三个事件中至少发生一个：$A\cup B\cup C$ 或 $ABC+AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC+A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C$。

三、频率与概率

某一次试验或观察中出现结果的偶然性并不等于说随机现象是杂乱无章和无规律的，当我们对随机现象进行大量重复的试验或观察时，就会呈现出明显的规律性——频率稳定性。

定义 1-1　对于随机事件 A，若在 N 次试验中出现了 n 次，则称

$$F_N(A)=\frac{n}{N}$$

为随机事件 A 在 N 次试验中出现的频率(frequency)。

为了说明频率稳定性，让我们先来看一些著名的例子。

[例 1-6] 抛一枚硬币，可能出现正面，也可能出现反面，事先作出确定的判断是不可能的。但假如硬币是均匀的，那么，我们有理由认为出现正面和反面的可能性应该一样，即在大量重复的试验中出现正面和反面的频率都应接近 50%。为验证这一点，历史上曾有不少人做过试验，其结果见表 1-1。

表 1-1 掷硬币试验数据表

实 验 者	投掷数	出现正面的次数	出现正面的频率
德莫根(D. Morgan)	2 048	1 061	0.518 1
蒲　丰(Buffon)	4 040	2 048	0.506 9
皮尔逊(K. Pearson)	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊(K. Pearson)	24 000	12 012	0.500 5

[例 1-7] 任意指定一本书，翻到任意一页，任意指定该页中的某一行及该行中的任意一个位置，记录所得到的结果。大量重复这一试验，会发现 26 个字母和其他字符(包括标点符号和空格)的使用频率相当稳定，表 1-2 是经过大量试验后得出的。

表 1-2 字母及其他字符使用频率

字　符	其他	E	T	O	A	N	I	R	S
频　率	0.2	0.105	0.072	0.065 4	0.063	0.059	0.055	0.054	0.052
字　符	H	D	L	C	F	U	M	P	Y
频　率	0.047	0.035	0.029	0.023 4	0.022 5	0.022 5	0.021	0.017 5	0.012
字　符	W	G	B	V	K	X	J	Q	Z
频　率	0.012	0.011	0.010 5	0.008	0.003	0.002	0.001	0.001	0.001

这样的例子还可以举出很多，这些例子表明了这样一个事实：虽然在一次试验或观察中某一个随机事件 A 是否发生是偶然的，但当试验次数 N 很大时，事件 A 出现的频率总在某个固定常数附近摆动，而且一般来说，N 越大，摆动的幅度越小，这一规律称为频率稳定性(frequency stability)。

频率稳定性是由观察对象的固有属性所决定的。抛掷一枚硬币，可能出现正面或反面，假如硬币是均匀的，这一属性决定了当你多次抛掷硬币时，出现正面的次数总是接近总抛次数的 $\frac{1}{2}$；至于英文字母被使用的频率，虽然各个作家的写作风格各不相同，书籍出版社也各有自己的排版方式，但字母被使用的情况总是受着文字结构、语法结构这些固有规律的支配，正是这些规律决定了英文字母使用频率的稳定性。因此，随机事件的频率稳定性表明了一个随机事件发生的可能性大小，是随机事件本身固有的客观属性，因此可以对它进行度量。对于随机事件 A，我们用 $P(A)$ 来刻画随机事件 A 发生的可能性大小，称 $P(A)$ 为事件 A 发生的概率

(probability)。习惯上，称这一定义为概率的统计定义。显然，$P(A)$即为频率稳定性中的稳定值。

对于随机现象，仅讨论它可能出现什么结果的价值不大，而在讨论可能出现各种结果的同时，指出各种结果出现的可能性的大小才有意义。概率概念的引进使得我们可以对随机现象作出定量的研究。

从上述可见，频率和概率既非同一概念，又有十分密切的联系。例如，当试验次数 N 无限增大时，频率和概率之间应有某种极限关系，这正是概率论中的一大课题——极限理论的雏形，它的严格讨论将放在第六章中给出。

第三节　古典概型与几何概率

一、古典概型

概率论的一个基本任务，就是要计算各种随机事件发生的概率。在第二节中，我们将概率描述性地定义成事件发生的可能性大小或者说频率的稳定值，但在许多实际问题中，为了求得某一事件的概率而进行大量重复的试验，有的是不经济的，有的是不可能的，所以我们无法根据这样的定义来计算各种事件发生的概率。

在这一节中，我们先讨论一类简单的随机试验，这类随机试验具有以下两个性质：

(1) 试验的全部可能结果只有有限个，或者说只有有限个样本点，譬如 n 个，即

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$$

(2) 每个样本点 $\omega_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 出现的可能性即发生的概率相同：

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = \cdots = P(\omega_n) = \frac{1}{n}$$

具有这两个特征的随机现象的数学模型称为古典概型(classical probability model)。

这类随机现象是概率论发展初期人们主要的研究对象，许多最初的概率论的概念和结果也都是对它作出的，甚至到了现在，古典概型在概率论中仍有一定的地位。这一方面是因为它简单而且直观，对它的讨论有助于理解概率论中的许多基本概念；另一方面，许多实际问题都可以概括为这一模型，古典概型有着较广泛的应用。

对于古典概型，它的样本空间为 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$，每个样本点出现的概率均为$\frac{1}{n}$，若 A 为任一事件，由于它的每一个样本点的出现都可导致 A 的发生，而且每次试验不可能有两个样本点同时出现，因此它的概率 $P(A)$可看做 A 中各个样本点的概率之和。例如，若 $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \cdots, \omega_{i_m}\}$，则

$$P(A) = P(\omega_{i_1}) + P(\omega_{i_2}) + \cdots + P(\omega_{i_m}) = \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{m} = \frac{m}{n}$$

所以在古典概型中，事件 A 的概率是一个分数，分母为样本点总数 n，而分子是 A 所包含的样本点个数 m。由于 $\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \cdots, \omega_{i_m}$ 的出现必然导致 A 的发生，或者说它们的出现对 A

的发生有利，因此通常称 $\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \cdots, \omega_{i_m}$ 为 A 的“有利场合”，这样

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{A\text{ 包含的样本点数}}{\text{样本点总数}}=\frac{A\text{ 的有利场合数}}{\text{样本点总数}}$$

法国数学家拉普拉斯(Laplace)在 1812 年把上式作为概率的一般定义，但因为这一定义只适合于古典概型，因此我们现在称它为概率的古典定义。

[**例 1-8**] 从 0, 1, …, 9 这十个数字中任取一个，求取得奇数数字的概率。

解 将从 0, 1, …, 9 这十个数字中任取一个的所有可能结果作为样本空间，样本点总数 $n=10$，以 A 记取得奇数数字的事件，A 的有利场合数 $m=5$，所以

$$P(A)=\frac{5}{10}=0.5$$

[**例 1-9**] 足球比赛共有 24 支球队参加，将它们分成两组(每组 12 队)，求最强的两支球队分在不同组的概率。

解 将 24 支球队分成两组(每组 12 队)的所有可能结果取作样本空间，所有可能的分法为组合数 C_{24}^{12}，以 A 记最强的两支球队分在不同组的事件，A 的有利场合数的计算可先从 22 支弱队中选取 11 支球队，再从 2 支强队中选取 1 支，共有 $C_{22}^{11}\cdot C_2^1$ 种分法，所以

$$P(A)=\frac{C_{22}^{11}\cdot C_2^1}{C_{24}^{12}}=\frac{12}{23}$$

[**例 1-10**] 某批产品共 N 件，其中有 M 件次品，无放回地从中任取 n 件产品，恰好有 k 件次品的概率是多少？

解 将从 N 件产品中任抽 n 件产品的所有可能结果取作样本空间，总的抽法有 C_N^n 种。以 A 记抽取的 n 件产品中恰有 k 件次品的事件，A 的有利场合数的计算先要从 M 件次品中抽取 k 件，可能的抽法有 C_M^k 种，又要从 $N-M$ 件正品中抽取 $n-k$ 件，同理有 C_{N-M}^{n-k} 种取法，从而随机地抽取 n 件，恰好有 k 件次品的取法共有 $C_M^k\cdot C_{N-M}^{n-k}$ 种，因此所求概率为

$$P(A)=\frac{C_M^k\cdot C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}\qquad k=0,\ 1,\ \cdots,\ \min(M,\ n)$$

这一例子可以说明古典概型在产品抽样检验中的应用。在实际产品检验中，可以采用普查和抽查两种方式。但许多大工厂产量很高，每天生产的产品数以万计，对这些产品进行全面的普查通常是不可能的也是不经济的；另外，有的产品检验带有破坏性，如灯泡寿命的检验、棉纱断裂强度的检验等，因此经常采用的检验方法是抽样检验，根据抽出来的若干件产品的情况去推断整批产品的质量情况。

[**例 1-11**] 设有 n 个球，每个球都以相同的概率 $\frac{1}{N}$ 落到 $N(N\geqslant n)$ 个格子的每一格中，求：

(1) 某指定的 n 个格子中各有一球的概率；

(2) 恰有 n 个格子中各有一球的概率。

解 (1) 以 A 表示“某指定的 n 个格子中各有一球”的事件，由于每个球可以落入 N 个格子的任一格中，所以 n 个球在 N 个格子中的分配法共有 N^n 种，而 A 的有利场合数显然为 $n!$，所以

$$P(A)=\frac{n!}{N^n}$$

(2) 以 B 表示"恰有 n 个格子中各有一球"的事件，由于 n 个格子可以任选，共有 C_N^n 种选法，对于每一种选定的 n 个格子，有利场合数正如第一小题一样为 $n!$，所以

$$P(A)=\frac{C_N^n n!}{N^n}$$

[例 1-12] 袋中有 a 个白球和 b 个黑球，每次从袋中任取一球，取出的球不再放回去，求第 k 次取到白球的概率。

解 以 A_k 表示"第 k 次取到白球"这一事件，为了求 A_k 发生的概率，我们设想每个球都是有区别的，譬如白球分别标有编号 1, 2, …, a，黑球的编号为 $a+1$, $a+2$, …, $a+b$，将它们全部取出排成一行，每一种可能的排列作为样本点，所有可能的排列结果为样本空间，样本点总数为 $(a+b)!$，而 A_k 的有利场合数可以这样来计算：第 k 个位置只放白球，而其他 $a+b-1$ 个位置可以任意放置，因此有利场合数为 $a(a+b-1)!$，于是有

$$P(A_k)=\frac{a(a+b-1)!}{(a+b)!}=\frac{a}{a+b}\qquad k=1,\ 2,\ \cdots,\ a+b$$

注意到这一概率与 k 无关，即取到白球的概率与取球的先后次序无关，如将这一模型用于抽签，则表示抽签是公平的。

如果认为同颜色的球之间是无区别的，仍将全部球取出后排成一行。此时，若将 a 个白球的位置固定，则全部球的排列就完全确定，每一种这样的排列作为一个样本点，样本点总数为 C_{a+b}^a，而 A_k 的有利场合数为 C_{a+b-1}^{a-1}，这是由于第 k 个位置必须放白球，只有一种放法，而剩下的 $a+b-1$ 个位置上有 $a-1$ 个位置放置白球，共有 C_{a+b-1}^{a-1} 种放法，因此

$$P(A_k)=\frac{C_{a+b-1}^{a-1}}{C_{a+b}^a}=\frac{a}{a+b}\qquad k=1,\ 2,\ \cdots,\ a+b$$

考虑以上两种不同的解法，其主要差别在于选取的样本空间不同，第二种解法中的每一个样本点是由第一种解法中 $a!\cdot b!$ 个样本点合并而成的。

从以上这些例子可以看出，古典概型中事件的概率的计算有时比较容易，有时有一定的技巧性。计算的要点一是要计算样本点的总数，二是要求出有关事件的有利场合数。而在这些计算中，经常需要借助排列与组合公式。另外，在讨论古典概型的问题时，我们常常会用一些直观的形象化的模型来描述，譬如说摸球模型，这样处理的好处是使得许多具体的问题都能用同一模型来表达，从而抓住了随机现象的本质，不至于被个别具体情况所蒙蔽。

二、几何概率

在古典概型中，利用等可能性的概念，成功地计算了一类问题的概率。不过，除了等可能性，古典概型还要求样本点总数有限，对于试验的可能结果有无穷多种的情形，概率的古典定义并不适用。然而，实际问题中经常出现试验的可能结果有无穷多种，但仍有某种等可能性的情形。请看下面的例子。

[例 1-13] 在一个形状为旋转体的均匀陀螺的圆周上均匀地刻上区间[0, 3)上的数字。