教育部师范司组织编写

小学教师进修高等师范专科小学教育专业教材

（理科方向）

高等数学 上

主　编　邱森

高等教育出版社

高等数学 上

教育部师范教育司组织编写

小学教师进修高等师范专科小学教育专业教材

（理科方向）

高等数学 上

主编 邱 森

编写人员 陈永明 王家凤 邱 森

高等教育出版社

内容提要

本书叙述微积分的初步知识，内容分为函数、极限与连续、导数和微分、导数的应用、不定积分、定积分等6章，可作为在职小学教师进修高等师范专科小学教育专业的教材使用。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学　上册/邱森主编；陈永明，王家凤编．—北京：高等教育出版社，1995(2003重印)
ISBN 7-04-005678-X

Ⅰ．高…　Ⅱ．①邱…②陈…③王…　Ⅲ．高等数学　Ⅳ．013

中国版本图书馆CIP数据核字（95）第14056号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　址	http://www.hep.edu.cn
总　机	010-82028899		http://www.hep.com.cn

经　销	新华书店北京发行所		
印　刷	河北省香河县印刷厂		
开　本	850×1168　1/32	版　次	1995年12月第1版
印　张	9.875	印　次	2003年8月第7次印刷
字　数	237 000	定　价	12.70元

前　言

本教材原由上海市教育委员会师资处组织编写，供小学教师进修高等师范专科小学教育专业理科方向使用．现本教材已作为教育部师范教育司组织编写并向全国推荐使用的“小大专”教材之一．

设置小学教师进修成人高等师范专科小学教育专业是以中国教育“面向现代化、面向世界、面向未来”为指导，旨在全国提高小学教师的思想政治、职业道德、专业知识、教育理论、教育教学能力、教育教学研究能力等素质，建立一支适应21世纪初等教育改革发展和需要的新型的小学师资队伍．

编写小学教育专业的教材，力求从我国社会发展的客观要求和小学在职教师的特点出发，体现时代的先进性和创新性；知识体系的科学性和系统性；师范教育的专业性和综合性；教材内容的应用性和针对性．编者在编写时尽可能把最新的研究成果吸收并渗透到各课程教材中去；在专业知识的安排上，注意与中等师范及高等师范本科阶段知识结构的衔接；在综合知识方面，针对小学教师既有明确的学科定向，也能兼教其他学科的需要，加强基础，拓宽知识面；在教材的编排体例上，根据小学教师在职、成人、师范教育的特点，安排了学习提要、思考与练习、参考资料等，便于学员业余进修及自学．

为保证教材质量，上海教委师资处对该课程的教材编写大纲，请有关专家进行了论证，在教材完稿后，又请专家进行审定，然后修改完稿．

由于小学教育专业教材的编写出版是一项全新的工作，不当之处在所难免，希望广大读者和专家给予批评、指正．

高等教育出版社

1999年7月

目　录

绪　言

本书包括微积分、线性代数和向量代数等内容.

微积分是研究函数的微分、积分及其应用的数学分支. 16、17世纪,由于力学、航海、天文学的发展,提出了两大类科学问题,一类是在研究物体的运动时要求出它在任一时刻的速度和加速度,或者在研究光线通过透镜的规律时要求出光滑曲线上给定点的切线和法线等,由此产生了微分学. 另一类是研究曲线的长度、物体的体积和曲面的面积等问题,由此产生了积分学. 17世纪后期牛顿(I. Newton, 1642—1727)和莱布尼兹(G. W. Leibniz, 1646—1716)分别在研究物理和几何的过程中,总结前人经验,建立了微积分,为许多不同的物理和几何问题提供了统一的数学方法,第一次指出微分和积分是互逆的两种运算. 微积分的建立促进了数学的飞跃发展,也为天文、力学、物理、化学等提供了重要的数学工具. 现在,在生物学、医学、海洋学、工程学、气象学和经济学等很多领域都要用到微积分.

线性代数和向量代数是代数和几何学科中重要的工具. 它们不仅在自然科学和工程技术中,甚至在社会科学中,都得到了广泛的应用.

我们知道,任何知识只有用较高的观点来审视,才能看清它的本质. 学习高等数学,可以对小学数学教学中遇到的一些有关知识,例如圆周率的来源、循环小数化分数的原理等,有更深切的理解. 更重要的是,通过高等数学的学习,可以学到一些现代的数学思

想、方法以及数学的应用，从而提高我们思维的层次，使自已对数学从形式上的了解逐步进入实质性的理解，能居高临下地分析处理好小学数学教材和教学中遇到的一些问题.

第一章 函　　数

函数是近代数学中重要的概念，其应用极其广泛．本章将对函数的意义、性质、运算等进行研究，并且对基本初等函数、初等函数作概括的介绍．

一　函数的一般研究

1.1　函数的概念

1．常量与变量

我们在日常生活和工作中，会遇到各种各样的量．譬如，我们到商店去买某种商品，单价是每千克 3 元，我们可以买 1 千克，也可以买 2 千克、3 千克……相应的总价就是 3 元、6 元、9 元…….

在这个问题中，我们可以认为单价每千克 3 元是不变的．这种在某一过程中，数值保持不变的量叫常量．然而购买的千克数与总价，是可以变动的．这种在某一过程中，可以取不同数值的量叫变量．

通常我们用字母 a, b, c, k, m, n…表示常量，用字母 x, y, z, u, v… 表示变量．

常量与变量并不是绝对的．同样是该种商品的单价，在上面讨论时，看作常量，但在另外的场合或许就成为变量．譬如，我们考察该商品近几年来的单价变动情况，这时，单价就成了变量了．

任何一个变量都有一定的变化范围.

变量的变化范围有多种表示法，常见的有以下几种：

第一种，用不等式表示.

如
$$x>2,$$
$$x\leqslant 3,$$
$$2<x\leqslant 3,$$
$$x\geqslant 2 \text{ 或 } x\leqslant -2$$
等等都是用不等式表示的.

第二种，用集合记号表示.

如上面诸不等式所对应的数集，可记为
$$\{x|x>2\},$$
$$\{x|x\leqslant 3\},$$
$$\{x|2<x\leqslant 3\},$$
$$\{x|x>2\}\cup\{x|x\leqslant -2\}.$$

通常，还用约定的字母来表示数集.如 N(自然数集)，Z(整数集)，Q(有理数集)，R(实数集)，R^{+}(正实数集).

第三种，如变量的变化是连续的，通常还可用区间表示，这是本书中用得较为普遍的一种.

区间分有限区间和无限区间两种，有限区间指介于两实数间的全体实数所组成的数集，无限区间表示大于(或小于、不大于、不小于)某个实数的实数组成的数集，或者全体实数组成的数集.

如果区间有端点的话，这个端点可以包含在所论及的区间之内，也可以不包含在所论及的区间之内.

这样一来，有限区间就有以下四种：

(1) $[a, b]$，它表示 $\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$，即左、右端点都包含在内.这种区间叫闭区间.

(2) (a, b)，它表示 $\{x|a<x<b\}$，即左、右端点都不包含在

内．这种区间叫开区间．

(3) $(a, b]$，它表示 $\{x|a<x\leqslant b\}$，即左端点 a 不包含在内，而右端点 b 包含在内．

(4) $[a, b)$，它表示 $\{x|a\leqslant x<b\}$，即左端点 a 包含在内，而右端点 b 不包含在内．

以上都假定 $a<b$，x 表示变量．

无限区间有以下五种：

(1) $[a, +\infty)$，它代表 $\{x|x\geqslant a\}$；

(2) $(a, +\infty)$，它代表 $\{x|x>a\}$；

(3) $(-\infty, a]$，它代表 $\{x|x\leqslant a\}$；

(4) $(-\infty, a)$，它代表 $\{x|x<a\}$；

(5) $(-\infty, +\infty)$，它代表 R，

其中 x 表示变量．$+\infty$，$-\infty$ 分别读作"正无穷大"和"负无穷大"．要注意，$+\infty$，$-\infty$ 不是数．

2．函数概念

变量与变量之间常常有一定的相依关系．譬如上面所说到的购买商品的问题．每千克 3 元（常量），购买的千克数 x 与总价 y 之间，就有关系 $y=3x$．当 x 为 1（千克）时，总价 y 为 3（元），当 x 为 2 时，y 为 6……总之，x 取一个确定的值，y 总有唯一个值与它对应．

一般地，如果 x 和 y 是两个变量，当变量 x 在某个范围 D 中任意取定一个数值时，按照一定的法则，变量 y 总有唯一确定的数值与它对应，则变量 y 叫做变量 x 的函数．记作

$$y=f(x),\quad x\in D,$$

其中变量 x 叫自变量，变量 y 叫做因变量，自变量 x 的取值范围 D 叫做函数的定义域，和 x 的值相对应的 y 的值叫做函数值．当 x 遍取定义域 D 中一切数时，与它对应的 y 值组成的数集叫做函数的

值域.

当自变量 x 取某一个值 x_0 时，对应的函数值用记号 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$ 表示.

对于刚才讨论的购买商品所得的函数 $y=3x$ 来说，对应法则就是将"自变量的取值乘 3",由此就可以得到函数的对应值. 自变量 x 只可取非负实数,即定义域为

$$D=\{x|x\geqslant 0\}.$$

我们约定，如果不考虑自变量和因变量的实际意义而抽象地研究函数时，函数的定义域就是自变量所能取的使函数有意义的一切实数值.

例 1.1 已知函数 $f(x)=2x^2+x-1$,

(1) 写出它的定义域;

(2) 求 $x=2$ 时的函数值 $f(2)$;

(3) 求 $x=x_0+\Delta x$ 时的函数值 $f(x_0+\Delta x)$.

其中 Δx 是一个完整记号,表示一个实数.

解 (1) $D=R$.

(2) $f(2)=2\cdot 2^2+2-1=9$.

(3) $$\begin{aligned} f(x_0+\Delta x) &= 2(x_0+\Delta x)^2+(x_0+\Delta x)-1 \\ &= 2x_0^2+4x_0\cdot\Delta x+2(\Delta x)^2+x_0+\Delta x-1. \end{aligned}$$

如果考虑自变量和因变量的实际意义，那么函数的定义域就是自变量所能取的使函数有意义，且又符合实际意义的一切实数值.

例如，写出函数 $S=\pi R^2$ 的定义域(其中 S 表示圆的面积，R 表示圆的半径)时，光考虑函数式本身，自变量 R 可取一切实数. 但是, R 表示圆的半径,考虑它的实际意义,所以应有

$$R>0,$$

即该函数定义域是$(0, +\infty)$.

函数有三种表示法，即列表法、解析法和图象法。

关于函数概念，有以下两个问题值得注意：

第一，确定函数的要素是对应法则和定义域.

在函数的定义中，包含着三个因素，即定义域、对应法则和值域. 在这三个因素中，定义域和对应法则确定了，那么，对于定义域中每一个自变量的取值，都可得到对应的函数值，从而函数值的范围(值域)就完全确定了. 所以，确定函数的要素就是定义域和对应法则.

因此，如果有两个函数，它们的定义域相同，对应法则也完全一致(从而它们的值域也相同)，那么这两个函数是同一个函数。

例 1.2 判断下列各对函数是否相同，并说明理由：

(1) $f(x)=\frac{x}{x}$, $\varphi(x)=1$;

(2) $f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$, $\varphi(x)=1$;

(3) $y=x^2$, $x=\sqrt{y}$;

(4) $S=\frac{1}{2}at^2$, $y=\frac{1}{2}ax^2$

解 (1) 不是同一个函数，因为定义域不同. 前者定义域为$\{x|x\neq 0\}$，后者为 R.

(2) 是同一函数，因为对应法则与定义域都相同.

(3) 不是同一函数，因为对应法则与定义域都不相同. 前者对应法则是指“自变量的平方”，后者为“自变量开平方并取算术根”，前者定义域为 R，后者定义域为全体非负实数.

(4) 是同一函数，因为对应法则与定义域都相同，仅仅是变量所取字母不一样而已.

第二，$f(x)$中的 f 是表示对应法则的记号.

$f(x)$中的 f 与 x 不是相乘关系，而是自变量 x 经过对应法则 f 的对应之后，得到 $f(x)$. f是表示某一种对应法则. 过去，我们

学过字母表示数，字母表示点，这里用字母来表示对应法则. 字母表示对应法则与字母表示数有类似的地方. 例如选取字母表示对应法则时，有一定的随意性. 正如列方程解应用题时，可以设未知数为x，也可以为y，我们遇到一个函数，可以将它的对应法则设为f，也可以设为φ、g等等. 但是一旦设定，在讨论问题的过程中，f（或φ、g）的意义要保持同一性. 遇到不同的函数，就要用不同的字母来表示.

3. 分段函数

我们先来看一个实际例子.

某市出租车收费标准是这样的：起步费12元，超过6公里，以每半公里车费0.80元计算，不到半公里按半公里计. 那末出租车收费y（元）与行驶路程x（公里）之间的函数关系可表示为：

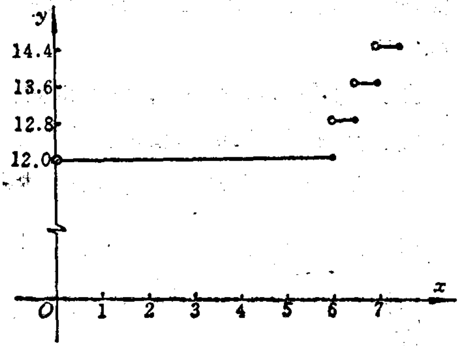

图 1-1

$$y=\begin{cases}12, & 0<x\leqslant 6,\\ 12+0.8, & 6<x\leqslant 6.5,\\ 12+2\times 0.8, & 6.5<x\leqslant 7,\\ 12+3\times 0.8, & 7<x\leqslant 7.5,\\ \cdots\cdots & \end{cases}$$

像这种自变量在不同范围内，用不同的对应法则来表示的函数叫分段函数(图1-1).

在求分段函数的函数值时，要特别注意自变量的值落在哪一范围，因为在不同范围，函数的对应法则是不一样的.

例1.3 **某市市内私人电话收费标准是：月租费18元，如果**

通话超过 60 次，那么，超过部分每次通话以 0.10 元计算.

(1) 试列出月通话次数与月电话费(元)的函数关系式;

(2) 某户两个月通话次数分别为 40 次与 70 次，试求这两个月的月电话费.

解 (1) 设月通话 x 次，月电话费为 y 元，则

$$y=\begin{cases}18, & 0\leqslant x\leqslant 60,\ x\in Z,\\ 18+0.10\times(x-60), & x>60,\ x\in Z.\end{cases}$$

(2) $x=40$ 时，$y=18$(元)，

$$\begin{aligned}x=70\text{ 时，}\quad y&=0.10(x-60)+18\\ &=0.10(70-60)+18=19(\text{元}).\end{aligned}$$

1.2 函数性质研究

1. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域是 D，如果对任意 $x\in D$，都有 $-x\in D$（即定义域关于原点对称），且满足

$$f(-x)=f(x), \tag{1.1}$$

则称 $f(x)$ 为偶函数. 例如 $y=\cos x$, $y=x^2+1$ 等都是偶函数.

偶函数的图象关于 y 轴对称.

设函数 $f(x)$ 定义域为 D，如果对任意 $x\in D$，都有 $-x\in D$，且满足

$$f(-x)=-f(x), \tag{1.2}$$

则称 $f(x)$ 为奇函数. 例如函数 $y=\sin x$, $y=x^3$ 等都是奇函数.

奇函数的图象关于原点对称.

例 1.4 判别函数 $f(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x}$ 的奇偶性.

解 函数定义域为 $(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$，关于原点对称. 且

$$\begin{aligned}f(-x)&=(-x)^2\sin\frac{1}{(-x)}=-x^2\sin\frac{1}{x}\\ &=-f(x).\end{aligned}$$

所以，$f(x)$是奇函数.

例 1.5 判断函数 $y=2x+1$ 的奇偶性.

解 $\because$ $f(1)=3$, $f(-1)=-1$,

$f(1)\neq f(-1)$, 且 $f(1)\neq -f(-1)$.

所以 $y=2x+1$ 既非奇函数又非偶函数.

注意：不要以为函数可分成奇函数与偶函数两类. 事实上，存在着既奇又偶的函数，如 $y=0$；也存在着大量的非奇非偶函数，如 $f(x)=2x+1$ 等等.

2. 单调性

如果函数 $y=f(x)$对于某区间(a, b)内的任意两个数值 x_1, x_2 $(x_1<x_2)$，总有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2), \tag{1.3}$$

就称函数$f(x)$在(a, b)内**单调递增**，(a, b)称为$f(x)$的**单调递增区间**. 如果将(1.3)式中的"$\leqslant$"改成"$<$"，则称函数$f(x)$在(a, b)内**严格单调递增**.

函数在(a, b)内单调递增(严格单调递增)，反映在图象上是沿 x 的正向观察时，曲线不下降(上升).

如果$f(x)$在定义域内(严格)单调递增，则称$f(x)$为(严格)**单调递增函数**.

例 1.6 求证：$f(x)=\sqrt{x}$ 是严格单调递增函数.

证明 函数定义域为$[0, +\infty)$，在$[0, +\infty)$内任取 x_1, x_2 $(0\leqslant x_1<x_2<+\infty)$，则有

$$\begin{aligned}f(x_2)-f(x_1)&=\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}\\&=\frac{(\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1})(\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1})}{(\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1})}\\&=\frac{x_2-x_1}{(\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1})}>0,\end{aligned}$$

$$\therefore\ f(x_1)<f(x_2).$$

于是，$f(x)=\sqrt{x}$ 是严格单调递增函数.

如果函数 $f(x)$，对于某区间 $(a,\ b)$ 内的任两个数 x_1，$x_2(x_1<x_2)$，总有

$$f(x_1)\geqslant f(x_2), \tag{1.4}$$

就称函数 $f(x)$ 在 $(a,\ b)$ 内单调递减，$(a,\ b)$ 称为 $f(x)$ 的单调递减区间，如果将(1.4)式中的"$\geqslant$"改为"$>$"，则称函数 $f(x)$ 在 $(a,\ b)$ 内为严格单调递减.

函数在 $(a,\ b)$ 内单调递减(严格单调递减)，反映在图象上是，沿 x 的正向观察时，曲线不上升(下降).

如果 $f(x)$ 在定义域内(严格)单调递减，则称 $f(x)$ 为(严格)单调递减函数.

3．周期性

我们过去学过的 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 等是周期函数，它们的自变量的取值，每相隔 2π，相应的函数值必定重复出现.

设函数 $f(x)$ 定义域为 D，若存在常数 $T(T\neq 0)$，使得对任一 $x\in D$，有 $x+T\in D$，且满足

$$f(x+T)=f(x),$$

则称函数 $y=f(x)$ 为周期函数．T 叫做 $f(x)$ 的周期.

周期函数的周期不唯一．一般地，如果 T 是周期函数 $y=f(x)$ 的周期，$x-T\in D$，则 $-T$ 也是 $y=f(x)$ 的周期.

事实上，因为 T 是 $y=f(x)$ 的周期，所以

$$f[(x-T)+T]=f(x-T),$$

即

$$f(x)=f(x-T),$$

可见 $-T$ 也是 $f(x)$ 的周期.

不但 $-T$ 是 $f(x)$ 的周期，而且 $2T$，$3T$，…，$-2T$，$-3T$，…也是 $f(x)$ 的周期.