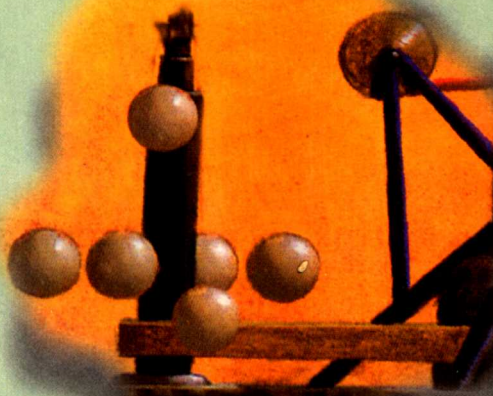


中学教师继续教育丛书

中学数学思想方法

沈文选 著

◆ 湖南师范大学出版社



中学数学思想方法

中学数学思想方法

周开高 著

第二版 湖南师范大学出版社



中学数学思想方法

沈文选 著

湖南师范大学出版社

中学数学思想方法

沈文选 著

组稿编辑：罗灵山

责任编辑：张 卫

责任校对：杨建民

湖南师范大学出版社出版发行

(长沙市岳麓山)

湖南省新华书店经销 衡阳县湘江印刷厂印刷

850×1168 1/32 印张 20 千字

1999年5月第1版 1999年6月第2次印刷

印数：11201—16250册

ISBN7—81031—770—9/G·329

定价：8.10元

前 言

振兴民族的希望在教育，振兴教育的希望在教师。根据终身教育的思想，加强中学教师继续教育的教材建设，积极推进教育观念、教育思想、教学内容、课程体系、教育技术和教学方法的现代化，建立和完善适应 21 世纪基础教育改革和发展需要的中学教师继续教育制度，是造就一支高素质的中学教师队伍的重大举措。

为了使我省中学教师的继续教育能更好地开展，教师的教育教学能力和知识水平能尽快提高，我处从 1998 年 4 月开始，组织一批比较熟悉中学教师继续教育的专家编写了这套中学教师继续教育丛书。本册由沈文选著（其中陈自强撰写了 3.1.1 ~ 3.1.3, 3.2.1, 3.2.2, 3.2.4；杨林撰写了 2.1.1, 2.1.2, 2.2.1），湖南师范大学刘振修教授审稿。

在教材编写过程中，尽管编者倾注了大量心血，力求使教材尽量多反映最新学科知识发展动态、教育教学改革研究和实践成果，也力求使教材在先进性、科学性与针对性、实效性方面尽量统一，但由于中学教师继续教育教材的编写是一项全新的工作，能否达到预期目的，尚等实践检验。我们衷心希望从事继续教育工作的同志和接受培训的学员，对这套丛书多提宝贵意见，以便使该丛书在今后不断完善。

这套教材的编写出版，参考了国内外、省内外有关资料，也得到了许多专家、教授的热情帮助和精心审定，在此，谨表示诚挚的谢意。

湖南省教育委员会师范教育处
1999年4月24日

目 录

第一章 数学思想方法概述	(1)
§ 1.1 对数学思想方法重要性的认识渐趋深刻	(1)
1.1.1 历史的回顾	(1)
1.1.2 现实的需要	(3)
1.1.3 认知的实现	(6)
§ 1.2 大力加强对数学思想方法的探讨	(8)
1.2.1 思想、科学思想和数学思想	(8)
1.2.2 历史上数学思想的几次重大突破与中学数学 教材内容的阶段性转折.....	(10)
1.2.3 数学思想中的基本数学思想.....	(20)
1.2.4 思路、思绪、思考和意识(观念)	(22)
1.2.5 技巧(招术)、方法和数学方法	(24)
1.2.6 数学方法中的基本数学方法.....	(26)
1.2.7 数学思想与数学方法的关系.....	(27)
第二章 中学数学中的基本数学思想	(29)
§ 2.1 两大“基石”思想.....	(29)
2.1.1 符号化与变元表示思想.....	(29)
2.1.2 集合思想.....	(39)
§ 2.2 两大“支柱”思想.....	(45)

2.2.1	对应思想	(45)
2.2.2	公理化与结构思想	(60)
§ 2.3	两大“主梁”思想	(73)
2.3.1	系统与统计思想	(73)
2.3.1.1	系统思想	(73)
2.3.1.2	统计思想	(84)
2.3.2	化归与辩证思想	(90)
2.3.2.1	化归思想	(90)
2.3.2.2	辩证思想	(96)
第三章	中学数学中的基本数学方法	(120)
§ 3.1	几种重要的科学认识方法	(120)
3.1.1	观察与实验	(120)
3.1.2	比较与分类	(125)
3.1.3	归纳与类比	(132)
3.1.4	想象	(141)
3.1.5	直觉与顿悟(灵感)	(148)
§ 3.2	几种重要的推理论证与求解方法	(154)
3.2.1	综合法与分析法	(154)
3.2.2	完全归纳法与数学归纳法	(157)
3.2.3	演绎法	(160)
3.2.4	反证法与同一法	(166)
第四章	中学数学思想方法的教学研究	(171)
§ 4.1	明确数学思想方法教学的心理学意义	(171)
4.1.1	懂得基本原理使得学科更容易理解	(172)
4.1.2	有利于记忆	(173)
4.1.3	有利于“原理和态度的迁移”	(173)
4.1.4	联结中学数学与高等数学的一条红线	(173)

§ 4.2	提高数学思想方法教学的意识性	(174)
4.2.1	在确定教学目的、实施教学过程、落实教学效果中,有意识地体现数学思想方法	(174)
4.2.2	在掌握重点、突破难点中,有意识地运用数学思想方法	(175)
4.2.3	在小结、复习中,有意识地画龙点睛,适时点拨	(175)
§ 4.3	探索数学思想方法教学的规律	(176)
4.3.1	渗透性原则	(176)
4.3.2	反复性原则	(177)
4.3.3	系统性原则	(178)
4.3.4	明确性原则	(180)
§ 4.4	探讨数学思想方法教学的目标设计	(182)
4.4.1	数学思想方法教学目标制定的原则	(182)
4.4.2	数学思想方法教学目标的分层及表述	(183)
4.4.3	数学思想方法教学目标管理系统	(185)
4.4.4	数学思想方法教学目标的阶段设计	(187)
4.4.5	数学思想方法教学目标的课时设计	(188)
§ 4.5	把握数学思想方法教学的有效途径	(190)
4.5.1	在知识发生过程中,适时渗透数学思想方法	(190)
4.5.2	通过小结、复习和专题讲座,提炼、概括数学思想方法	(191)
4.5.3	通过“问题解决”,掌握和深化数学思想方法	(191)
§ 4.6	研究数学思想方法教学的各种方案	(192)
4.6.1	挖掘—渗透—明确—掌握运用	(192)

4.6.2	方法媒介—根源—理解—掌握运用	(192)
4.6.3	不同阶段—低层次—高层次—掌握运用	(194)
4.6.4	待解问题—高层次—低层次—掌握运用	(195)
§ 4.7	普查揭示数学课本中的数学思想方法点	(197)
第五章	中学数学思想方法的教学设计示例	(201)
§ 5.1	几个基本数学思想方法的渗透教学设计	(201)
5.1.1	符号化与变元表示思想方法的渗透教学设计	(201)
5.1.2	分类思想方法的渗透教学设计	(203)
5.1.3	函数思想方法的渗透教学设计	(205)
5.1.4	变换思想方法的渗透教学设计	(207)
5.1.5	归纳思想方法的渗透教学设计	(208)
§ 5.2	典型内容教学中数学思想方法的渗透教学设计 示例	(210)
5.2.1	在概念教学中数学思想方法的渗透	(210)
5.2.2	在命题(定理、例题等)教学中数学思想方法 的渗透	(212)
5.2.3	在公式、法则教学中数学思想方法的渗透 ..	(215)
5.2.4	在“想一想”教学中数学思想方法的渗透 ..	(217)
§ 5.3	运用数学思想方法指导教学示例	(220)
5.3.1	突出一种思想方法指导一堂课的教学	(220)
5.3.2	突出一种思想方法指导一个阶段的教学	(223)
5.3.3	运用多种思想方法指导一堂课的教学	(228)
5.3.4	运用多种思想方法指导一个单元内容的教学	(233)
§ 5.4	数学思想方法教学考查设计示例	(239)
参考文献		(246)

第一章 数学思想方法概述

随着各门科学抽象化、数学化水平的日益提高，随着数学本身由于集合论与结构思想的发展而日益走向整体化，对统一性、普遍性的数学思想和方法的重视、研究及教学探讨，已成为历史的必然和时代的要求，成为数学教育现代化进程中的一个重要课题。

§ 1.1 对数学思想方法重要性的认识渐趋深刻

国际数学教育界关于基础数学教育（中小学数学教育）现代化的问题，曾进行了多种的实验研究，提出过种种设想方案，许多人基本上倾向如下观点：数学教育的现代化，并不只是要进行“现代数学的教学”，而是要进行“数学的现代教学”，要把基础数学教育“建立在现代数学的思想基础上，并使用现代数学的方法和语言。”

我们的教学实践也表明：中小学数学教育的现代化，主要不是内容的现代化，而是数学思想、方法及教学手段的现代化，加强数学思想方法的教学是基础数学教育现代化的关键。特别是对能力培养这一问题的探讨与摸索，以及社会对数学价值的要求，使我们更进一步地认识到数学思想方法的重要性。

1.1.1 历史的回顾

随着教育理论研究和教育实践探索深入进行，广大数学教育工作者对数学思想方法的认识渐趋深刻。例如，我国的中学数学教学大纲的多次修改制定，对于数学思想和数学方法的重要性的

认识就是一个从低到高的过程。

自 1949 年至今，我国的数学教育经历了采取临时措施阶段（1949~1952），全面学习前苏联的创建阶段（1952~1958），总结经验的调整阶段（1960~1965），受到“文革”冲击的破坏阶段（1966~1976），逐步提高的复兴阶段（1977~1985），深化改革的繁荣阶段（1986~至今），先后颁布了 10 个中学数学教学大纲。前 6 个大纲中，除 1951 年的第一个大纲提到了“教学须相机指示因某数量（或形式）之变化所引起之量变质变，藉以启发学生之辩证思想”外，均未涉及数学思想、方法的有关提法。

由中华人民共和国教育部制定、1978 年 2 月第 1 版的《全日制十年制学校中学数学教学大纲（试行草案）》，在第 2 页“教学内容的确定”的第（三）条中首次指出：“把集合、对应等思想适当渗透到教材中去，这样，有利于加深理解有关教材，同时也为进一步学习作准备。”这个大纲在 1980 年 5 月第 2 版时维持了上述规定。

由中华人民共和国国家教育委员会制订、1986 年 12 月第 1 版的《全日制中学数学教学大纲》，在第 2 页“教学内容的确定”的第（三）条中，把上述大纲的有关文字改成一句话：“适当渗透集合、对应等数学思想。”1990 年修订此大纲时，维持了这一规定。

由国家教育委员会制定、1992 年 6 月第 1 版的《九年义务教育全日制初级中学数学教学大纲（试用）》，在第 1 页“教学目的”中规定：“初中数学的基础知识主要是初中代数、几何中的概念、法则、性质、公式、公理、定理以及由其内容所反映出来的数学思想和方法。”这份大纲还第一次把数学工作者们熟知的提法“数学，它的内容、方法和意义”改为数学的“内容、思想、方法和语言已广泛渗入自然科学和社会科学，成为现代文化的重要组成部分”，并把这段话放入总论的第一段；在第 9 页上

又指出,要“使学生掌握消元、降次、换元等常用的数学方法解决某些问题,理解‘特殊—一般—特殊’、‘未知—已知’、用字母表示数、数形结合和把复杂问题转化成简单问题等基本思想方法”;在第6页上还指出:“要注意充分发挥练习的作用,加强对解题的正确指导,应注意引导学生从解题的思想方法上作必要的概括”。

由国家教育委员会基础教育司制订、1996年5月第1版的《全日制普通高级中学数学教学大纲(供试验用)》,在第2页“教学目的”中也规定:“高中数学的基础知识是指:高中数学中的概念、性质、法则、公式、公理、定理以及由其内容反映出来的数学思想和方法。”在界定“思维能力”一词的四个主要层面时,指出第三层面是“会合乎逻辑地、准确地阐述自己的思想和观点”;第四层面是“能运用数学概念、思想和方法,辨明数学关系,形成良好的思维品质”。这份大纲维持了数学的“内容、思想、方法和语言已成为现代文化的重要组成部分”的提法(第1页);并指出数学规律“包括公理、性质、法则、公式、定理及其联系,数学思想、方法和语言”(第24页);坚持在解题进行指导时,应该“对解题的思想方法作必要的概括”(第25页)。这是建国以来对数学思想和数学方法关注最多的一份中学数学教学大纲,充分体现了数学教育工作者对于数学课程发展的一些共识,对数学思想方法的重要性的共识。

1.1.2 现实的需要

(1) 形势发展的需要

时代的前进依赖于科技的发展。现代科技日新月异,改革开放的大潮促进着社会主义市场经济的迅猛发展,现代科技及经济发展成熟的标志是数学化,例如市场经济中的经济统计学、金融学等领域就极需要数学的支撑。在探索科技与经济发展的过程中,当然需要某些具体的数学知识,但更多的是依靠数学的思想

与方法的运用，以便从数学的角度去思考周围的实际问题，建立数学模型，从而来预测发展的前景，决策下一步的行动……可以说，时代的发展越来越依赖于数学思想和方法的作用。

(2) 教育目的的需要

我国的教育面临着重大改革任务，由应试教育向素质教育转轨是重大改革任务之一。

1996年，国家教委副主任柳斌先生在《实施素质教育，深化教育改革》一文中说：“如果‘人的全面发展’是教育方针中所指的‘德、智、体’等方面的全面发展，那么素质教育就是‘全面发展’这一教育方针的一种教育模式或教育体系。”正是由于数学思想与方法的重要作用，使得数学教育在素质教育中具有特殊的地位。数学是思维的体操这是众所周知的，数学思想方法哺育着人养成诚实、正直、严肃认真、踏实细微、机智、顽强等当今时代迎接挑战不可缺的精神，这也是人们普遍感觉到了的。

当前国际教育界提出的“大众数学”的口号，其目的是根据社会对数学的不同的要求，为全体学生规划、提供水平适应的数学教育，为社会提供各层次、各类型的工作者。著名数学家波利亚曾统计，中学生毕业后，研究数学和从事数学教育的人占1%，使用数学的占27%，基本不用或很少用数学的占70%。当然，现在的情形有所改变，总之对大多数学生来说，数学思想方法比形式化的数学知识更重要，因为前者更具有普遍性。社会各部门、各行业对数学知识的要求的深度与广度的差异是很大的，但对人的素质要求是共性的，如要求走向社会的人，具备严谨的工作态度，具有善于分析情况，归纳总结，综合比较，分类评析，概括判断的工作方法。实际工作者，科研工作者，特别是决策部门工作人员更需要逻辑论证，严密推测的科学方法与工作作风，这一切都是在数学思想方法的渗透，训练中得以培养的。例如，在联合国教科文组织撰编的数学教育论文专辑中曾叙述过这

样一个典型的例子：我们能够确信三角形面积公式一定是重要的吗？但很多人在校外生活中使用这个公式至多不超过一次，可是在学习并推导这个公式中所蕴含的数学思想方法：“通过分割一个表面成一些简单的小块，并且用一种不同的方式重新组成这个图形来求出它的面积值”的分解组合思想方法却经常使用在校外的各类工作中。

创造能力的培养是素质教育的一个重要方面。波利亚的一本专门讨论数学发现过程的著作，书名就是《数学与猜想——数学中的归纳与类比》。而类比、归纳、猜想正是几种重要的思想方法。“问题解决”自20世纪80年代美国提出后，现已被国际数学教育界普遍接受，问题解决显然与创造能力培养有着密切联系。而问题解决是指让学生去解一些不能依靠简单的模仿来解决的非常规问题，或者提供一种问题的情景，让学生自己去提出其所隐含的数学问题，然后加以解决并作出解释。而化归与转换思想方法中的熟悉化原则、简单化原则、和谐化原则均可以为问题解决提供思维导向。

数学应用意识的失落是我国数学教育的一个严重问题。随着社会主义市场经济大潮的兴起，股票、利息、保险、分期付款等经济方面的数学问题已日渐成为人们的常识，这迫使我们的中学数学教育要特别加强数学应用意识的培养，这就要求通过抽象概括、数学模型等思想方法的学习和训练，让学生体会到数学中的定义、概念、公式、定理等是从现实世界中经过逐步抽象概括而得到数学模型，与现实世界有着千丝万缕的联系，并且可以反过来应用于现实世界解决各种实际问题。

由应试型变为素质型，并不是不要考试，为国家培养各种不同层次的人才，当然也包括高层次人才，而且社会的进步，对高层次人才需求量会越来越大。而参加中考、高考进入高一级学校学习，至少目前仍是培养高层次人才的一条重要渠道。数学

教学实践告诉我们，数学思想方法的教学，正是使学生牢固掌握基础知识，培养数学能力，“既高分，又高能”的重要举措。加强数学思想方法的教学，在进行定义、定理、法则、公式等的教学时，注意这些概念、知识的发生、发展、应用过程的揭示与解释，并将这一过程中丰富的思维训练的因素开掘出来，这有利于学生创造力的发展与培养，这是培养有创造性人才的良好手段和渠道。

1.1.3 认知的实现

学习的认知结构理论告诉我们，数学学习过程，是一个数学认知过程，其实质是一个数学认知结构的发展变化过程，这个过程是通过同化和顺应两种方式实现的，在同化和顺应进行中，数学思想和方法在数学认知结构中发挥着极为重要的作用。

(1) 对同化过程的分析

所谓数学学习中的同化，就是主体把新的数学学习内容纳入到自身原有的认知结构中去，这种纳入不是机械的囫圇吞枣式地摄入，而是把新的数学材料进行加工改造，使之与原数学认知结构相适应。那么，怎样加工新的数学材料才能使得它与原数学认知结构相适应呢？任意的盲目的加工能达到这个目的吗？显然不能！这种加工要具有自觉的方向性和目的性，肯定是在某种因素的指导下进行的。在数学认知结构中，存在数学基础知识、数学思想方法、心理成分三种主要因素，数学基础知识显然不具备思维特点和能动性，不能指导“加工”过程的进行，就像材料本身不能自己变成产品一个道理。而心理成分只给主体提供愿望和动机，提供主体的认知特点仅凭它也不能实现“加工”过程，就像人们只有生产愿望和生产工具而没有生产产品的设计思想和技术照样生产不出产品一样。数学思想和方法担当起了指导“加工”的重任，它不仅提供思维策略（设计思想）而且还提供实施目标的具体手段（化归技能）。实际上数学中的转化，就是实施新旧

知识的同化。总之，数学思想和方法对数学活动的同化过程起着重要作用。

(2) 对顺应的分析

数学学习中的顺应是指主体原有的数学认知结构不能有效地同化新的学习材料时，主体调整或改造原有的数学认知结构去适应新的学习材料。这种对原认知结构的改造也不是任意盲目地进行的。与同化过程的分析一样，也必然是在数学思想方法的指导下进行的，离开了数学思想方法的顺应是不可理解的，也是不可能实现的。

(3) 数学思想方法对数学认知结构发展的作用

通过上面的分析看到，数学思想方法对同化和顺应的进行，进而对认知结构的发展起重要作用。实际上，无论是同化还是顺应，都是在原数学认知结构和新的数学内容之间，改造一方去适应另一方。这种改造就是转换或化归，而转换或化归是数学思想方法体系中的“主梁”和精髓。数学思想和方法产生于数学认知活动，又反过来对数学认知活动起重要作用，因此可以说数学思想方法是数学认知结构中最积极最活跃的因素，是认知的实现因素。

思考题 1.1

1. 为什么说加强数学思想方法的教学是基础数学教育现代化的关键？
2. 在我国的中学数学教学大纲中，是怎样关注数学思想方法的？
3. 数学思想方法对数学认知结构发展的作用怎样？