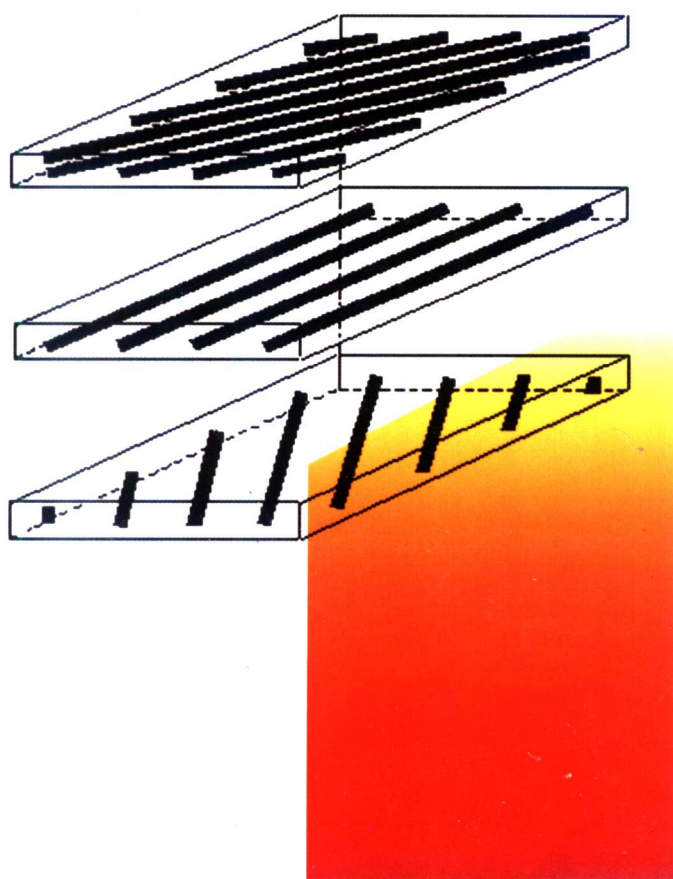


# 复合材料细观力学

# 引论

黄争鸣 编著



# 复合材料细观力学引论

黄争鸣 编著

科学出版社

北京

## 内 容 提 要

本书系统介绍了分析求解纤维增强复合材料弹-塑性和极限强度性能的公式化细观力学理论,包括单向复合材料的弹性常数、桥联模型、单向复合材料的强度、层合板的刚度与强度、热应力计算以及计算机程序等。根据本书介绍的理论,读者只需要知道纤维和基体的性能参数以及纤维体积含量等几何数据,就可以预报复合材料层合板结构在任意载荷下的最大承载能力。

本书既可以作为有关专业的大学本科生和研究生教材和大学“材料力学”的补充教材,也可以作为航空、航天、力学、土木、交通、化工、船舶、汽车、机械、材料等领域的研发以及工程技术人员的参考书。

### 图书在版编目(CIP)数据

---

复合材料细观力学引论/黄争鸣编著. —北京:科学出版社,2004.9

ISBN 7-03-013779-5

I. 复... II. 黄... III. 复合材料-材料力学  
IV. TB330.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 063658 号

---

责任编辑:张 臻/责任校对:连秉亮

责任印刷:刘 学/封面设计:一 明

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

上海交大印务有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2004年9月第一版 开本:787×1092 1/16

2004年9月第一次印刷 印张:9 3/4

印数:1—2 200 字数:225 000

定价:19.00元

## 前 言

根据结构、性能和用途之间的关系,固体材料可以分为金属、陶瓷、聚合物与复合材料四大类。前三类材料一般为各向同性,其结构与性能之间的关系通常采用宏观力学理论来确定,人们对它们的了解相对而言都较为深入。第四类复合材料则基本上各向异性的,其结构与性能之间的关系最为复杂。细观力学研究的主要对象是纤维增强复合材料,研究的内容是根据组成材料的机械性能和几何参数(体积含量等)来确定复合材料的宏观力学性能。

与宏观力学的研究方法相比,细观力学的研究方法具有两个突出优点。之一是复合材料的力学性能可以通过对纤维和基体性能的掌握而获得,无需像宏观力学理论所要求的那样由对复合材料本身的试验来获得。这将为工程应用带来极大方便(如可大大节省复合材料制样和试验所需的时间和经费),因为两种相同的组成材料可以组合出无穷多不同的复合材料。之二是可以在加工制备之前做到对复合材料在细观量级的优化设计,从而使由组元开始设计材料性能之目的得以实现。此外,复合材料的非线性本构理论只能根据细观力学的方法来建立。

在现有的细观力学或者复合材料力学论著中,对复合材料的细观力学线弹性理论有十分详细的阐述,可以应用众多简单、封闭的细观力学公式计算复合材料的弹性性能(如模量和泊松比等)。然而,国内外都还缺少一本类似的预报复合材料非线性弹性性能的专著。本书较为系统地阐述了分析计算复合材料弹-塑性性能,尤其是极限强度的公式化细观力学理论。一方面,本书以教材形式撰写,使篇幅控制在尽可能小的范围内。另一方面,书中介绍的所有细观力学理论公式最后都被编制成一个统一的计算机程序并给出了全部源程序代码,十分方便读者的应用。

本书的内容主要取自作者的研究成果,限于水平加之成书时间短,书中难免存在错误,祈望读者指正。

感谢教育部、香港长江实业集团和同济大学提供的长江特聘教授岗位,使作者得以完成本书!感谢武汉理工大学的吕运冰教授,对本书提出了许多宝贵的修改意见。

黄争鸣

2003年12月

## 目 录

第 1 章 引言	1
1.1 复合材料	1
1.2 Hooke 定律	2
1.3 细观力学原理	6
1.4 基本假设	6
1.5 特征体元、局部坐标和均值化	7
1.6 最大纤维体积含量	9
1.7 坐标变换	10
1.8 Prandtl-Reuss 理论	12
第 2 章 单向复合材料的弹性常数	17
2.1 混合法模型公式	17
2.2 Chamis 模型公式	19
2.3 Hill-Hashin-Christensen-Lo 模型公式	21
第 3 章 桥联模型	23
3.1 基本方程	23
3.2 桥联矩阵	24
3.3 展开系数的确定	26
3.4 弹性常数公式	27
3.5 桥联参数	28
第 4 章 单向复合材料的强度	31
4.1 增量算法	31
4.2 弹-塑性响应	32
4.3 基体的柔度矩阵	35
4.4 材料在复杂应力状态下的拉、压判据	37
4.5 简单载荷下的强度公式	37
4.6 复杂应力状态下的强度	42
4.7 偏轴拉伸强度	44
第 5 章 层合板的刚度与强度	49
5.1 铺排方式与总体坐标	49
5.2 经典层板理论	50
5.3 面内刚度	54
5.4 层合板的强度	56

5.5	后毁损分析	56
5.6	弯曲强度	61
第6章	热应力计算	69
6.1	单向复合材料在热-机械载荷下的基本方程	69
6.2	单向复合材料的热应力计算	71
6.3	层合板的热应力计算	75
6.4	热-机械耦合载荷下层合板的内应力计算公式	77
第7章	计算机程序	82
7.1	子程序说明	82
7.2	原始数据输入说明	102
7.3	源程序代码	108
7.4	原始数据举例	135
	参考文献	141
	习题	144

# 第1章 引言

## 1.1 复合材料

复合材料是由两种或两种以上力学、物理或化学性能各异的单一材料,经过物理或者化学的方法组合而成的一种新型材料。其性能是其中任何一种单一材料都无法具备的。复合材料可以分为天然复合材料和人工合成复合材料两大类。天然复合材料种类繁多,包括一些动物和植物组织(如人的骨骼)。本书所讨论的是人工合成复合材料。

人工合成复合材料一般只含有两种组成材料,即连续体和离散体(图 1-1)。连续体是构成复合材料的基本形态,也称为基体(matrix)材料。它包括金属、陶瓷和聚合物三类常见的固体材料,分别构成金属基复合材料、陶瓷基复合材料以及聚合物基复合材料。

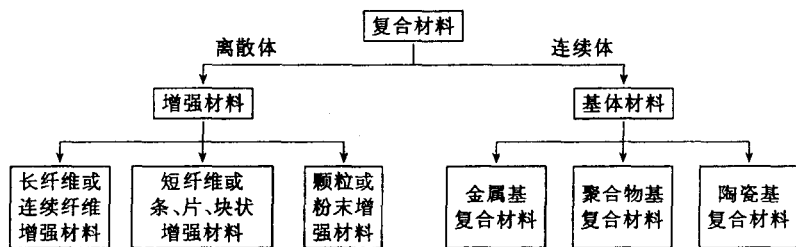


图 1-1 人工合成复合材料的分类<sup>[1]</sup>

离散体通常比基体的性能更强,因而又称为增强体或增强材料。常见的有代表性的增强体主要有三类。第一类是长纤维或连续纤维(fiber)材料,其长度与直径之比(即长-径比)一般大于  $10^5$ ,与之对应的复合材料通常称为长纤维或者连续纤维增强复合材料,简称为纤维增强复合材料。纤维增强复合材料的最大优点是具有很高的比刚度和比强度。也就是说,这类材料的刚度和强度与它们的重量之比值很高,往往数倍于高强度的钢、铝、钛合金等金属材料。因此,结构用的复合材料大都采用纤维增强复合材料。在很多工程和日常生活领域中都可以见到这类材料的应用,其中航空航天工程领域的应用尤为广泛。如果说在早期的航天工程的结构中还能见到一些金属材料的应用,那么当今纤维增强复合材料已经成为航天工程中主要的甚至是惟一候选的结构材料。在体育用品领域中纤维增强复合材料也得到了广泛应用,比如网球拍、赛艇、高尔夫球杆等都是用纤维增强复合材料制造的。第二类为短纤维材料,其长度与直径之比一般为  $5 \sim 200$ ,由此得到的是短纤维增强复合材料。需要注意的是,短纤维只是这类增强体的代表,其他可以归入该种类的还包括片状、条状、块状等。短纤维增强复合材料的最大优点是容易加工成形、所需成本低,在生产打印机外壳、台面板以及其他许多无需承受较高载荷的领域都有应用。农民用切短的稻草或者杂草掺和泥浆糊墙,就是这类复合材料的一种典型应用。

第三类为颗粒或者粉末材料,其长度与直径之比一般为 $1\sim 2$ 。这类复合材料的设计大都不以提高材料的刚度和强度为目的,而以改善或提高材料的耐磨、隔热、耐腐蚀等其他性能为目的。因此,这类复合材料更贴切地应称为功能复合材料。例如,在金属基中加入陶瓷粉末或者其他更强金属颗粒做成的复合材料,其硬度和耐磨性就得到提高。这类复合材料也常用作生物材料,如人造骨骼、假牙填充材料等。

纤维增强复合材料的显著特性是各向异性,其强度和刚度沿不同的方向是不一样的。在各种各样的纤维增强复合材料中,单向纤维增强复合材料(简称单向复合材料)是最基本的复合材料形式,其他的纤维增强复合材料都可以假想为一系列单向复合材料的组合。在单向复合材料中,纤维的排列方向都是沿同一个方向。图 1-2 是单向硼纤维(boron fiber)增强铝金属基复合材料横截面中某一部分的显微图。从该图不难看到,单向复合材料的力学性能在横截面内是完全对称的,而且在垂直于纤维轴线的任何一个截面内其力学性能都是一样的。在连续介质力学中,满足这种特性的材料称为横观各向同性(transversely isotropic)材料。它们具有 5 个独立的弹性常数。因此,单向复合材料是横观各向同性材料,其对称轴沿纤维的轴线方向。

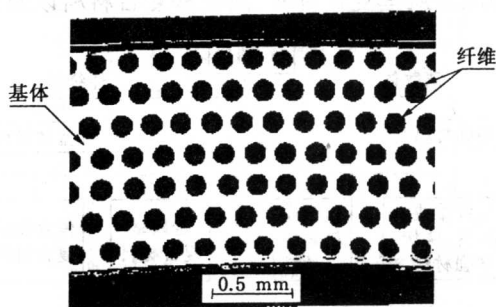


图 1-2 单向硼纤维增强铝金属基复合材料的横截面显微图

需要特别指出的是,虽然基体材料一般都是各向同性材料,但增强纤维材料并不一定都是各向同性的。有些纤维材料与单向复合材料类似,也是横观各向同性的。例如,在实际中应用非常广泛的碳纤维(carbon fiber)和凯夫拉纤维(Kevlar fiber)就是横观各向同性的。这类纤维共有 5 个独立的弹性常数,对称轴也是沿纤维的轴向。

## 1.2 Hooke 定律

材料的直角坐标系通常可以有两种不同的表示法,一种是 $(x, y, z)$ 表示法,另一种是 $(x_1, x_2, x_3)$ 表示法。如果这两种记法代表的是同一个直角坐标系,则 $x_1 = x, x_2 = y$ 和 $x_3 = z$ 。

在直角坐标系 $(x_1, x_2, x_3)$ 内,假定一点 $P$ 沿 $x_1, x_2$ 和 $x_3$ 方向的无穷小位移分别是 $u_1, u_2$ 和 $u_3$ ,那么, $P$ 点的 Cauchy 应变(小应变)为<sup>[2]</sup>:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (1.1)$$



该点的应变张量为 $[\epsilon_{ij}]$ 可用紧缩的矢量表示:

$$\{\epsilon_i\}^T = \{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4, \epsilon_5, \epsilon_6\} = \{\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{33}, 2\epsilon_{23}, 2\epsilon_{13}, 2\epsilon_{12}\}。 \quad (1.2)$$

式中,上标 T 代表转置。注意,应变矢量中的剪应变前有一个系数 2。该点的应力张量用 $[\sigma_{ij}]$ 表示,其紧缩的矢量形式为:

$$\{\sigma_i\}^T = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6\} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12}\}。 \quad (1.3)$$

材料处于线弹性变形是指其应力与应变之间可以由以下的 Hooke 定律表示:

$$\{\epsilon_i\} = [S_{ij}]\{\sigma_j\}, \quad (1.4)$$

$$\text{或者:} \quad \{\sigma_i\} = [C_{ij}]\{\epsilon_j\}。 \quad (1.5)$$

式中,  $6 \times 6$  阶的系数矩阵 $[S_{ij}]$ 和 $[C_{ij}]$ 分别称为材料的柔度和刚度矩阵,均为正定的常数矩阵,又称为材料的弹性常数矩阵。 $[S_{ij}]$ 或者 $[C_{ij}]$ 中的元素分别称为材料的柔度或者刚度系数。显而易见,这两个弹性常数矩阵互为彼此的逆矩阵。

根据 $[S_{ij}]$ 或者 $[C_{ij}]$ 中所含独立弹性常数的数目,可以将材料划分为各向同性材料、横观各向同性材料、正交各向异性材料等。非各向同性材料皆可称为各向异性材料。

除非材料表现为高度各向异性性能,否则在弹性范围内,加在材料上的法向应力(又称为正应力)不会产生剪应变,切向应力(又称为剪应力)也不会产生线应变。因而,材料的柔度矩阵(本书中我们将更多使用柔度矩阵而不是刚度矩阵)可以分解为:

$$[S_{ij}] = \begin{bmatrix} [S_{ij}]_n & 0 \\ 0 & [S_{ij}]_t \end{bmatrix}。 \quad (1.6)$$

式中, $[S_{ij}]_n$ 和 $[S_{ij}]_t$ 可以分别称为柔度矩阵的法向分量与切向分量,是联系法向应力与线应变以及切向应力与剪应变关系的子柔度矩阵。

### 1.2.1 各向同性材料的柔度矩阵

各向同性材料只有两个独立的弹性常数,通常以杨氏模量(Young's modulus) $E$ 和泊松比(Poisson's ratio) $\nu$ 表征。因此,各向同性材料柔度矩阵的法向分量与切向分量分别是:

$$[S_{ij}]_n = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} \\ & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} \\ \text{对称} & & \frac{1}{E} \end{bmatrix}, \quad (1.7)$$

$$[S_{ij}]_t = \begin{bmatrix} \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ & \frac{1}{G} & 0 \\ \text{对称} & & \frac{1}{G} \end{bmatrix}。 \quad (1.8)$$

式中,剪切模量  $G$  与杨氏模量和泊松比之间的关系为:

$$G = 0.5E/(1 + \nu)。 \quad (1.9)$$

### 1.2.2 横观各向同性材料的柔度矩阵

对横观各向同性材料,取  $x_1$  为材料的对称轴(材料在  $x_2-x_3$  平面内沿任何一个方向的弹性常数都相同),其柔度矩阵的法向分量与切向分量分别为:

$$[S_{ij}]_n = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{11}} & -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} & -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} \\ & \frac{1}{E_{22}} & -\frac{\nu_{23}}{E_{22}} \\ \text{对称} & & \frac{1}{E_{22}} \end{bmatrix}, \quad (1.10)$$

$$[S_{ij}]_t = \begin{bmatrix} \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ & \frac{1}{G_{12}} & 0 \\ \text{对称} & & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}。 \quad (1.11)$$

式中,  $E_{11}$  和  $E_{22}$  是材料沿  $x_1$  和  $x_2$  以及  $x_3$  方向的杨氏模量,  $\nu_{12}$  和  $\nu_{23}$  是在  $x_1-x_2$  以及  $x_1-x_3$  和  $x_2-x_3$  平面内的泊松比,  $G_{12}$  和  $G_{23}$  则是在  $x_1-x_2$  以及  $x_1-x_3$  和  $x_2-x_3$  平面内的剪切模量。通常,  $E_{11}$ 、 $\nu_{12}$  和  $G_{12}$  分别称为轴向弹性模量、轴向泊松比和轴向剪切模量,  $E_{22}$ 、 $\nu_{23}$  和  $G_{23}$  则分别称为横向弹性模量、横向泊松比和横向剪切模量。注意,  $E_{22}$ 、 $\nu_{23}$  和  $G_{23}$  这三个横向弹性常数不是完全独立的,它们之间满足以下关系:

$$G_{23} = E_{22}/(2 + 2\nu_{23})。 \quad (1.12)$$

因此,横观各向同性材料只有 5 个独立的弹性常数。

### 1.2.3 正交各向异性材料的柔度矩阵

大多数复合材料都表现为正交各向异性特性。这种材料的基本特征是法向应力不产生剪应变,切向应力不产生线应变。否则,就是更为一般的各向异性材料了。因此,正交各向异性材料的柔度矩阵仍然可以按式(1.6)进行分解。其中,

$$[S_{ij}]_n = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{11}} & -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} & -\frac{\nu_{13}}{E_{11}} \\ & \frac{1}{E_{22}} & -\frac{\nu_{23}}{E_{22}} \\ \text{对称} & & \frac{1}{E_{33}} \end{bmatrix}, \quad (1.13)$$

$$[S_{ij}]_r = \begin{bmatrix} \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ \text{对称} & & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

式中,  $E_{11}$ 、 $E_{22}$ 、 $E_{33}$  为材料分别沿  $x_1$ 、 $x_2$  和  $x_3$  方向的杨氏模量,  $\nu_{ij}$  为泊松比, 定义为  $\nu_{ij} = (-\epsilon_{jj}/\epsilon_{ii})$ ,  $\epsilon_{ii}$  和  $\epsilon_{jj}$  是由于仅仅沿  $x_i$  方向施加的单向载荷引起的分别沿  $x_i$  和  $x_j$  方向所测量的应变,  $G_{ij}$  为  $i$ - $j$  平面内的剪切模量。

式(1.13)和(1.14)表明, 正交各向异性材料共有 9 个独立的弹性常数。

材料的刚度矩阵可以通过对柔度矩阵求逆得到, 即:

$$[C_{ij}] = [S_{ij}]^{-1} = \begin{bmatrix} [S_{ij}]_s & 0 \\ 0 & [S_{ij}]_r \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} [S_{ij}]_s^{-1} & 0 \\ 0 & [S_{ij}]_r^{-1} \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

在正交各向异性的情况下, 有:

$$[S_{ij}]_s^{-1} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ & C_{22} & C_{23} \\ \text{对称} & & C_{33} \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

$$\text{式中, } C_{11} = E_{11} \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{\Delta}, \quad C_{12} = E_{11} \frac{\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23}}{\Delta}, \quad C_{13} = E_{11} \frac{\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}}{\Delta},$$

$$C_{22} = E_{22} \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{\Delta}, \quad C_{23} = E_{22} \frac{\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31}}{\Delta}, \quad C_{33} = E_{33} \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{\Delta},$$

$$\Delta = 1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13} \circ$$

注意, 不同方向的泊松比与杨氏模量之间满足以下关系:

$$\nu_{ij}/E_{ii} = \nu_{ji}/E_{jj}, \quad i, j = 1, 2, 3 \circ$$

#### 1.2.4 平面柔度矩阵

层合板结构(参见第五章)是应用最为广泛的复合材料结构形式, 而且层合板中一般都只产生平面应力响应。因此, 本书所讨论的问题基本上都只限于平面问题。

平面问题的坐标系一般取为  $(x_1, x_2)$  或者  $(x, y)$ 。材料的非零应力与应变分量分别用  $\{\sigma_i\}^T = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}\}$  和  $\{\epsilon_i\}^T = \{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\} = \{\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, 2\epsilon_{12}\}$  表示。这时, 横观各向同性与正交各向异性材料的平面柔度矩阵具有相同的形式, 都是:

$$[S_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{11}} & -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} & \frac{1}{E_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

由此可见,平面问题中横观各向同性与正交各向异性材料的独立弹性常数共有  $E_{11}$ 、 $E_{22}$ 、 $\nu_{12}$  和  $G_{12}$  4 个。

### 1.3 细观力学原理

为了能充分有效地利用复合材料的潜能,必须了解和掌握这些材料的力学性能。确定常规材料机械性能的手段一般都需做一些简单的力学试验,再借助于某些宏观力学理论加以描述。例如,通过简单拉伸试验得到金属材料的弹性模量和泊松比,其线弹性响应就可以根据 Hooke 定律完全确定。这种只通过一次简单试验就可以确定材料宏观力学响应的方法只适合于各向同性材料。对纤维增强复合材料来说,沿不同方向加载测得材料的力学响应是不一样的,完全通过实验来确定宏观力学响应是十分困难的。其难度会随着纤维含量的改变、纤维结构的不同、不同铺层的出现而成倍增大。即使同样是碳纤维和环氧树脂两种组成材料,碳纤维含量不同所得到的复合材料的宏观力学响应将会不一样。另外,碳纤维可以是单向排列的,也可以先制备成机织(woven)、编织(braided)与针织(knitted)结构后,再与环氧树脂浸胶做成复合材料。这些不同的纤维结构增强复合材料的力学性能是不一样的。因此,两种相同的组成材料可以制备得到无穷多性能各异的复合材料。显而易见,完全通过实验来确定所有这些不同复合材料的力学性能几乎是不可能的。这就促使人们寻找其他的途径,通过对组成材料性能的了解,再根据给定的纤维增强结构的几何参数,应用解析的方法确定复合材料的力学性能。这种根据组成材料的性能与几何参数来模拟或者预报复合材料的宏观力学性能,就是细观(微观)力学(micromechanics)的研究方法。

需要指出的是,与细观力学确定复合材料机械性能的方法相对应的是宏观力学(macromechanics)的方法。宏观力学的研究方法需要预先测定复合材料的一些宏观力学性能。两者相比较,细观力学的研究方法具有两个显著优点:一是只需要一次性测定(确定)纤维和基体的性能参数,而不必像宏观力学的研究方法那样对每一个不同的复合材料(哪怕组成材料相同)都需要重复制样和试验,从而大大节省了时间与经费;二是可以从组元(纤维和基体)开始设计出最合适的复合材料。

目前,细观力学研究的重点在于纤维增强复合材料方面。这是因为这类复合材料主要是用作结构材料,其力学性能(如强度和刚度)是工程应用中最为重要的宏观力学材料参数。然而,复合材料的细观力学理论研究从总体上说还不太成熟。比较成熟的仅限于线弹性理论,这方面的研究成果非常丰富。对纤维增强复合材料的弹性常数,可以从组成材料的弹性常数以及组成材料的几何参数,运用现有的细观力学理论公式进行计算模拟。对于复合材料非线性以及极限强度响应的模拟或预报,现有的细观力学理论模型则屈指可数。这一状况已经构成复合材料更加广泛应用的一大障碍<sup>[3]</sup>,有待多方面系统和深入的研究探讨。

### 1.4 基本假设

本书着重研究纤维增强复合材料,基于细观力学方法分析它的宏观力学特性。与其

他力学理论一样,复合材料的细观力学理论也是建立在若干基本假设之上的,其中主要有以下三条<sup>[4]</sup>:

- 1) 纤维均匀地分布在整个基体之中;
- 2) 纤维和基体的表面直接接触,并且互相或者以化学的或者以物理的方法黏结一起,直到复合材料破坏前都不脱开、不相对滑移;
- 3) 复合材料中孔隙与气泡体积的总和很小,可以忽略。

上述第二条假设通常称为理想黏结假设。这三条假设将贯穿在本书之中。就是说,当上述假设对某个纤维增强复合材料不再成立时,本书中所建立的细观力学理论公式一般也不再适用。

## 1.5 特征体元、局部坐标和均值化

在建立复合材料细观力学理论之前,首先引入一个重要的基本概念——特征体元(representative volume element, RVE)。从图 1-2 可以清楚地看出,虽然基体材料是连续的,但分布在基体中的纤维却是离散的。由于纤维是非连续体,复合材料的细观力学理论就不可能逐点建立起来。因此,必须选择另外的几何单元,使得复合材料的力学场变量(包括应力、应变、刚度、强度等)相对这种几何单元而言是连续的。具备这种特性的最小体积单元就称为复合材料的特征体元。据此,复合材料的细观力学理论将适应于每个特征体元而并不是每一个几何点。可以看出,特征体元具有以下两个特征:

- 1) 整个复合材料可以由特征体元的重复叠加得到;
- 2) 复合材料的(等效)力学量(应力、应变、刚度、强度等)相对特征体元而言是连续(或者有定义)的。

另外,特征体元必须是具备上述两个特征的最小体积单元。因此,复合材料中的特征体元就相当于各向同性材料中的一个几何点。这同时也表明:复合材料的各力学量必须相对特征体元取平均值。对于如图 1-2 所示的单向复合材料,其特征体元是一根纤维段与所围的基体(图 1-3)。

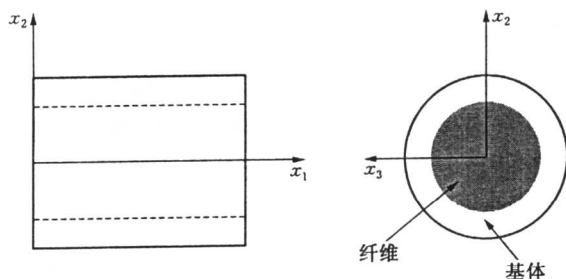


图 1-3 单向复合材料的特征体元

在特征体元上建立直角坐标系 $(x_1, x_2, x_3)$ ,  $x_1$  沿着纤维的轴线方向称为单向复合材料的径向, $x_2$  和  $x_3$  则位于和纤维垂直的平面内,称为单向复合材料的横向。需要注意的是,单向复合材料的性能在垂直于径向的平面内是完全对称的,因而  $x_2$  和  $x_3$  在该平面

内的具体位置是无关紧要的。由此建立的坐标系称为单向复合材料的局部坐标系,又称为单向复合材料的主轴坐标系。可以看到,局部(材料主轴)坐标系的最显著标志是  $x_1$  沿着单向复合材料中纤维的轴线方向。

用  $V'$  代表特征体元的体积,特征体元内纤维和基体的体积分别用  $V'_f$  和  $V'_m$  表示。本书中用下标(或者有时用上标)“f”表示与纤维有关的量(几何量或物理量),而用下标(或上标)“m”则表示与基体有关的量。与之对应,不带任何下标(或上标)的量则一般表示与复合材料有关。在紧缩矢量中,任意的应力和应变分量  $\sigma_i$  和  $\epsilon_i$  均是点坐标的函数。相对特征体元取平均值后的应力分量  $\bar{\sigma}_i$  为:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_i &= \frac{1}{V'} \int_V \sigma_i dV = \frac{1}{V'} \left[ \int_{V'_f} \sigma_i dV + \int_{V'_m} \sigma_i dV \right] \\ &= \left( \frac{V'_f}{V'} \right) \left( \frac{1}{V'_f} \int_{V'_f} \sigma_i dV \right) + \left( \frac{V'_m}{V'} \right) \left( \frac{1}{V'_m} \int_{V'_m} \sigma_i dV \right) \\ &= V_f \bar{\sigma}_i^f + V_m \bar{\sigma}_i^m.\end{aligned}\quad (1.18)$$

式中,  $V_f = V'_f/V'$  和  $V_m = V'_m/V'$  分别是纤维和基体在特征体元内的体积含量。由于整个复合材料可以由一系列特征体元叠加而成,  $V_f$  和  $V_m$  也就是纤维和基体在整个复合材料中的体积含量。 $\bar{\sigma}_i^f$  和  $\bar{\sigma}_i^m$  是相对特征体元取平均后的纤维和基体中的内应力。

类似地,对第  $i$  个应变分量取平均,得到:

$$\bar{\epsilon}_i = \frac{1}{V'} \int_V \epsilon_i dV = \frac{1}{V'} \left[ \int_{V'_f} \epsilon_i dV + \int_{V'_m} \epsilon_i dV \right] = V_f \bar{\epsilon}_i^f + V_m \bar{\epsilon}_i^m.\quad (1.19)$$

式中,  $\bar{\epsilon}_i^f$  和  $\bar{\epsilon}_i^m$  是取平均后的纤维和基体的应变分量。式(1.18)和(1.19)对所有的  $i = 1, 2, \dots, 6$  都成立。本书中一般只讨论平均应力和平均应变,因而将横杠略去。于是,得到复合材料的两个基本方程:

$$\{\sigma_i\} = V_f \{\sigma_i^f\} + V_m \{\sigma_i^m\},\quad (1.20)$$

$$\{\epsilon_i\} = V_f \{\epsilon_i^f\} + V_m \{\epsilon_i^m\}.\quad (1.21)$$

在推导这两个基本方程时,除了隐含体积  $V'$ 、 $V'_f$  和  $V'_m$  不变的假设之外,没有用到其他任何假设。因此,复合材料的细观力学理论模型都必须满足这两个基本方程。需要指出的是,根据基本假设的第三条,加工制备复合材料过程中所产生的空隙缺陷都可以忽略,因而有  $V_f + V_m = 1$ 。如果空隙缺陷不能忽略,方程(1.21)就不再成立。由于方程(1.20)和(1.21)是建立本书中复合材料细观力学理论的基础,当复合材料中孔隙与气泡体积的总和不是一个小量(如大于 3%)时,本书中所介绍的理论公式一般将不再适用。

除了方程(1.20)和(1.21)以外,连续介质力学中的其他基本方程在相对特征体元取平均后,形式上都保持不变。例如,若用  $[S_{ij}^f]$ 、 $[S_{ij}^m]$  和  $[S_{ij}]$  分别表示纤维、基体以及复合材料的柔度矩阵,则有:

$$\{\epsilon_i^f\} = [S_{ij}^f] \{\sigma_j^f\}, \quad (1.22)$$

$$\{\epsilon_i^m\} = [S_{ij}^m] \{\sigma_j^m\}, \quad (1.23)$$

$$\{\epsilon_i\} = [S_{ij}] \{\sigma_j\}. \quad (1.24)$$

## 1.6 最大纤维体积含量

纤维的体积含量是影响复合材料力学性能的一个重要参数,其最大值与纤维在复合材料中的排列方式有关。图 1-4 为理想的方形与三角形排列的特征面积单元,如果用  $s$  表示纤维之间的间隔、 $d$  表示纤维的直径并假定每个横截面都一样,那么,纤维的体积含量就与图中所示的面积含量一致。事实上,这也是实际中应用光学手段实测纤维体积含量的原理,即将横截面显微图中的纤维面积计算出,再除以总的横截面积,得到纤维的体积含量。

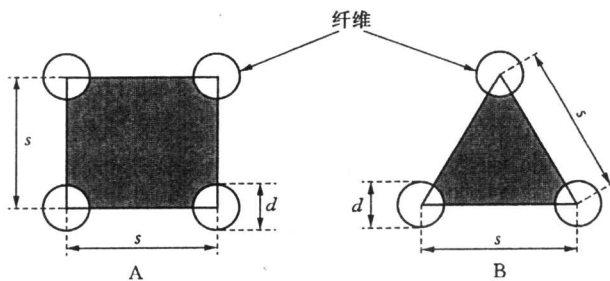


图 1-4 理想方形与三角形排列的特征面积单元

对图 1-4A 中的方形排列,总的面积是  $A = s^2$ , 而纤维的总面积是  $A_f = \frac{\pi}{4}d^2$ , 由此得到纤维的体积含量为:

$$V_f = A/A_f = \frac{\pi}{4} \left( \frac{d}{s} \right)^2. \quad (1.25)$$

注意,所有的纤维都假定是圆形的横截面。显然,最大可能的纤维体积含量是在  $s = d$  时出现,其值为:

$$V_{f \max} = \pi/4 = 0.785,$$

即方形排列的最大纤维体积含量是 0.785。

类似地,三角形排列(图 1-4B)的纤维体积含量计算式为:

$$V_f = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \left( \frac{d}{s} \right)^2. \quad (1.26)$$

据此得到最大值为:

$$V_{f \max} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} = 0.907.$$

### 1.7 坐标变换

在研究复合材料的力学性能及其响应特征时,往往要使用若干不同的坐标系,因而必须考虑它们之间的坐标变换。假设 $(x, y, z)$ 和 $(x_1, x_2, x_3)$ 分别代表总体和局部坐标系(图 1-5),局部坐标轴 $Ox_1, Ox_2, Ox_3$ 与总体坐标轴 $Ox, Oy, Oz$ 之间夹角的方向余弦为 $(l_i, m_i, n_i)$ ,即:

$$l_i = \cos(x_i, x), \quad m_i = \cos(x_i, y), \quad n_i = \cos(x_i, z), \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.27)$$

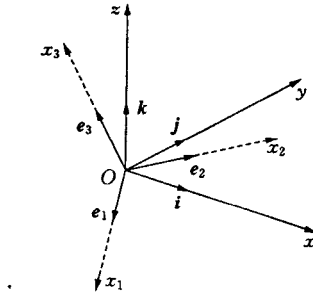


图 1-5 局部坐标与总体坐标之间的相对关系

假定沿总体坐标轴 $x, y, z$ 的单位基矢量分别是 $i, j, k$ ,沿局部坐标轴 $x_1, x_2, x_3$ 的单位基矢量分别是 $e_1, e_2, e_3$ ,则有:

$$\begin{aligned} e_1 &= \cos(x_1, x)i + \cos(x_1, y)j + \cos(x_1, z)k, \\ e_2 &= \cos(x_2, x)i + \cos(x_2, y)j + \cos(x_2, z)k, \\ e_3 &= \cos(x_3, x)i + \cos(x_3, y)j + \cos(x_3, z)k. \end{aligned}$$

两坐标系之间的变换式为:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = [e_{ij}] \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}. \quad (1.28)$$

用 $[\sigma_{ij}^G] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$ 代表总体坐标系下的应力张量,  $[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$ 代表

局部坐标系下的应力张量。由张量变换法则 $\sigma_k^G = e_k e_{jl} \sigma_{ij}$ (这里及以下采用连续介质力学中常用的求和记法,即对重复下标在它们的可变化范围内叠加求和),展开后(如对 $k = l = 1$ )有:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= e_{i1} e_{j1} \sigma_{ij} = e_{11} e_{11} \sigma_{11} + e_{11} e_{21} \sigma_{12} + e_{11} e_{31} \sigma_{13} + e_{21} e_{11} \sigma_{21} + e_{21} e_{21} \sigma_{22} \\ &\quad + e_{21} e_{31} \sigma_{23} + e_{31} e_{11} \sigma_{31} + e_{31} e_{21} \sigma_{32} + e_{31} e_{31} \sigma_{33}, \end{aligned}$$

则得:  $\{\sigma_i^G\} = [T_{ij}]_c \{\sigma_j\}.$  (1.29)



式中,  $\{\sigma_i^G\} = \{\sigma_1^G, \sigma_2^G, \sigma_3^G, \sigma_4^G, \sigma_5^G, \sigma_6^G\}^T = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{yx}, \sigma_{xz}, \sigma_{xy}\}^T$  是总体坐标系下的应力矢量,  $\{\sigma_j\} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12}\}^T$  是局部坐标系下的应力矢量,

$$[T_{ij}]_c = \begin{bmatrix} l_1^2 & l_2^2 & l_3^2 & 2l_2l_3 & 2l_3l_1 & 2l_1l_2 \\ m_1^2 & m_2^2 & m_3^2 & 2m_2m_3 & 2m_3m_1 & 2m_1m_2 \\ n_1^2 & n_2^2 & n_3^2 & 2n_2n_3 & 2n_3n_1 & 2n_1n_2 \\ m_1n_1 & m_2n_2 & m_3n_3 & m_2n_3 + m_3n_2 & n_3m_1 + n_1m_3 & m_1n_2 + m_2n_1 \\ n_1l_1 & n_2l_2 & n_3l_3 & l_2n_3 + l_3n_2 & n_3l_1 + n_1l_3 & l_1n_2 + l_2n_1 \\ l_1m_1 & l_2m_2 & l_3m_3 & l_2m_3 + l_3m_2 & l_1m_3 + l_3m_1 & l_1m_2 + l_2m_1 \end{bmatrix} \quad (1.30)$$

类似地, 根据应变张量变换公式  $\epsilon_{ij}^G = e_{ik}e_{jl}\epsilon_{ij}$  得到:

$$\{\epsilon_i^G\} = [T_{ij}]_s \{\epsilon_j\}. \quad (1.31)$$

式中,  $\{\epsilon_i^G\} = \{\epsilon_1^G, \epsilon_2^G, \epsilon_3^G, \epsilon_4^G, \epsilon_5^G, \epsilon_6^G\}^T = \{\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, 2\epsilon_{yx}, 2\epsilon_{xz}, 2\epsilon_{xy}\}^T$  和  $\{\epsilon_j\} = \{\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{33}, 2\epsilon_{23}, 2\epsilon_{13}, 2\epsilon_{12}\}^T$  分别是总体与局部坐标系下的应变矢量,

$$[T_{ij}]_s = \begin{bmatrix} l_1^2 & l_2^2 & l_3^2 & l_2l_3 & l_3l_1 & l_1l_2 \\ m_1^2 & m_2^2 & m_3^2 & m_2m_3 & m_3m_1 & m_1m_2 \\ n_1^2 & n_2^2 & n_3^2 & n_2n_3 & n_3n_1 & n_1n_2 \\ 2m_1n_1 & 2m_2n_2 & 2m_3n_3 & m_2n_3 + m_3n_2 & n_3m_1 + n_1m_3 & m_1n_2 + m_2n_1 \\ 2n_1l_1 & 2n_2l_2 & 2n_3l_3 & l_2n_3 + l_3n_2 & n_3l_1 + n_1l_3 & l_1n_2 + l_2n_1 \\ 2l_1m_1 & 2l_2m_2 & 2l_3m_3 & l_2m_3 + l_3m_2 & l_1m_3 + l_3m_1 & l_1m_2 + l_2m_1 \end{bmatrix} \quad (1.32)$$

直接的矩阵相乘可以验证:  $[T_{ij}]_c [T_{ij}]_s^T = [I]$ 。其中,  $[I]$  是单位矩阵, 即:

$$[T_{ij}]_s^T = [T_{ij}]_c^{-1}, \quad (1.33)$$

$$[T_{ij}]_c^T = [T_{ij}]_s^{-1}. \quad (1.34)$$

假定整体坐标系下的柔度和刚度矩阵分别是  $[S_{ij}^G]$  和  $[C_{ij}^G]$ , 局部坐标系下的相应量为  $[S_{ij}]$  和  $[C_{ij}]$ , 则(参见习题3):

$$[S_{ij}^G] = [T_{ij}]_s [S_{ij}] [T_{ij}]_s^T, \quad (1.35)$$

$$[C_{ij}^G] = [T_{ij}]_c [C_{ij}] [T_{ij}]_c^T. \quad (1.36)$$

**例 1.1** 假定局部坐标系的  $x_3$  轴平行于整体  $z$  坐标, 并且局部  $x_1$  轴与整体  $x$  坐标的夹角为  $\theta$  (图 1-6), 写出这两个坐标系之间的坐标变换矩阵  $[T_{ij}]_s$  和  $[T_{ij}]_c$ 。

**解** 根据式(1.27), 我们有:

$$l_1 = \cos \theta, \quad m_1 = \sin \theta, \quad n_1 = 0, \quad l_2 = -\sin \theta, \quad m_2 = \cos \theta,$$

$$n_2 = 0, \quad l_3 = 0, \quad m_3 = 0, \quad n_3 = 1,$$