

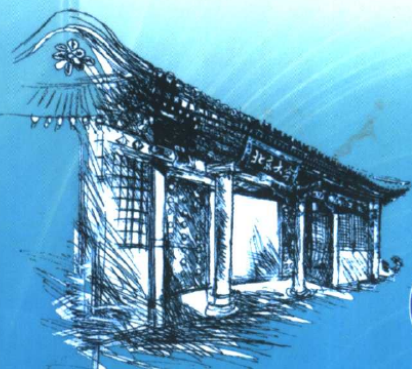


恒谦教学与备考研究中心研究成果
全国名牌重点中学特高级教师编写

教材解析

双通道

丛书主编 方可



高

一

数

学

(上)

北京教育出版社

恒谦

恒谦教学与备考研究中心研究成果 全国名牌重点中学特高级教师编写

教材解析

双通道

高一数学(上)

丛书主编 方可
本册主编 苟春鹏
撰稿人 苟春鹏 严志龙
王占祥 史克礼



北京教育出版社

教材解析

双通道

教材解析双通道

高一数学(上)

GAOYI SHUXUE(SHANG)

丛书主编 方可

*

北京教育出版社出版

(北京北三环中路6号)

邮政编码:100011

网 址:www.bph.com.cn

北京出版社出版集团总发行

新华书店经销

西安新华印刷厂印刷

*

880×1230 32开本 7.125印张 172 000字

2004年6月第1版 2004年6月第1次印刷

印数:1-10 000

ISBN 7-5303-3459-X

G·3389 定价:10.50元



双通道

编写说明

一、教材是学习的重要工具，但教辅图书必不可少

万丈高楼平地起，学习正是如此，没有对教材内容全面、准确、细致、深刻的领会，中考、高考无从谈起。教材是以知识为载体，按照一定的学科系统、认知规律来编排的，限于篇幅，囿于各地情况的不同，对于一些规律和方法不可能做到详尽阐述，仅仅是以知识内容的直接运用为主，远远不能满足考试大纲中对知识综合运用的要求。因此，相关的教辅图书应运而生，对师生来说必不可少。

二、《教材解析双通道》是连接教材和考试的最佳双向通道

中考、高考是一种阶段性测试，“龙门”一跃对所有的考生来说，都是一道必须跨越的门槛。由于目前国情所限，中考、高考是一种以教材为基础、以解题为表象、以能力为核心的选拔性测试。上过考场的人都知道，真正的考题与教材尚有一段距离。

如何实现教材内容——解题能力——应考素质这三个环节的有效转换，是检验教师教学质量、衡量教辅图书优劣惟一有效的标尺！为达此目的，众多的教辅图书都做了许多有益的尝试。《教材解析双通道》就是其中之一。首先，它遵循一般的认知规律，铺就了一条由知识到能力的正向通道，即挖掘教材知识内容，列举各类典型例题，提供多种解题思路，并通过练习提升能力，达到对知识的全面掌握。其次，反其道而行之，它铺就了一条由考场到教材内容的反向通道，即整理各章（节）的常考点，通过各类考题检验学生对教材内容的掌握情况，同时总结相关的规律、方法，指出以往易错之处及思维误区，传授多种解题思路及技巧，帮助学生找到考题和教材的内在联系，从而更有针对性地掌握教材的知识内容。《教材解析双通道》铺就的这种双向通道，可以有效地拉近考题与教材之间的距离。

三、《教材解析双通道》力求实现教材与考试的零距离

为了实现教材内容——解题能力——应考素质这三个环节真正意义上的贯通，我们针对最新的教材内容，按照同步学习的教学顺序，每一章（节）进行如下讲解：

教材重点、难点、疑点挖掘 抓住教材中的重点、难点、疑点，对基本概念、基础知识进行多角度、全方位地分析、讲解。

典型例题归纳与解题规律、方法点评 对与教材相关的类型题分类讲述，总结相关的规律、方法，把解题的诀窍分散到章（节），一点一滴地渗透、传授。

（中考）高考常考点归纳与突破 联系最新的考题，研究相应的考点规律和解答策略，指导学生走出思维误区，实现对（中考）高考的彻底跨越。

题型设计与预测 优化习题，优化思维，考察对知识的理解和解题方法的运用，并传递最新的考情及题型信息。

《教材解析双通道》——您成功的金光大道！

恒谦教学与备考研究中心
《教材解析双通道》丛书编委会





目 录

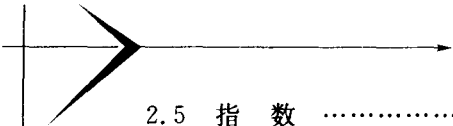


第一章 集合与简易逻辑

1.1 集 合	(1)
1.2 子集、全集、补集	(11)
1.3 交集、并集	(20)
1.4 含绝对值的不等式解法	(32)
1.5 一元二次不等式解法	(43)
1.6 逻辑联结词	(55)
1.7 四种命题	(64)
1.8 充分条件与必要条件	(74)

第二章 函 数

2.1 函 数	(84)
2.2 函数的表示法	(92)
2.3 函数的单调性	(101)
2.4 反函数	(111)



2.5 指数	(117)
2.6 指数函数	(123)
2.7 对数	(129)
2.8 对数函数	(137)
2.9 函数的应用举例	(144)

第三章 数列

3.1 数列	(154)
3.2 等差数列	(161)
3.3 等差数列的前 n 项和	(166)
3.4 等比数列	(172)
3.5 等比数列的前 n 项和	(180)
参考答案	(189)

第一章 集合与简易逻辑

1.1 集合

教材重点、难点、疑点挖掘

教材内容

1. 集合的概念:一般地,某些指定的对象集在一起就成为一个集合,也简称集.集合中的每个对象叫做这个集合的元素.集合常用大写拉丁字母表示,而元素用小写拉丁字母表示.

2. 集合的表示方法:集合有三种表示方法,即列举法、描述法、图示法(韦恩图).

解读与挖掘

本小节的重点在于理解集合的三个特征,同时也是难点,疑点是对集合的判断.

1. 集合中的元素具有三大特征:

(1)确定性:给定一个集合 A ,对于任何一个具体对象 x ,那么 x 是 A 的元素或者不是 A 的元素,二者必有一种且只有一种是成立的.

(2)互异性:对于一个给定的集合,它的任何两个元素都是不同的.简而言之,同一个集合中不能出现重复元素.如方程 $x^2 + 4x + 4 = 0$ 的解集只能为 $\{-2\}$,而不能写为 $\{-2, -2\}$.

(3)无序性:集合中的元素是没有顺序的.如集合 $\{m, n\}$ 与 $\{n, m\}$ 是同一集合.

例 1 下列各组对象能否构成集合?并说明理由.

- (1)著名的中学特级教师;
- (2)世界上的一切恐怖分子;
- (3)某厂生产的所有手机;
- (4)不超过 15 的非负数;
- (5)小于 0 的自然数.

分析 判断一组对象能否构成集合,需要根据集合元素的确定性特点,看这组对象的意义是否明确,以确定某一对象是否符合该集合.

解 (1)不能构成集合.“著名的中学特级教师”无明确的标准,对于某人是否“著

名”无法作出客观地判断. 因此, 不能构成集合.

(2) 不能构成集合. 其理由类似于(1).

(3) 能构成集合. 因为“某厂生产的手机”是有编号的, 是确定的. 任一手机都可以明确判断是不是“某厂生产的”.

(4) 能构成集合. 任给一个实数 x , 可以明确地判断是不是“不超过 15 的非负数”, 即“ $0 \leq x \leq 15$ ”与“ $x > 15$, 或 $x < 0$ ”两者必居其一, 但仅居其一.

(5) 能构成集合. 因为“小于 0 的自然数”的元素的意义是明确的, 没有符合条件的自然数, 即任取一自然数 x , 都能得出 $x \geq 0$ 的判断. 只不过这个集合中无任何元素, 所以是空集.

例 2 已知集合 $M = \{2x^2 + 1, 3x\}$, 则 x 的取值范围是_____.

分析 因为集合中的元素具有互异性, 因此, x 的取值不能使集合中的元素有相等情况.

解 由构成集合的元素的互异性, 得

$$2x^2 + 1 \neq 3x, \text{ 解得 } x \neq \frac{1}{2}, \text{ 且 } x \neq 1.$$

故应填 $x \neq \frac{1}{2}$, 且 $x \neq 1$.

2. 集合中的元素可以是数、点、线、人、物等, 元素与集合之间的关系是属于(\in)或不属于(\notin 或 $\bar{\in}$)的关系. 若 a 是 A 的元素, 记作 $a \in A$; 若 a 不是 A 的元素, 记为 $a \notin A$ 或 $a \bar{\in} A$.

3. 集合按元素个数可分为三类:

有限集: 含有有限个元素的集合;

无限集: 含有无限个元素的集合;

空集: 不含元素的集合, 记为 \emptyset .

4. 关于集合的三种表示方法:

(1) 列举法: 将集合中的元素一一列举出来, 写在大括号内, 且元素与元素间用“,”号隔开, 这种表示集合的方法称为列举法. 列举法通常适用于元素较少的有限集.

(2) 描述法: 将集合中元素的公共属性写在大括号内, 这种表示集合的方法称为描述法, 其一般书写格式是 $\{p | p \text{ 适合的条件}\}$, 其中 p 为代表元素, 描述法的特点是简洁明了, 适用范围广.

描述法的语言形式有三种: 文字语言, 符号语言, 图形语言.

例 3 用描述法的三种语言形式表示出直线 $y = -3x$ 上所有点的集合.

解 (1) 文字语言形式: $\{\text{直线 } y = -3x \text{ 上的点}\}$;

(2) 符号语言形式: $\{(x, y) | y = -3x, x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$;

(3) 图形语言形式: 在平面直角坐标系内画出直线 $y = -3x$ 的图象(略).

注意 在用符号语言表示集合时,应特别注意分清集合中的元素是点、是数、还是式.

(3)图示法:画一条封闭曲线,用它的内部来表示一个集合的方法.图示法的特点是形象、直观,为后面学习集合的运算提供了方便.

例 4 (1)用列举法表示下列集合:

① $\{x \mid x = \sqrt{m}, m < 20, x \in \mathbf{N}\}$;

② $\{(x, y) \mid \begin{cases} 2x + y = 8, \\ x - y = 1. \end{cases}\}$;

③ $\{x \mid x = |x|, x \in \mathbf{Z}, \text{且 } x < 5\}$;

④ $\{x \mid x = \frac{|a|}{a} + \frac{|b|}{b}, a, b \text{ 为非零实数}\}$.

分析 将集合中的元素一一列举出来,写在大括号内.

解 ① $\{0, 1, 2, 3, 4\}$;

② $\{(3, 2)\}$;

③ $\{0, 1, 2, 3, 4\}$;

④ 当 $a > 0, b > 0$ 时, $x = 2$; 当 $a < 0, b < 0$ 时, $x = -2$; 当 a, b 异号时, $x = 0$, 故列举法可表示为 $\{-2, 0, 2\}$.

注意 列举法表示集合时,首先要弄清集合中元素的特征.如②题中,集合的代表元素是 (x, y) ,故不能写成 $\{3, 2\}$ 和 $\{x = 3, y = 2\}$ 的形式.切忌重复和遗漏元素.

(2)用描述法表示下列各集合:

① 函数 $y = \frac{1}{x^2 - 1}$ 的定义域;

② 中国的所有宇航员;

③ 坐标平面内不在二、四象限的点的集合;

④ 反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 图象上所有点的集合.

分析 用描述法表示集合,首先要弄清是数集、还是点集或其它类型的集合,一般地,数集用一个字母来代表其元素;点集用一对有序数 (x, y) 来代表其元素,然后用符号来确定集合的条件,有时也可用文字语言形式来描述.

解 ① $\{x \mid x \neq \pm 1, x \in \mathbf{R}\}$;

② $\{\text{中国的宇航员}\}$;

③ $\{(x, y) \mid xy \geq 0\}$;

④ $\{(x, y) \mid y = \frac{k}{x}, k \neq 0, \text{且 } x \neq 0\}$.

3

3

注意 描述法表示集合时,大括号内可以是文字描述,也可以是数学式子描述.对于②,注意不要写成{中国所有的宇航员},因为大括号“{ }”已包含有“集”和“所有”的意思.

典型例题归纳与解题规律、方法点拨

1. 集合的概念问题

●例1 下列与集合 $\{x|y=2-x^2, x \in \mathbf{R}\}$ 相同的有().

A. \mathbf{R}

B. $\{y|y=2-x^2, x \in \mathbf{R}\}$

C. $\{(x, y)|y=2-x^2, x \in \mathbf{R}\}$

D. $\{x|x^2 \leq 2, x \in \mathbf{R}\}$

分析 对给出的集合,首先要搞清集合中的元素指的是什么,元素须满足什么条件,区别符号语言所表达的含义.

解 已知集合 $\{x|y=2-x^2, x \in \mathbf{R}\}$ 是函数 $y=2-x^2$ 的自变量 x 所有允许值组成的集合,因为 x 可取任意实数,所以 $\{x|y=2-x^2, x \in \mathbf{R}\} = \mathbf{R}$,故应选A.

说明 明确各选项集合所表示的含义是正确选择的关键.事实上,B集合表示函数 $y=2-x^2$ 的所有函数值的集合,易知 $y \leq 2$,所以 $\{y=2-x^2, x \in \mathbf{R}\} = \{y|y \leq 2\}$;C集合是函数 $y=2-x^2$ 图象上所有点组成的集合;D集合是满足 $|x| \leq \sqrt{2}$ 的所有实数值组成的集合.

思考 没有弄清集合中元素的一般形式,极易错选B、C.

●例2 已知集合 $A = \{x|(a-2)x^2 + (a-3)x - 1 = 0\}$ 是单元素集合,求 a 的值.

分析 集合A实质是方程 $(a-2)x^2 + (a-3)x - 1 = 0$ 的解集.A是单元素集 \Leftrightarrow 方程只有一个实数解.

解 方程 $(a-2)x^2 + (a-3)x - 1 = 0$ 应为一解,分别为两种情况:

(1) $a=2$ 时, $-x-1=0, x=-1$ 为一解.

$\therefore a=2$.

(2) $a \neq 2$ 时, $\Delta = (a-3)^2 + 4(a-2) = (a-1)^2 = 0$,

$a=1$,其实 $-x^2 - 2x - 1 = 0, x = -1$,在二次方程中称为相等二实根,在集合中,由于元素的互异性,只算作一个元素.

故 a 的取值为 $a=1$,或 $a=2$.

说明 本题的求解关键在于将集合语言表达的条件翻译为方程语言,再用方程的方法处理,该题容易漏掉 $a=2$ 时的情形.

思考 类似于本题,请读者思考下面的题目:

已知集合 $A = \{x|ax^2 - 3x + 2 = 0, a \in \mathbf{R}\}$.

(1) 若A是空集,求 a 的取值范围;

(2) 若A只有一个元素,求 a 的值;

(3) 若A中至少有一个元素,求 a 的取值范围.

●例 3 已知集合 $\{x, xy, \lg(xy)\}$ 与集合 $\{0, |x|, y\}$ 表示同一集合, 求 x, y 之值.

分析 两集合表示同一集合, 则它的元素对应相同, 抓住 $\lg(xy)$ 中的真数 $xy > 0$ 分析即可.

解 由 $\lg(xy)$ 知 $xy > 0$,

所以 $x \neq 0, xy \neq 0$, 则必有

$$\begin{cases} \lg(xy) = 0, \\ x = |x|, \\ xy = y, \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} \lg(xy) = 0, \\ x = y, \\ xy = |x|. \end{cases}$$

解之得 $x = y = 1$, 或 $x = y = -1$.

但当 $x = y = 1$ 时, 有 $x = xy = 1, |x| = y = 1$, 这与集合元素的互异性矛盾, 故只有 $x = y = -1$.

思考 若忽视了集合中元素的互异性, 就会得出错解 $x = y = 1$.

2. 集合的表示法问题

●例 4 用适当的方法表示下列集合:

(1) 能被 3 整除且绝对值小于 10 的所有整数;

(2) 使函数 $y = \frac{1}{x^2 + x - 6}$ 有意义的实数 x 的集合;

(3) 坐标平面内, 两坐标轴上的点的集合.

分析 (1) 可用列举法; (2)(3) 可用描述法.

解 (1) $\{-3, -6, -9, 3, 6, 9, 0\}$;

(2) $\{x | x \neq 2, \text{且 } x \neq -3, x \in \mathbf{R}\}$;

(3) $\{(x, y) | x = 0, \text{或 } y = 0, x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\} = \{(x, y) | xy = 0, x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$.

说明 一般地, 有限集采用列举法, 无限集采用描述法.

思考 要重视同一数学对象的不同语言形态的表达方法及互译练习.

●例 5 用描述法表示图 1-1 中阴影部分(含边界)的点的集合.

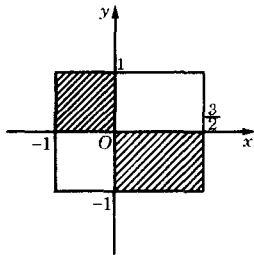


图 1-1

分析 分析图象特征,将图象语言转化为符号语言.

解 图 1-1 中的阴影部分可用描述法表示为:

$$\{(x, y) \mid -1 \leq x \leq \frac{3}{2}, -1 \leq y \leq 1, \text{且 } xy \leq 0\}.$$

说明 该集合的代表元素为 (x, y) 点形式,所以仔细观察分析纵、横坐标所满足的条件是准确写出集合的关键.

思考 这里 $xy \leq 0$ 这一条件限制很重要,类似地,请你用描述法写出框线内空白部分点的集合,你能用普通语言作出回答吗?

3. 元素与集合间的关系问题

例 6 设集合 $A = \{x \mid x = a + b\sqrt{2}, a, b \in \mathbf{Z}\}$, 对 $m \in A, n \in A$, 有如下结论:

- (1) $m + n \in A$; (2) $m - n \in A$;
 (3) $mn \in A$; (4) $\frac{m}{n} \in A (n \neq 0)$.

其中错误的序号是_____.

分析 抓住集合中的元素满足关系式 $x = a + b\sqrt{2}, a, b \in \mathbf{Z}$, 对四个结论作出逐个验证.

解 易验证(1)、(2)、(3)正确,对于(4),取 $m = 1 + \sqrt{2} \in A, n = 3 \in A$, 而 $\frac{m}{n} = \frac{1}{3} +$

$\frac{\sqrt{2}}{3} \notin A$. 故填(4).

说明 要否定一个结论,只须举出反例即可.

思考 请你验证:若 $m \in A, m^2$ 是否属于 A ?

例 7 数集 A 满足:若 $a \in A, a \neq 1$, 则 $\frac{1}{1-a} \in A$.

证明 (1)若 $2 \in A$, 则在 A 中还有另外两个数, 求出这两个数;

- (2)集合 A 不可能是单元素实数集;
 (3)集合 A 中至少有三个不同的元素.

分析 (1)反复运用 $a \in A, a \neq 1 \Rightarrow \frac{1}{1-a} \in A$, 即可求得另外两个数; (2)运用反证法; (3)求出三个不同元素即可.

证明 (1) $2 \in A, 2 \neq 1 \Rightarrow \frac{1}{1-2} = -1 \in A$,

$-1 \in A, -1 \neq 1 \Rightarrow \frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2} \in A$.

$\frac{1}{2} \in A, \frac{1}{2} \neq 1 \Rightarrow \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \in A$.

则在 A 中还有另外两个数 $-1, \frac{1}{2}$.

(2) 由集合 A 是单元素集 $\Rightarrow a = \frac{1}{1-a}$, 而 $a^2 - a + 1 = 0$ 的方程无解,

$$\therefore a \neq \frac{1}{1-a}.$$

\therefore 集合 A 中的元素不可能是单元素的实数.

$$(3) \because a \in A, a \neq 1 \Rightarrow \frac{1}{1-a} \in A$$

$$\text{又 } \frac{1}{1-a} \in A, \text{ 且 } \frac{1}{1-a} \neq 1, \text{ 即 } a \neq 0 \text{ 时 } \Rightarrow \frac{1}{1 - \frac{1}{1-a}} = \frac{a-1}{a} \in A.$$

$$\frac{a-1}{a} \in A, \text{ 且 } \frac{a-1}{a} \neq 1, \text{ 即 } a-1 \neq a \text{ 时 } \Rightarrow \frac{1}{1 - \frac{a-1}{a}} = a \in A.$$

$$\therefore \text{若 } a \in A, \text{ 则 } \frac{1-a}{a} \in A, \frac{1}{1-a} \in A.$$

$$\text{显然 } a \neq \frac{1-a}{a} \neq \frac{1}{1-a}.$$

故集合 A 中至少有三个不同的元素.

说明 要判断一个对象是否为某个集合的元素, 就是判断某个对象是否具备给定集合中元素所具有的属性.

思考 根据以上证明, 你能否断定上述集合 A 中有且只有三个不同的元素吗?

规律方法总结

1. 判断一些对象集在一起能否构成集合, 就要看对象能否确定, 若对象能够确定, 则可构成集合, 否则, 不能.
2. 判断两个集合是否为同一集合, 就要看它们的元素是否完全相同, 应特别注意同一集合中的元素是互异的.
3. 对于用描述法给出的集合 $\{x | x \in p\}$, 要紧紧抓住竖线前面的代表元素以及它具有的性质 p .

高考常考点归纳与突破

本节常考点

在高考试题中, 考查对集合概念的理解和认识水平, 如对集合中涉及的特定字母和符合、元素与集合间的关系的比较, 主要表现在对集合三大特性的理解以及集合的表述上, 以选择题为主. 解答集合概念型的考题, 应首先分清集合中元素是什么, 要紧紧抓住代表元素以及其具有的性质, 注意元素的特性, 注意数形结合思想以及集合三

种语言的转化.

考题 1 (2003 年北京市东城区)下列集合中表示空集的是().

A. $\{0\}$ B. $\{x | \tan x = \frac{\pi}{2}\}$

C. $\{x | \cot x = 0\}$ D. $\{x | \sin x = \frac{\pi}{2}\}$

解 $\because \sin x = \frac{\pi}{2} > 1, \therefore x$ 无解.

故选 D.

注意 明确“空集是指不含任何元素的集合”这一概念是作出正确选择的关键.

思维误区 易错选 A 和 B.

考题 2 (2003 年山东淄博市)定义 $A-B = \{x | x \in A, \text{且 } x \notin B\}$, 若 $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{1, 4, 8\}$, 则 $A-B$ 等于().

A. $\{4, 8\}$ B. $\{1, 2, 6, 10\}$

C. $\{1\}$ D. $\{2, 6, 10\}$

解 由 $x \notin B$ 知, $x \neq 1, x \neq 4, x \neq 8$, 且由 $x \in A$ 知 $x = 2, 6, 10$, 故选 D.

注意 明确元素与集合间的关系, 抓住所定义集合 $A-B$ 中元素 x 的限制条件是求解本题之关键.

思维误区 如果误将 $x \in A, \text{且 } x \notin B$ 中的“ $x \notin B$ ”看错成 $x \in B$ 就易错选 A.

考题 3 (2002 年洛阳市)已知数集 M 满足条件: 若 $a \in M$, 则 $\frac{1+a}{1-a} \in M$ ($a \neq \pm 1, a \neq 0$), 已知 $3 \in M$, 试把由此确定的 M 的其他元素全部求出来.

解 $\because a = 3 \in M$, 则 $\frac{1+a}{1-a} = \frac{1+3}{1-3} = -2 \in M$,

$$\therefore \frac{1-2}{1+2} = -\frac{1}{3} \in M, \therefore \frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \in M,$$

$$\therefore \frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 3 \in M.$$

$$\therefore M = \{3, -2, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\}.$$

注意 题目要求将集合 M 中的所有元素全部写出来, 由此分析断定, 该集合 M 中的元素是能写完的, 从而可反复运用题设条件“若 $a \in M$, 则 $\frac{1+a}{1-a} \in M$ ”, 直至出现重复元素为止.

思维误区 如果缺乏对题目中隐含条件(M 是有限集)的挖掘,一些考生将会半途而废.

考题 4 (2002年北京西城区)已知集合 $A = \{p | x^2 + 2(p-1)x + 1 = 0, x \in \mathbf{R}\}$, 求一次函数 $y = 2x - 1$, “ $x \in A$ ”的函数值的取值范围.

解 集合 A 中的元素 p 必须满足关于 x 的二次方程 $x^2 + 2(p-1)x + 1 = 0$ 有实根, 则有

$$\Delta = 4(p-1)^2 - 4 \geq 0, \text{解得 } p \geq 2, \text{或 } p \leq 0.$$

$$\therefore A = \{p | p \geq 2, \text{或 } p \leq 0\}.$$

因为 $x \in A$, 所以 $x \geq 2$, 或 $x \leq 0$.

所以 $2x - 1 \geq 3$, 或 $2x - 1 \leq -1$.

所以 y 的取值范围是 $\{y | y \leq -1, \text{或 } y \geq 3\}$.

注意 解答本题的关键有二:一是搞清集合 A 中的元素是 p 而不是 x ;二是理解 A 中元素 p 的属性,即 p 的取值范围必须满足关于 x 的二次方程有实数根.

思维误区 该题容易误认为集合 A 中的元素是 x , 而导致解题错误.

考题 5 (2003年咸阳市)已知由实数组成的集合 A 满足条件:若 $x \in A$, 则必有 $\frac{1}{1-x} \in A$.

(1) 设 A 中恰有三个元素,且 2 是其中一个,求这时的集合 A ;

(2) 有人判断集合 A 中的元素可以有且只有一个,请你作出判断,看他的断言是否正确,为什么?

解 (1) $\because 2 \in A, \therefore \frac{1}{1-2} = -1 \in A, \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \in A, \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \in A$. 由集合中元素

的互异性知,

$$A = \{2, -1, \frac{1}{2}\}.$$

(2) 他的断言不正确.

\because 要使集合 A 只有一个元素,必有 $x = \frac{1}{1-x}$, 即 $x^2 - x + 1 = 0$,

但这个方程的 $\Delta = -3 < 0$, 方程无实根.

\therefore 不存在实数 x , 使集合 A 有且只有一个元素.

注意 该题第(2)问的判断关键在于,将“ A 中的元素只有一个”翻译成数学式子“ $x = \frac{1}{1-x}$ ”. 其知识要素即集合中元素的互异性.

思维误区 如果将“有且只有一个”只理解为“有”,就会误断为该人的断言是正确的.

题型设计与预测

基本型

1. 下列四个命题中,正确的命题有().

(1) $1, \frac{3}{2}, \frac{6}{4}, |-\frac{1}{2}|, 0.5$ 这些数组成的集合有五个元素;

(2) 集合 $\{y|y=x^2-1\}$ 与集合 $\{(x,y)|y=x^2-1\}$ 是同一个集合;

(3) 若 $x \in \mathbf{N}, y \in \mathbf{N}$, 则 $x+y \geq 2$;

(4) 集合 $\{0, -1, 2, -2\}$ 与集合 $\{-2, -\sin \frac{\pi}{2}, 4\sin 0^\circ, 2\}$ 是同一个集合.

A. 1个

B. 2个

C. 3个

D. 4个

2. 已知集合 $M = \{m \in \mathbf{N} | (8-m) \in \mathbf{N}\}$, 则集合 M 的元素个数是().

A. 7个

B. 8个

C. 9个

D. 10个

3. 集合 $M = \left\{ x \mid \frac{6}{3-x} \in \mathbf{Z}, x \in \mathbf{Z} \right\}$, 则列举法表示 M 为_____.

4. $\frac{a}{|a|} + \frac{|b|}{b} + \frac{c}{|c|} + \frac{|abc|}{abc}$ 的值的集合为_____.

5. 试讨论集合 $\{3, x, x^2-2x\}$ 中, x 应满足的条件.

能力型

6. 方程组 $\begin{cases} x+y=1 \\ x^2-y^2=9 \end{cases}$ 的解 (x,y) 的集合是().

A. $(5, -4)$

B. $\{5, -4\}$

C. $\{(-5, 4)\}$

D. $\{(5, -4)\}$

7. 点的集合 $A = \{(x,y) | xy \geq 0\}$ 是指().

A. 第一象限内的点集

B. 第三象限内的点集

C. 第一、三象限内的点集

D. 不在第二、第四象限内的点集

8. 若集合 $M = \{y | y = x^2 - 1, |x| \leq 2, x \in \mathbf{Z}\}$, 用列举法表示 M 为_____.

9. 设 $A = \{x | x \leq \sqrt{10}\}$, $a = \sqrt{2} + \sqrt{3}$, 则 a _____ A.

10. 设集合 $A = \{x | 6 + \sqrt{3} < x \leq 10\}$.

(1) A 是有限集还是无限集?

(2) $3 + \sqrt{17}$ 是不是集合 A 中的元素? $5\sqrt{3}$ 呢?

11. 下列三个集合:

① $\{x | y = x^2 + 1\}$; ② $\{y | y = x^2 + 1\}$; ③ $\{(x,y) | y = x^2 + 1\}$.

(1) 它们是不是相同的集合?

(2) 它们的各自含义是什么?

12. 设非空集合 $A = \{x | x^2 + (b+2)x + b + 1, b \in \mathbf{R}\}$, 求集合 A 中所有元素的和.

1.2 子集、全集、补集

教材重点、难点、疑点挖掘

教材内容

1. 一般地, 对于两个集合 A 与 B , 如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素, 我们就说集合 A 包含于集合 B , 或集合 B 包含集合 A , 记作 $A \subseteq B$ (或 $B \supseteq A$). 这时我们也说集合 A 是集合 B 的子集.

2. 一般地, 对于两个集合 A 和 B , 如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素, 同时集合 B 的任何一个元素都是集合 A 的元素, 我们就说集合 A 等于集合 B , 记作 $A = B$.

3. 如果 $A \subseteq B$, 并且 $A \neq B$, 就说 A 是 B 的真子集, 记作 $A \subsetneq B$ (或 $B \supsetneq A$).

4. 一般地, 设 S 是一个集合, $A \subseteq S$, 由 S 中所有不属于 A 的元素组成的集合, 叫做 S 中子集 A 的补集 (或余集), 记作 $\complement_S A$, 即

$$\complement_S A = \{x | x \in S, \text{且 } x \notin A\}.$$

5. 如果集合 S 含有我们所要研究的各个集合的全部元素, 这个集合就可以看作一个全集, 常记为 U .

解读与挖掘

本节分为两大部分: 第一部分讲子集, 第二部分讲全集和补集. 本节重点是子集、补集的概念, 难点是元素与子集、属于与包含之间的区别.

1. “ A 是 B 的子集”的含义用符号语言可表示为: $A \subseteq B$ (或 $B \supseteq A$) \Leftrightarrow 任意 $x \in A \Rightarrow x \in B$.

2. 当 A 不是 B 的子集时, 记作 $A \not\subseteq B$ (或 $B \not\supseteq A$). (读作 A 不包含于 B (或 B 不包含 A)).

3. 任何一个集合是它本身的子集, 但任何集合不是它本身的真子集, 即 $A \subseteq A$.

4. 空集是任何集合的子集, 同时空集又是任何非空集合的真子集, 即对任一集合 A , 有 $\emptyset \subseteq A$, 若 $A \neq \emptyset$, 则 $\emptyset \subsetneq A$.

5. 由子集与集合相等概念易知, 对于两个集合 A, B , 若 $A \subseteq B$, 且 $B \subseteq A$, 则 $A = B$.

6. 若 $A \subseteq B, B \subseteq C$, 则 $A \subseteq C$.

7. \in 与 \subseteq 的区别: \in 表示元素与集合之间的关系, 如 $7 \in \mathbf{N}, -7 \notin \mathbf{N}$ 等; \subseteq 表示集