大学物理CCBP教程

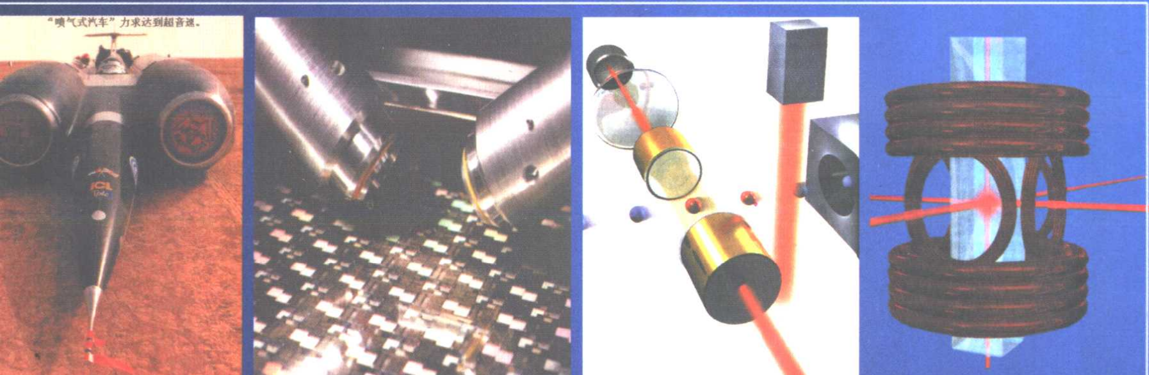
A COURSE IN CALCULUS-COMPUTER-BASED PHYSICS

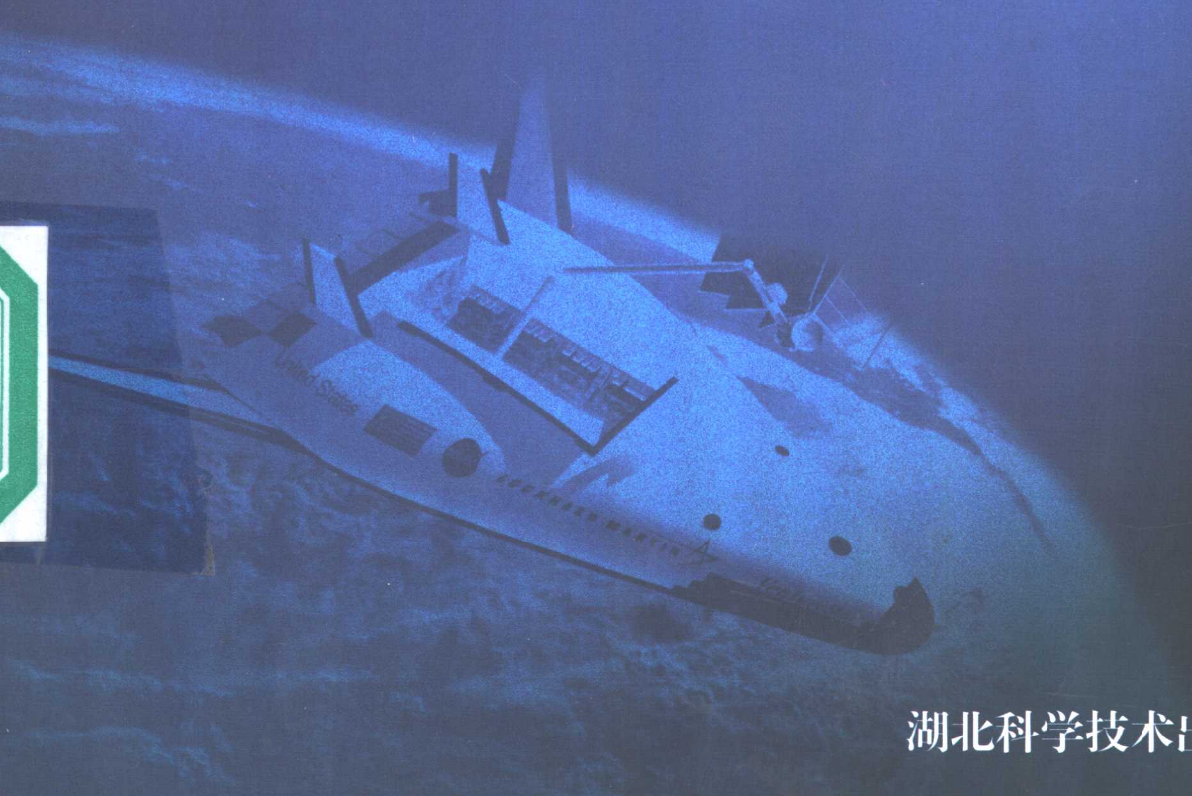
A COURSE IN CALCULUS-COMPUTER-BASED PHYSICS

A COURSE IN CALCULUS-COMPUTER-BASED PHYSICS

李元杰　主编

（例题与习题）





湖北科学技术出版社

大学物理

CCBP教程

A COURSE IN CALCULUS - COMPUTER - BASED PHYSICS

(例题与习题)

主　编　李元杰

副主编　杨晓雪　李长真　汤　征　汪晓元

湖北科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

大学物理 CCBP 教程/李元杰主编．—武汉:湖北科学技术出版社,2000.7
ISBN 7-5352-2479-2

Ⅰ．大…　Ⅱ．李…　Ⅲ．物理学-高等学校-教材　Ⅳ．04
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 33009 号

大学物理 CCBP 教程(例题与习题)　　© 李元杰　主编

责任编辑:王连弟　　封面设计:代　旻

出版发行:湖北科学技术出版社　　电话:86782508
地　　址:武汉市武昌黄鹂路 75 号　　邮编:430077

印　　刷:华中理工大学印刷厂　　邮编:430074

787mm×1092mm　16 开　9.75 印张　220 千字
2000 年 7 月第 1 版　　2001 年 5 月第 2 次印刷

印　数:3 001－5 000　　定价:32.00 元(套)
ISBN 7－5352－2479－2/N·40

目　　录

第一章 引 言

例题

例 1 考虑图中矢量 $\boldsymbol{A}=3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$

(1)求 $\boldsymbol{A}$ 的长度。

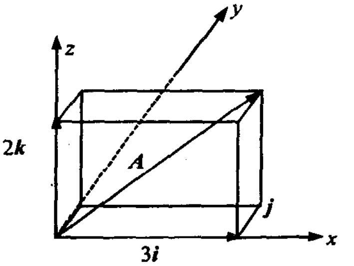
$A^2=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}=3^2+1^2+2^2=14$

$A=\sqrt{14}$是 $\boldsymbol{A}$ 的长度

(2)$\boldsymbol{A}$ 在 xy 面上的投影的长度是多少?

$\boldsymbol{A}$ 在 xy 面上的投影是 $3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$,它的长度的平方是 $3^2+1^2=10$

(3)在 xy 平面内作一与 $\boldsymbol{A}$ 垂直的矢量。



例1图

设所求的矢量为

$$\boldsymbol{B}=B_x\boldsymbol{i}+B_y\boldsymbol{j},\quad 且\ \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=0$$

即 $(3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k})\cdot(B_x\boldsymbol{i}+B_y\boldsymbol{j})=0,\quad 3B_x+B_y=0,\quad \dfrac{B_y}{B_x}=-3,\quad \boldsymbol{B}=\alpha(\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j})$

其中 α 为任意非零实常数。$\boldsymbol{B}$ 矢的长度无法由此题条件定。

(4)求单位矢量 $\boldsymbol{B}_0$。

$$\boldsymbol{B}_0=\frac{\boldsymbol{B}}{B}=\frac{\alpha(\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j})}{\alpha\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{(\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j})}{\sqrt{10}}$$

(5)求 $\boldsymbol{A}$ 与矢量 $\boldsymbol{C}=2\boldsymbol{i}$ 的标积。

$$(3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k})\cdot(2\boldsymbol{i})=6$$

(6)将坐标绕 Z 轴顺时针转过 90°(沿正 Z 方向看),求 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{C}$ 在新坐标下的表达。新的基 $\boldsymbol{i}',\boldsymbol{j}',\boldsymbol{k}'$ 与原来的基 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 的关系是 $\boldsymbol{i}'=\boldsymbol{j},\boldsymbol{j}'=-\boldsymbol{i},\boldsymbol{k}'=\boldsymbol{k}$,所以

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{i}'-3\boldsymbol{j}'+2\boldsymbol{k}'\qquad \boldsymbol{C}=-2\boldsymbol{j}'$$

(7)在带“′”系中求 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}$,$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}=6$ 与不带“′”的系中完全一样。

(8)求 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}$

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\3&1&2\\2&0&0\end{vmatrix}=4\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}\qquad \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}'&\boldsymbol{j}'&\boldsymbol{k}'\\1&-3&2\\0&-2&0\end{vmatrix}=4\boldsymbol{i}'-2\boldsymbol{k}'$$

(9)求矢量 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{C}$

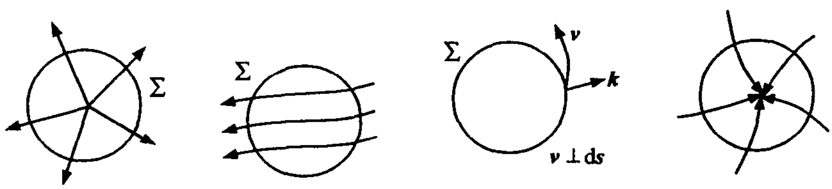
$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{C}=\boldsymbol{i}'-\boldsymbol{j}'+2\boldsymbol{k}'$$

例 2 求$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2$

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2&=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\\&=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}\\&=a^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+b^2\end{aligned}$$

例3　设有一流体的速度矢量场分布 $\boldsymbol{v}(x,y,z)$，已知对空间任一曲面 S，定义 $\int_S \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = N$ 为 S 面的通量，或穿过 S 面的矢量之力线数，试讨论对任一封闭曲面 $\sum$，积分 $\int_\Sigma \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的物理意义。

解　被积元 $\boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的正、负性表示 $\boldsymbol{v}$ 与 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 是同向还是反向，若 $\boldsymbol{v}$ 与 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 同向称力线穿出面 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$，若 $\boldsymbol{v}$ 与 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 反向，称力线穿入面 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$，于是 $\oint_\Sigma \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} > 0$ 表示从面内净穿出力线或流出通量为正，见图(a)，若 $\oint_\Sigma \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$ 表示净穿出力线或流量为0，见图(b)，若 $\oint_\Sigma \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} < 0$ 表示净穿入力线或净流入流量，见图(c)。



例3图

定义单位体积内净流出通量或净穿出力线数为该体积内源头的平均强度，记为

$$\overline{\nabla\cdot\boldsymbol{v}} = \frac{\oint_\Sigma \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta V} = \frac{N}{\Delta V}$$

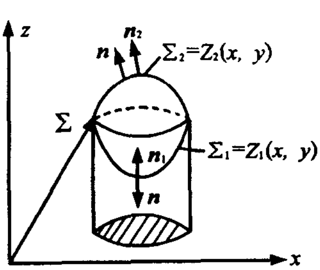
而空间某一点的源头强度

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint_\Sigma \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta V}\qquad \sum \text{为包围 } \Delta V \text{ 的封闭界面}$$

$\nabla\cdot\boldsymbol{v}$ 又称为矢量场 $\boldsymbol{v}$ 的散度。

例4　证明 $\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}V = \oint_\Sigma \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$

(1) 按 $\nabla\cdot\boldsymbol{v}$ 的定义等式即成立，积分 $\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}V$ 和 $\oint_\Sigma \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 都表示从体积 V 中总流出的通量。



例4图

(2)数学证明

$$\iiint_V \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \oint_\Sigma v_x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + v_y\mathrm{d}x\mathrm{d}z + v_z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

只证 $\int \frac{\partial v_z}{\partial z}\mathrm{d}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{\Sigma} v_z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$\iiint\limits_{x\,y\,z} \frac{\partial v_z}{\partial z}\mathrm{d}z = \int \mathrm{d}x\mathrm{d}y[v_z(z_2) - v_z(z_1)] = \int\limits_{\Sigma_2} v_z\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int\limits_{\Sigma_1} v_z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int\limits_{\Sigma_2} v_z\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int\limits_{-\Sigma_1} v_z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint\limits_{\Sigma} v_z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

习题

一、基础训练题

1. 两矢量的标、矢积,已知两矢量 $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} - 5\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}$,求:

(1)各矢量的长度; $(\sqrt{50}, \sqrt{41})$

(2)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$; (-25)

(3)$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 间夹角; $(123.5°)$

(4)各矢量的方向余弦;

(5)矢量和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与矢量差 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$; $[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = 2\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}]$

(6)矢积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$。 $(34\boldsymbol{j} - 13\boldsymbol{j} + 10\boldsymbol{k})$

2. 矢量代数。已知 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = 11\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b} = -5\boldsymbol{i} + 11\boldsymbol{j} + 9\boldsymbol{k}$

(1)求 $\boldsymbol{a}$ 及 $\boldsymbol{b}$;(2)求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 之间的夹角。

3. 试证明,若 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 则 $\boldsymbol{a}$ 垂直于 $\boldsymbol{b}$。

4. 不变性。考虑在基矢为 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 的直角坐标系中的一矢量 $\boldsymbol{A}$。现将坐标系统绕 Z 轴旋转 θ 角。

(1)用 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ 和 θ 表 $\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}' = \boldsymbol{k}$;

(2)用 $A_{x'}, A_{y'}, A_{z'}$ 和 $\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}'$ 表 $\boldsymbol{A}$,将此表达式变换到 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$,从而求出 $A_{x'}, A_{y'}, A_{z'}$ 和 A_X, A_Y, A_Z 的关系。

(3)证明 $A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = A_{x'}^2 + A_{y'}^2 + A_{z'}^2$。

5. 已知 $\oint_C \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 为平面矢量场绕闭合环路 C 的环量,定义平均涡旋强度 $\overline{|(\nabla\times\boldsymbol{v})|} = \frac{\oint_C \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\Delta S}$ 为 C 包围下的单位面积之环量,它描述面 ΔS 上矢量场的平均涡旋强度。

定义极限 $|(\nabla\times\boldsymbol{v})| = \lim\limits_{\Delta S\to 0}\frac{\oint_c \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\Delta S}$ 为 ΔS 包围的某点,当 $\Delta S\to 0$ 时该点的涡旋强度或旋度。证明:$\oint_c \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int\nabla\times\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}S$

第二章　牛顿方程和哈密顿原理

第一节　质点运动学

例题

例 1　由位矢求速度、加速度和轨迹。

一质点位置由 $\boldsymbol{r} = A(e^{\alpha t}\boldsymbol{i} + e^{-\alpha t}\boldsymbol{j})$ 给出。α 为常数。求：

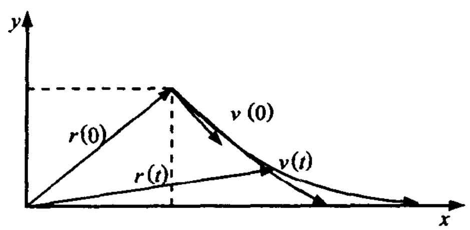
(1)质点在 $t=0$ 到 $t=1/\alpha$ 秒内的位移及这段时间内的平均速度。

(2)在 $t=1/\alpha$ 秒时的速度和加速度。

(3)$t=0$ 到 $t=1/\alpha$ 秒内的平均加速度。

(4)任意时刻的速度，加速度。

(5)质点的运动轨迹。



例1图

解　(1)

$$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}\left(\frac{1}{\alpha}\right) - \boldsymbol{r}(0) = A[(e-1)\boldsymbol{i} + (e^{-1}-1)\boldsymbol{j}]$$

$$\overline{\boldsymbol{v}} = \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \alpha A[(e-1)\boldsymbol{i} + (e^{-1}-1)\boldsymbol{j}]$$

也可

$$\overline{\boldsymbol{v}} = \alpha\int_0^{\frac{1}{\alpha}} \boldsymbol{v}\,dt = \alpha\int_0^{\frac{1}{\alpha}} \boldsymbol{v}\,dt = \alpha\int_0^{\frac{1}{\alpha}} d\boldsymbol{r} = \alpha\Delta\boldsymbol{r}$$

(2)因 $\boldsymbol{v} = \alpha A(e^{\alpha t}\boldsymbol{i} - e^{-\alpha t}\boldsymbol{j})$　　$\boldsymbol{a} = \alpha^2 A(e^{\alpha t}\boldsymbol{i} + e^{-\alpha t}\boldsymbol{j})$

故　$\boldsymbol{v}\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \alpha A(e\boldsymbol{i} - e^{-1}\boldsymbol{j})$　　$\boldsymbol{a}\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \alpha^2\boldsymbol{r}\left(\frac{1}{\alpha}\right)$

(3)$\overline{\boldsymbol{a}} = \alpha\int_0^{1/\alpha}\left(\frac{d\boldsymbol{V}}{dt}\right)dt = \alpha^2 A[(e-1)\boldsymbol{i} - (e^{-1}-1)\boldsymbol{k}]$

(4)见(2)解。

(5)为绘轨迹通常考虑极限情况很有用。

$t=0$ 时：

$$\boldsymbol{r}(0) = A(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})$$
$$\boldsymbol{v}(0) = \alpha A(\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j})$$

在 $t\to\infty\ (\alpha>0)$，$e^{\alpha t}\to\infty$，$e^{-\alpha t}\to 0$

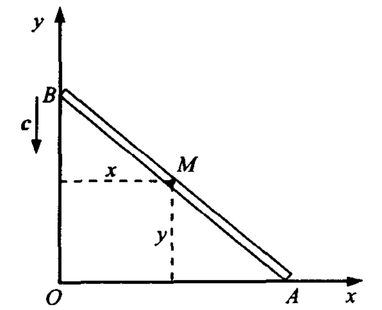
故此时　$\boldsymbol{r}\to Ae^{\alpha t}\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{v}\to\alpha Ae^{\alpha t}\boldsymbol{j}$

例 2　求速度和加速度。

设尺 AB 的端点 A 与 B 沿直线导槽 ox，oy 滑动，而 B 端以匀速 C 运动，求尺上 M 点的轨

迹方程,速度,加速度。$MA = a$, $MB = b$,$\angle OBA = \theta$。

解　M 点坐标　$(b\sin\theta, a\cos\theta)$



例2图

消去参变量

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \qquad 0 \leqslant x \leqslant b, 0 \leqslant y \leqslant a$$

速度分量

$$\dot{x} = b\cos\theta\dot{\theta} \quad \dot{y} = -\sin\theta\dot{\theta}$$

B 点坐标

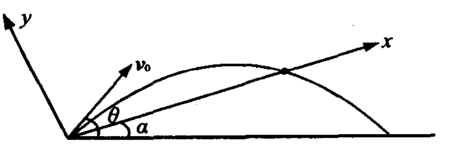
$$x_1 = 0, y_1 = (a+b)\cos\theta$$

依题意　$\dot{y}_1 = -c$

有　$\dot{\theta} = \dfrac{c}{a+b}\dfrac{1}{\sin\theta}$　故　$v_M = \dfrac{c}{a+b}[b\mathrm{ctg}\theta \boldsymbol{i} - a\boldsymbol{j}]$　$a_M = -\dfrac{b^4c^2}{(a+b)^2}\dfrac{1}{x^3}\boldsymbol{i}$

例3　抛体运动。一小山坡与地平面成一角度 α_0,问:如以初速率 v_0 从山脚下向山坡上发射炮弹,问发射角 θ(从地平算)为多大时,炮弹沿小山坡有最大射程。

解　取坐标系如图



例3图

依题意有

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -g\sin\alpha \qquad \mathrm{d}^2y/\mathrm{d}t^2 = -g\cos\alpha$$

当 $t=0$ 时有 $x=y=0$

$$v_X = v_0\cos(\theta-\alpha) \qquad v_Y = v_0\sin(\theta-\alpha)$$

由此可得

$$x = v_0\cos(\theta-\alpha)t - \frac{1}{2}g\sin\alpha t^2 \qquad y = v_0\sin(\theta-\alpha)t - \frac{1}{2}g\cos\alpha t^2$$

对应落地点的时间

$$t = 2v_0\sin(\theta-\alpha)/g\cos\alpha$$

射程 S

$$S = x|_{t=t'} = \text{常数}\left[\sin\alpha + \sin2\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right)\right]$$

故当　$\theta = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\alpha}{2}$时有最大射程。

例4　极坐标中求速度、加速度。设一根细棒以恒定角速度 ω 绕棒端点 O 端旋转,另有一带孔小环套在棒上,在 $t=0$ 时,环开始从 O 点出发,以恒定速率 u 沿棒向外运动,求小环的速度,加速度。

解　取平面极坐标 $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{r}_0$

$$\dot{\boldsymbol{r}}_0 = \dot{\theta}\boldsymbol{\theta}_0 \qquad \dot{\boldsymbol{\theta}}_0 = -\dot{\theta}\boldsymbol{r}_0$$

$\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{\theta}_0$ ~ 沿 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{\theta}$ 方向的单位矢量。

故　$\boldsymbol{v} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{r}\boldsymbol{r}_0 + r\dot{\theta}\boldsymbol{\theta}_0$

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = [\ddot{r} - r\dot{\theta}^2]\boldsymbol{r}_0 + [r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}]\boldsymbol{\theta}_0$$

$$\dot{\theta} = \omega \qquad \dot{r} = u \qquad \ddot{\theta} = 0 \qquad r = ut$$

由题意

$$\boldsymbol{v} = u\boldsymbol{r}_0 + r\omega\boldsymbol{\theta}_0 \qquad \boldsymbol{a} = -ut\omega^2\boldsymbol{r}_0 + 2u\omega\boldsymbol{\theta}_0$$

小环的径向速度为常数,横向速度随 t 线性增加。径向加速度随 t 线性增加,而横向加速度为常数。

例 5　切向、法向加速度。一质点沿圆摆线 $S = 4\alpha\sin\theta$ 弧线运动,若 $\dot{\theta}$ = 常数,则其加速度亦为一常数,试证明之。

解　S ~ 弧长(轨迹曲线)

θ ~ 轨迹曲线上切线与 x 轴之间夹角

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 4\alpha\omega\cos\theta$$

式中　$\omega = \theta$ = 常数　　$a_\tau = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -4\alpha\omega^2\sin\theta$(切向加速度)

$a_n = \dfrac{v^2}{\rho}$　　ρ 为曲线的曲率半径　$\rho = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta} = 4\alpha\cos\theta$

故　　$a_n = 4\alpha\omega^2\cos\theta$(法向加速度)

总加速度　　$a^2 = a_\tau^2 + a_n^2 = (4\alpha\omega^2)$ = 常数

我们没指明任何参考系而将运动分为切、法向,这样分解的好处是不依赖坐标的选择,而仅取决于曲线的形状。(a_n 指向曲线的凹侧为正)。

例 6　求曲率半径。一质点以初速 v_0 在与水平成仰角 θ_0 角的方向被抛出,忽略空气阻力,求质点 t 时刻的切、法向加速度及曲率半径 ρ。

解　设 t 时刻 $\boldsymbol{v}$ 与水平成 θ 角

$$\boldsymbol{a}_n = g\cos\theta\boldsymbol{n}, \quad \boldsymbol{a}_\tau = -g\sin\theta\boldsymbol{\tau}, \quad \sin\theta = \frac{v_y}{v}, \quad \cos\theta = \frac{v_x}{v}$$

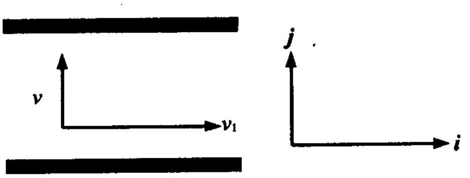
其中　　$v_x = v_0\cos\theta_0 \qquad v_y = v_0\sin\theta_0 - gt$

故　　$v = \sqrt{v_0^2 - 2v_0gt\sin\theta_0 + g^2t^2}$

由　　$a_n = \dfrac{v^2}{\rho}$　　有 $\rho = \dfrac{v_0^2 - 2v_0gt\sin\theta_0 + g^2t^2}{g\cos\theta}$

其中　　$\cos\theta = \dfrac{v_0\cos\theta_0}{v}$

例 7　相对速度。江水由西向东,水对岸流速 $v_1 = 3\mathrm{m/s}$,江宽 $b = 2.4\mathrm{km}$。欲使船在 $t = 10\mathrm{s}$ 内,由南向北横渡此江,问驾驶人应使船在什么方向航行?船对水的航速 v_2 为多少?



例7图

解　船同时参与流速 $\boldsymbol{v}_1$ 和航速 $\boldsymbol{v}_2$ 两种运动,合成为 $\boldsymbol{v}$,由图示坐标

$$\boldsymbol{v} = \frac{b}{t}\boldsymbol{j} = 4\boldsymbol{j} \qquad \boldsymbol{v}_1 = 3\boldsymbol{i}$$

由　　$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$

$\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_1 = -3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}$

$\boldsymbol{v}$ 的大小及方向均可由 $\boldsymbol{v}_2$ 的表式求出。

例 8　科里奥利加速度,P 处质点在一半径为 R 的球上以速度 v' 沿球的经线匀速运动。球以匀角速 ω 绕竖直直径转动,求 P 点的绝对加速度。

解　转动坐标系 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$

$\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 在经圈面内，$\boldsymbol{i}$ 则垂直经圈面。

P 点沿 $\boldsymbol{j}$ 方向的牵连加速度

$$\boldsymbol{a}_t = -\omega^2 \boldsymbol{r} = \omega^2 R\sin\theta\boldsymbol{j}$$

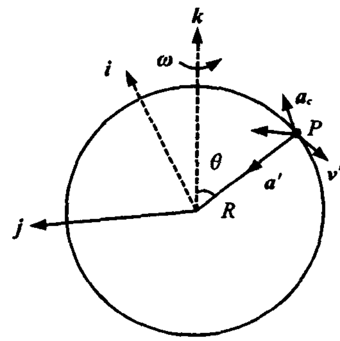
相对加速度　$$\boldsymbol{a} = -\frac{v'^2}{R}\sin\theta\boldsymbol{j} - \frac{v'^2}{R}\cos\theta\boldsymbol{k}$$

科里奥利加速度

$$2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}' = 2\omega\boldsymbol{k}\times(-v'\sin\theta\boldsymbol{k} - v'\cos\theta\boldsymbol{j}) = 2\omega v'\cos\theta\boldsymbol{i}$$

故总加速度

$$\boldsymbol{a} = 2\omega v'\cos\theta\boldsymbol{i} + \left(\omega^2 R\sin\theta - \frac{v'^2}{R}\sin\theta\right)\boldsymbol{j} - \frac{v'^2}{R}\cos\theta\right)\boldsymbol{k}$$

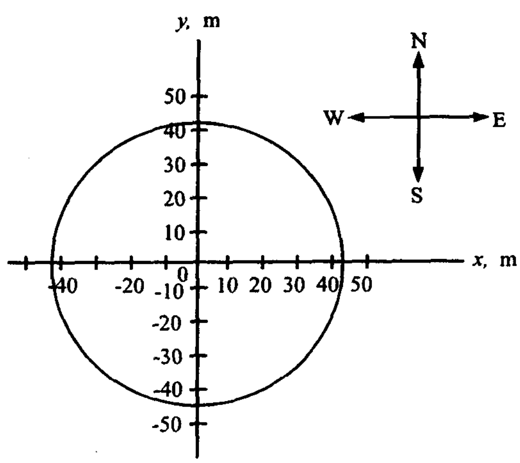


例8图

习题

一、基础训练题

1. 一个慢跑者沿半径 45.0m 的圆形跑道跑步。设 xy 坐标系原点在圆心，$+\boldsymbol{i}$ 指向东，$+\boldsymbol{j}$ 指向北。设 $t=0.0$s 时刻慢跑者的坐标(x,y)为(45.0m, 0.0m)。(1)在 =16.8s 时刻，慢跑者刚好在原点的东北方向，求此时她的位置矢量。(2)$t=33.6$s 时，慢跑者在原点的正北，求在 $t=0.0$s 和 $t=33.6$s 之间 她的位移？(3)求在 $t=0.0$s 和 $t=33.6$s 之间她所跑过的路程。($\boldsymbol{r}=31.8m\boldsymbol{i}+31.8m\boldsymbol{j}$；$\Delta\boldsymbol{r}=-45.0m\boldsymbol{i}+45.0m\boldsymbol{j}$；70.7m)



题1图

2. 在上题中，$t=50.4$s 时，慢跑者正好在原点的西北方向。(1)求此时她的位置矢量。(2)求在 $t=0.0$s 和 $t=50.4$s 之间她的位移。(3)求在 $t=0.0$s 和 $t=50.4$s 之间她跑过的路程。

3.(1)求 1 题中 $t=0.0$s 与 =33.6s 之间慢跑者的平均速度。(2)$t=8.4$s 时她的位置为(41.6m, 17.2m)，$\Delta t=25.2$s 时她的位置为(17.2m, 41.6m)。求在此期间她的平均速度。($\overline{\boldsymbol{v}}=-1.34\text{m/s}\,\boldsymbol{i}+1.34\text{m/s}\,\boldsymbol{j}$；$\overline{\boldsymbol{v}}=-1.45\text{m/s}\,\boldsymbol{i}+1.45\text{m/s}\,\boldsymbol{j}$)

4. 在 1 中慢跑者以 134.4s 的时间跑完一圈，(1)如果她以恒定速率慢跑，求她的速率。(2)求 $t=16.8$s 时她的速度，将答案与 1 题的答案进行比较。

5. 月亮绕地球运行的轨道近似为圆形，半径为 3.85×10^8m，周期为 27.3 天，问月亮相对地球运动的向心加速度数值是多少？

6.(1)地球的半径为 6.37×10^6m，求地球赤道表面一点相对地球中心的向心加速度。以 m/s^2 为单位。(2)地球绕太阳运行的轨道半径为 1.5×10^{11}m，求地球相对太阳的向心加速度。以 m/s^2 为单位。(3)天文测量表明太阳系以近似圆形的轨道绕银河系中心运动，半径约为 2.8×10^{20}m，速率为 2.5×10^5m/s。求太阳系相对银河系的向心加速度，以 m/s^2 为单位。(4)求这些加速度每对的比值。　($3.37\times10^{-2}\text{m/s}^2$；　$5.9\times10^{-3}\text{m/s}^2$；　$2.2\times10^{-10}\text{m/s}^2$)

7. 当某物体在空气中(或其它流体)下落时，由于摩擦的影响，物体的速率逐渐趋于一个终极速率 v_t，假定垂直下落的物体有一加速度分量为

$$a_y = -g + bv^2$$

式中 $b = 0.002\text{m}^{-1}$，求 v_t。（提示：当物体的速率接近终极速率时，它的加速度趋于零）。

8. 抛体的水平射程为48m，它的初速率为33m/s，(1)求抛射角。(2)是否有对应 R 和 v_0 的另一个抛射角？如果有，求角度。如果没有，试解释。(13°;77°)

9. 从阳台上以31m/s的初速度和24°的抛射角掷出一球，掷出点距地面8.2m，求(1)从掷出点到球打在地上的水平距离；(2)从掷出点到球打在地上的直线距离。

二、提高训练题

10. 一物体沿直线运动的加速度为 $a = -kv^2$，k 为一常数。在 $t = 0$ 时 $v = v_0$，求

(1)位移和速度表示为时间的函数。

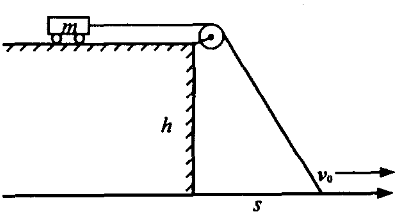
(2)v 是 x 的函数。

11. 高 h 的平台上有一质量为 m 的小车，用绳子跨过滑轮，由地面上的人以匀 v_0 向右拉，当人从平台脚下向右走了 s 距离时，问：

(1)车速 v；$\left(\dfrac{sv_0}{\sqrt{h^2+s^2}}\right)$

(2)车的加速度 a；$\left(\dfrac{v_0^2h^2}{(s^2+h^2)^{3/2}}\right)$

(3)车走过的距离。　$(\sqrt{h^2+s^2}-h)$



题11图

12. 一物以 $v_0 = 20\text{ms}^{-1}$ 被抛出，抛射角 $\alpha_0 = 60°$，略去空气阻力，问：

(1)物体开始运动后的1.5s末，运动方向与水平面的夹角 α 为多少？2.5s末 α 又为多少？

(2)抛出物体后经多少时间其运动方向与水平面成 $\alpha = 45°$ 角，这时物体的高度如何？

(3)在轨迹最高点处及落地点处的曲率半径为多少？

(14.57°, −35.75°, 0.75s。10.2m; 10.2m; 81.5m)

13. 一轮胎在一直线上作无滑滚动，它的中心以恒速率 v 移动，一小石子卡进了胎的花纹中，在 $t = 0$ 时，它和路面接触，求石子的位置、速度、加速度。

$$\left(x = vt - R\sin\frac{vt}{R};\ y = R\left(1 - \cos\frac{vt}{R}\right)\right)$$

14. 已知一质点沿半径为 a 的圆周运动，角速度 $\omega = bt$（b 为常数），试用直角坐标和平面极坐标写出质点的位矢，速度矢量，加速度矢量。

$$\left(\boldsymbol{r} = a\cos\frac{b}{2}t^2\boldsymbol{i} + a\sin\frac{b}{2}t^2\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{r} = a\boldsymbol{r}_0\right)$$

15. 一质点作平面运动，变化规律为 $r = Re^{mt}$，$\theta = nt$（R, m, n 为常量），试求质点运动的速度、加速度。$\boldsymbol{v} = Re^{mt}(m\boldsymbol{r}_0 + n\boldsymbol{\theta}_0)$

16. 半径为 a 的圆盘以角速度 ω 绕其中心轴（过盘心且垂直于圆盘平面的直线）旋转，有一甲虫以速率 u 由盘边缘沿着圆盘的一条直径向盘心爬（ω, u 均为常数），求甲虫的位矢、速度、加速度。$[(a-ut)\boldsymbol{r}_0; -u\boldsymbol{r}_0 + \omega(a-ut)\boldsymbol{\theta}_0; -r\omega^2\boldsymbol{r}_0 - 2u\omega\boldsymbol{\theta}_0]$

17. 在靠近月球表面处以 $\boldsymbol{v}_0 = (0\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k})\text{m/s}$ 投下一球，球以 $\boldsymbol{a} = (0\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k})\text{m/s}^2$ 作加速运动（向下），求它5s后的速度。$(0\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} - 13\boldsymbol{k})$

18. 一人在静水中划船速率4.0km/h，(1)现在他在江中划，江水速率2.0km/h，若他想从岸边出发到达正对岸，应以何方向划行。(2)设江宽4.0km，按上述选定的方向，他要多长时间

渡江？(3)如果他希望最短时间渡江，应向何方向划？[(1)与岸成 60°角逆流方向。(2)1.16h。(3)与岸垂直。]

19. 一宽 d 的河流速与到河岸的距离成正比，在岸处流速为 0，河心处，流速值为 c，一小船以相对速度 u 沿垂直水流方向行驶，求船的轨迹和靠岸点。

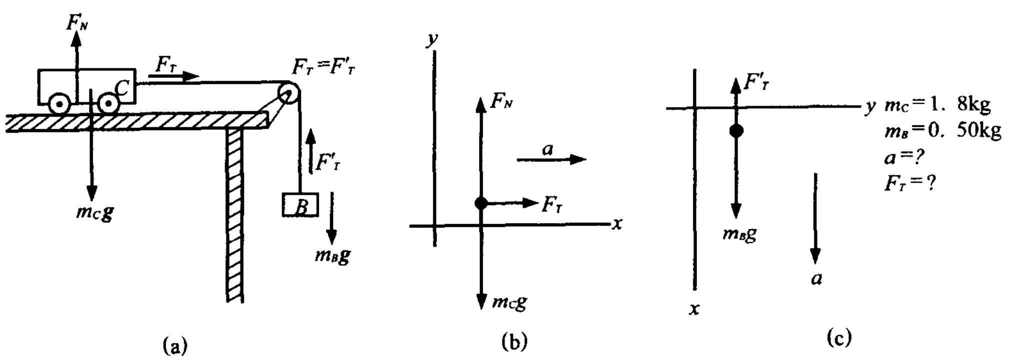
(靠岸点 $x = cd/2u$，$y = d$，原点在船起点)

20. 追踪模型。一个不明飞行体沿一抛物线轨道逃逸 $\begin{cases} x = at^2 + by + x_0 \\ y = ct + y_0 \end{cases}$，现有一自动追踪导弹从初始位置 X, Y_0 出发，随时跟踪并改变自己运动方向直到击中目标，假设导弹运动方向在任何时刻都是正确指向逃逸目标的。试用计算机编程完成这一追踪模型的设计及演示。

第二节 质点动力学

例题

例 1 带有小轮子并润滑良好的小车(质量 $m_C = 1.8\text{kg}$)由跨过滑轮的细绳与木块(质量 $m_B = 0.50\text{kg}$)相连，如图所示。假设滑轮自由旋转，且它的质量小到足以忽略它转动的影响。即，滑轮只改变绳子的方向。因此整条绳子的张力是相同的，绳子对车和对木块施加的力大小等于张力。求(1)车(及木块)的加速度和；(2)绳子的张力。



例1图

解 小车和木块的隔离体图分别为图(b)和(c)。因为小车和木块由绳子相连，它们具有相同的加速度值 a。选定坐标系，使每物体的加速度方向都沿各自坐标系的 $+x$ 方向。根据小车的第二定律 x 分量方程式，得

$$F_T = m_c a \tag{A}$$

F_T 为绳子的张力。根据木块的第二定律 x 分量方程式得

$$m_B g - F_T = m_g a \tag{B}$$

方程(A)和(B)中有两个未知量，为 a 和 F_T。

(1)如果我们将方程 A 和 B 相加，消去 F_T，得

$$m_B g = m_B a + m_C a$$

解 a 得

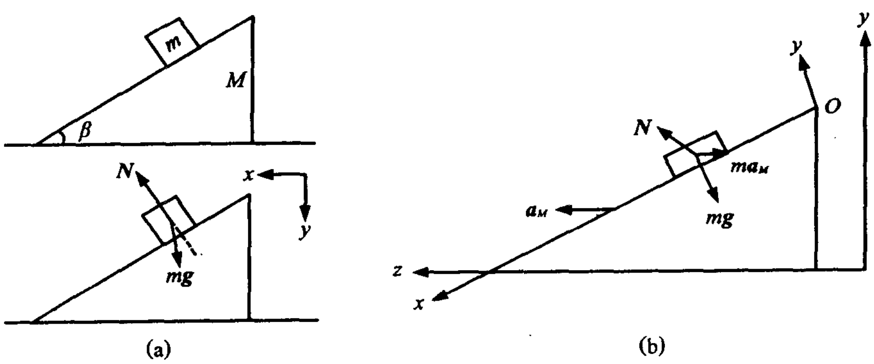
$$a = \frac{m_B}{m_C + m_B} g = \frac{0.50\text{kg}}{1.8\text{kg} + 0.50\text{kg}} \times 9.8\text{m/s}^2 = 2.1\text{m/s}^2$$

(2)将 a 代入方程 A,得

$$F_T = \frac{m_C m_B}{m_C + m_B} g = \frac{(1.8\text{kg})(0.50\text{kg})}{1.8\text{kg} + 0.50\text{kg}} \times 9.8\text{m/s}^2 = 3.8\text{N}$$

上例中当小车和木块质量改变时,研究系统的加速度数值 a。(1)当木块的质量仍保持为 0.5kg 时,小车的质量从 1.8kg 增加到 3.6kg。计算加速度数值。(2)当小车质量保持为 1.8kg 时,木块质量从 0.50kg 增加到 1.00kg。求加速度数值。(3)小车质量增大,加速度减小;而木块质量增大,加速度增加。试解释这一物理现象。答案:(1)1.2m/s^2,(2)3.5m/s^2。(3)当小车质量增大时,系统(车加木块)的惯性增加,但施加在系统上的净力没有增加。当木块质量增大时,系统的惯性增加了。由于惯性较大的因素使施加在系统上的净力增加。

例 2　一质量为 M 的劈,两面夹角 β,放于光滑桌面,又把质量为 m 的物块放于劈上,让 m 下滑(无摩擦)。求(1)M 对地及 m 对 M 的加速度,(2)M,m 之间的正压力。



例 2 图

解法①:用牛顿第二定律

$$m\ddot{x} = N\sin\beta \tag{1}$$

$$m\ddot{y} = mg - N\cos\beta \tag{2}$$

$$M\ddot{X} = -N\sin\beta \tag{3}$$

运动学关系

$$\text{ctg}\beta = \frac{\ddot{x} - \ddot{X}}{\ddot{y}}$$

或

$$\ddot{y} = (\ddot{x} - \ddot{X})\text{tg}\beta \tag{4}$$

其中 $\ddot{x}$,$\ddot{y}$ 及 $\ddot{X}$ 分别为 m 及 M 质心对固定于地面上的坐标 xoy 的加速度。

解得:M 对地

$$\boldsymbol{a}_M = \ddot{X}\boldsymbol{i} = \frac{-m\sin\beta\cos\beta g}{M + m\sin^2\beta}\boldsymbol{i} \qquad (\text{沿负 } x \text{ 向})$$

$$m \text{ 对地 } \boldsymbol{a}_m = (\ddot{x} - \ddot{X})\boldsymbol{i} + \ddot{y}\boldsymbol{j} = \frac{(M+m)\cos\beta\sin\beta}{M + m\sin^2\beta} g(\boldsymbol{i} + \text{tg}\beta\boldsymbol{j}) \qquad (\text{沿斜面})$$

支承力

$$N = \frac{Mm\cos\beta}{M + m\sin^2\beta}g(\sin\beta i - \cos\beta j)$$

(垂直斜面)

解法②:引入非惯性系。

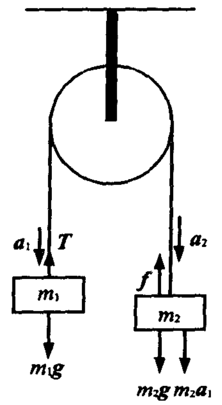
建立原点在 O' 的非惯性坐标系 $xo'y$ 和原点在桌面上的惯性系 XOY。

设 M 有沿 $+X$ 方向的加速度 a_M,则在 $xo'y$ 中 m 受力,N,mg,添上惯性力 $-ma_M$

$$m\ddot{x} = mg\sin\beta - ma_M\cos\beta \qquad (1)$$

$$N = mg\cos\beta + ma_M\sin\beta \qquad (2)$$

$$-N\sin\beta = Ma_M \qquad (3)$$



例3图

解出 $\quad a_{mM} = \ddot{x}, a_m = a_{mM} + a_M = a_m(\cos\beta i - \sin\beta j) + a_M$

i,j 为 XOY 中的单位矢。结果略。

例 3 轻绳跨过一个轴处摩擦可忽略的轻滑轮,左端吊一质量为 m_1 的物体,另一端有质量 m_2 的环以恒定加速度 a'_2 对绳向下滑动。求 m_1 的加速度及环与绳间的摩擦力。

解 由牛顿第二定律

$$m_1g - T = m_1a_1 \qquad (1)$$

$$m_2g - f + m_2a_1 = m_2a'_2 \qquad (2)$$

$$f = T \qquad (3)$$

由(1),(2),(3)可解出

$$a_1 = \frac{(m_1 - m_2)g + m_2a'_2}{m_1 + m_2}$$

$$f = \frac{m_1m_2(2g - a'_2)}{m_1m_2}$$

例 4 如图绳质量及长度变化可忽略,滑轮质量及轴处摩擦可忽略,列运动方程(不解)。

解 以 A 的支架为惯性系研究 m_1。设 m_1(对惯性系)的加速度为 a_1,方向如图。

以 B 的支架为加速参照系研究 m_2, m_3。设 m_2, m_3(对加速系)的加速度大小为 a,方向如图。

在 m_2, m_3 上加惯性力 m_2a_1, m_3a_1。(请注意方向)

运动方程

$$2T - m_1g = m_1a_1$$

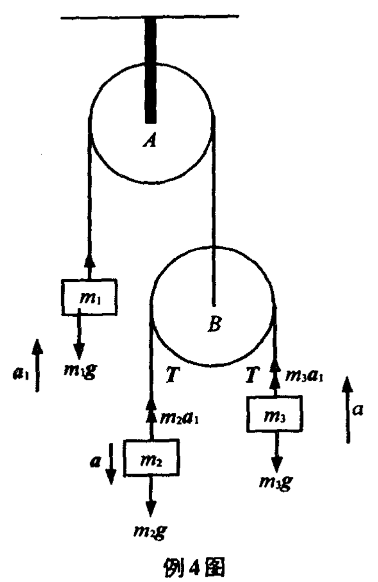
$$m_2g - T - m_2a_1 = m_2a$$

$$T + m_3a_1 - m_3g = m_3a$$

m_2, m_3 对惯性系的加速度大小分别为

$$a_2 = a + a_1 \qquad a_3 = a - a_1$$

例 5 光滑桌面中心有一小孔,桌面上物 A 和轻绳的一端相连,绳另一端穿过小孔。和桌面下的物 B 连接,使它悬于桌下,起初使 B 保持不动,令 A 在恒定半径 r_0 的圆周上以匀角速 ω_0 旋转,在 $t=0$ 时放松 B,则在以后的瞬刻 B 的加速度为多少?



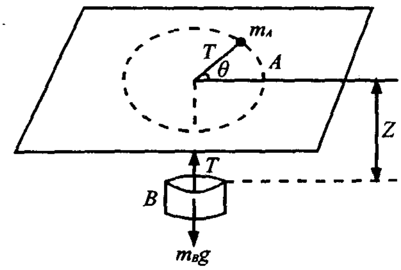
例4图

解　放开瞬刻，A,B 受力如图对 A 采用极坐标，B 采用直角坐标 z。运动方程

$$-T = m_A(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\ \text{径向} \tag{1}$$

$$0 = m_A(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\ \text{径向} \tag{2}$$

$$m_Bg - T = m_B\ddot{z}\ \text{竖直向} \tag{3}$$



例5图

设绳长 L 恒定有：

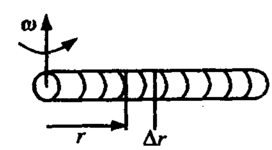
$$\ddot{r} = -\ddot{z} \qquad \ddot{z} = \frac{m_Bg - m_Ar\dot{\theta}^2}{m_A + m_B}$$

重要的一点应领会到，虽然加速度可以即时变化，但速度和位置却不能马上变化，于是紧接着放开 B 后的瞬刻 $r = r_0, \dot{\theta} = \omega_0$

$$\ddot{z}(0) = \frac{m_Bg - m_Ar_0\omega_0^2}{m_A + m_B}$$

例6　均匀绳子质量为 M，长 L，一端拴在转轴上，并以匀角速 ω 旋转。问距轴为 r 处绳子中的张力 T 为多少？（略去重力）

解　考虑在 r 和 $r+\Delta r$ 间的一小段绳子，该小段质量 $\Delta m = M\Delta r/L$，及径向加速度 $-r\omega^2$，故该小段运动方程



例6图

$$T(r+\Delta r) - T(r) = -\Delta m r\omega^2 = -\frac{Mr\omega^2\Delta r}{L}$$

取 $\Delta r \to 0$　　$\dfrac{dT}{dr} = -\dfrac{Mr\omega^2}{L}$

积分：$T(r) = T_0 - \dfrac{M\omega^2}{2L}r^2 \qquad T_0 = T(0)$

由于 $r = L$ 处绳为自由端，这里张力必须为零。

$$T_0 = \frac{1}{2}M\omega^2L \qquad T(r) = \frac{M\omega^2}{2L}(L^2 - r^2)$$

例7　一根绳绕过一圆柱体，绳与柱表面间摩擦系数 μ，绳的一端用大小为 T_0 的力拉住，另一端用力 T 拉，若 T 刚能使绳在圆柱体上滑动，证 $T = T_0e^{\mu\theta}$。

证　将绳的一小段隔离出来。ds 对圆心张角 $d\theta$，受到柱体的正压力 $N(N\perp ds)$，沿半径向外，ds 一端受力 T，另一端 $T+dT$。ds 有沿表面滑动的趋势，柱面的摩擦力阻碍了这种运动（趋势）。设 $T > T_0$ 则 f 方向如图。

建立 $x-y$ 坐标。列 ds 平衡方程，ds 为无限小，故 T 与 $T+dT$ 和 x 轴夹角$\to\frac{1}{2}d\theta$。

$$(T+dT)\cos\frac{1}{2}d\theta - T\cos\frac{1}{2}d\theta - \mu N = 0$$

$$N - T\sin\frac{1}{2}d\theta - (T+dT)\sin\frac{1}{2}d\theta = 0$$

$ds \to 0$ 时

$\sin\frac{1}{2}d\theta \to \frac{1}{2}d\theta \qquad \cos\frac{1}{2}d\theta \to 1 \qquad$ 略去 $dT\cdot d\theta$

$\dfrac{dT}{T} = \mu d\theta \qquad \displaystyle\int_{T_0}^{T}\frac{dT}{T} = \int_0^{\theta}\mu d\theta$

$T = T_0e^{\mu\theta} \qquad (T > T_0)$