北京市职工初中文化补课课本

几何

下册

北京出版社

北京市职工初中文化补课课本

几　　何

下　　册

北　京　出　版　社

北京市职工初中文化补课课本

几　　何

下　　册

北京市工农教育研究室编

*

北 京 出 版 社 出 版

（北京崇文门外东兴隆街 51 号）

新华书店北京发行所发行

北 京 印 刷 二 厂 印 刷

*

1983 年 1 月第 1 版　　1984 年 4 月第 3 次印刷

书号：K 7071·857　　定价：0.32 元

目　　录

第四章　相似三角形

一　成比例的线段

4.1 两条线段的比

用同样的长度单位去量两条线段所得的量数的比，叫做**这两条线段的比**．例如，有两条线段 a 和 b，用长度为 1 厘米的线段作为长度单位去量它们，如果所得的量数分别为 3 和 2，那么线段 a 和 b 的比为

$$a : b = 3:2 \quad 或 \quad \frac{a}{b}=\frac{3}{2}.$$

如果改用长度为 1 米的线段作为长度单位去量它们，所得的量数分别为 0.03 和 0.02，那么线段 a 和 b 的比为

$$a : b = 0.03:0.02 = 3:2 \quad 或 \quad \frac{a}{b}=\frac{0.03}{0.02}=\frac{3}{2}.$$

由这个例子可知：**两条线段的比和所取的长度单位没有关系**．

4.2 成比例的线段

在四条线段中，如果两条线段的比等于另外两条线段的比，那么这四条线段叫做**成比例的线段**．例如，线段 a、b、c、d 中，如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那么线段 a、b、c、d 叫做成比例的线段．式中的线段 a 和 d 叫做**比例外项**．线段 b 和 c 叫做比

例内项.

在线段 a、b、c 中，如果$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$，那么线段 b 叫做线段 a 和 c 的**比例中项.**

4.3 比例的性质

两条线段的比和成比例的线段，都是它们的量数所成的比和比例．因此，关于数的比和比例的一切性质，完全适用于线段的比和成比例的线段．

下面是比和比例的一些重要性质（这里所有的字母都不等于零；以后用于线段时，代表正数）：

1．比例的基本性质　如果$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那么 $ad=bc$；反过来，**如果 $ad=bc$，那么$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.**

由上面的基本性质可以知道，如果 b 是 a 和 c 的比例中项，那么 $b^2=ac$；反过来，如果 $b^2=ac$，那么 b 是 a 和 c 的**比例中项.**

例 1　把 $x^2=ab$ 改写成比例.

解：$\because$　$x^2=ab$，

根据比例的基本性质，得

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{b}.$$

2．反比定理

$$\text{如果}\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\text{，那么}\frac{b}{a}=\frac{d}{c}.$$

3．更比定理

如果$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那么$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$或$\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$.

例 2 求证：**如果比例的两个前项相等，那么两个后项也相等.**

已知：$\frac{a}{b}=\frac{a}{c}$.

求证：$b=c$.

证明：∵ $\frac{a}{b}=\frac{a}{c}$,

∴ $\frac{a}{a}=\frac{b}{c}$(更比定理).

即 $\frac{b}{c}=1$.

∴ $b=c$.

用同样的方法可以证明：**如果比例的两个后项相等，那么两个前项也相等.**

习 题 一

1. 已知a、b、c、d是四条线段，它们的长度如下，判断这四条线段是不是成比例的线段：

   (1) $a=5$尺，$b=3$尺，$c=5$寸，$d=3$寸；

   (2) $a=5\text{ cm}$，$b=2\text{ cm}$，$c=\frac{4}{5}\text{cm}$，$d=1.5\text{ cm}$.

2. 已知$a=2\text{ cm}$，$b=8\text{ cm}$，求a和b的比例中项.

3. 求下列各式中的x：

   (1) $4:x=3:5$；　　(2) $(x+2):x=11:9$；

   (3) $x:3=12:x$；　　(4) $1:x=x:(1-x)$.

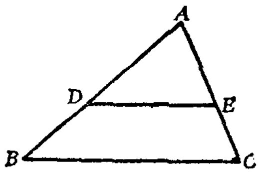
4. 从下列各式求 x 与 y 的比(就是求 $x:y$)；

(1) $y:x=3:2$；　　(2) $\frac{x}{5}=\frac{y}{6}$；

(3) $4y=3x$；　　(4) $m:x=n:y$。

5. 已知：如图，$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$，$AD=3.2\text{ cm}$，$DB=2.4\text{ cm}$，$AE=2\text{ cm}$，求 EC 的长。

6. 已知：如图，$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$，$AD=3.2\text{ cm}$，$BD=2.4\text{ cm}$，$AE=2\text{ cm}$，求 EC 的长。



(第 5、6 题)

4. 合比定理

$$\text{如果}\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\text{，那么}\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}.$$

证明： $\because\ \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，

$\therefore\ \frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$。

$\therefore\ \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$。

5．分比定理

$$\text{如果}\quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d},\ \text{那么}\quad \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}.$$

（学员自己证明）

例 3 已知：在$\triangle ABC$中，直线DE分别交AB、AC于D、E，并且$\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE}{EC}$（图 4-1）。

求证：(1) $\dfrac{AB}{DB}=\dfrac{AC}{EC}$；

(2) $\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{AC}{AE}$.

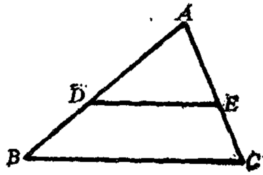


图 4-1

证明：(1) $\because \dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE}{EC}$,

$$\therefore\quad \frac{AD+DB}{DB}=\frac{AE+EC}{EC}\text{（合比定理）}.$$

$$\text{即}\quad \frac{AB}{DB}=\frac{AC}{EC}.$$

(2) $\because \dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE}{EC}$,

$$\therefore\quad \frac{DB}{AD}=\frac{EC}{AE}\text{（反比定理）}.$$

$$\therefore\quad \frac{DB+AD}{AD}=\frac{EC+AE}{AE}\text{（合比定理）}.$$

$$\text{即}\quad \frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}.$$

6．等比定理

$$\text{如果}\quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots,\text{那么}\frac{a+c+e+\cdots}{b+d+f+\cdots}=\frac{a}{b}.$$

证明：设 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots=k$,

则 $a=bk$, $c=dk$, $e=fk$, $\cdots$.

$\because$ $$\frac{a+c+e+\cdots}{b+d+f+\cdots}=\frac{bk+dk+fk+\cdots}{b+d+f+\cdots}$$
$$=\frac{(b+d+f+\cdots)k}{b+d+f+\cdots}=k,$$

$\therefore$ $$\frac{a+c+e+\cdots}{b+d+f+\cdots}=\frac{a}{b}.$$

例 4 已知：$\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{7}$，求：$\frac{x+y+z}{y}$.

解：$\because$ $\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{7}$,

$\therefore$ $\frac{x+y+z}{3+4+7}=\frac{y}{4}$(等比定理).

即 $\frac{x+y+z}{14}=\frac{y}{4}$.

$\therefore$ $\frac{x+y+z}{y}=\frac{14}{4}$ (更比定理).

即 $\frac{x+y+z}{y}=\frac{7}{2}$.

例 5 已知：$\triangle ABC$ 的周长为 6 cm，D、E 分别在AB、AC 上，并且$\frac{AB}{AD}=\frac{BC}{DE}=\frac{AC}{AE}=\frac{3}{2}$ (图 4 2).

求：$\triangle ADE$ 的周长.

解：$\because$ $\frac{AB}{AD}=\frac{BC}{DE}=\frac{AC}{AE}=\frac{3}{2}$,

$\therefore$ $\frac{AB+BC+AC}{AD+DE+AE}=\frac{3}{2}$(等比定理).

设 $AD+DE+AE=x\,\text{cm}$，

则 $\frac{6}{x}=\frac{3}{2}$.

$\therefore$ $x=\frac{6\times 2}{3}=4$.

答：$\triangle ADE$ 的周长为 4 cm。

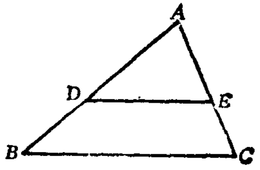


图 4-2

习 题 二

1．已知 $3x-5y=0$. 求：

(1) $x:y$；　　(2) $(x+y):y$；

(3) $(x-y):y$；　　(4) $\frac{x+y}{x-y}$.

2．计算下列各题：

(1) 已知$\frac{x+y}{y}=\frac{7}{3}$，求 $x:y$；

(2) 已知$\frac{x-y}{y}=\frac{2}{3}$，求 $y:x$；

(3) 已知$\frac{a}{7}=\frac{b}{4}$，求$(a-b):b$；

(4) 已知$\frac{x}{y}=\frac{4}{5}$求$(x+y):x$；

(5) 已知$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{5}{7}$，求$\frac{a+c+e}{b+d+f}$.

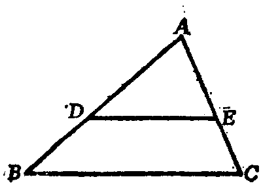
3．已知$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}$，求$\frac{x+y+z}{z}$.

4．已知：如图，$\triangle ABC$ 中，D、E 分别在 AB、AC 上，并且 $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$.

求证：(1) $\frac{AB}{AC}=\frac{AD}{AE}$；

(2) $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$；

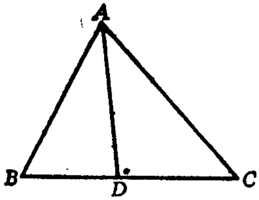
(3) $\frac{AB}{DB}=\frac{AC}{EC}$.



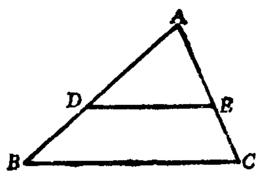
(第 4 题)

5. 已知：如图，$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$，$AB=2.8\text{ cm}$，$BC=3.6\text{ cm}$，$AC=3.5\text{ cm}$，求：$BD$、$DC$ 的长.

6. 已知：如图，$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$，$AD=3\text{ cm}$，$DB=2\text{ cm}$，$AC=4\text{ cm}$，求：$AE$ 和 EC 的长.



(第 5 题)



(第 6 题)

7. 在四边形 $ABCD$ 与四边形 $A'B'C'D'$ 中，已知：

$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{AD}{A'D'}=\frac{2}{3}$，并且四边形 $ABCD$ 的周长为 12.6 cm，求四边形 $A'B'C'D'$ 的周长.

4.4 平行线截得的比例线段定理

三条平行线截两条直线，所截得的线段对应成比例.

已知：$l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$，$l_1$、$l_2$、$l_3$ 分别截 a 于 A、B、C，截 b 于 D、E、F（如图 4-3）。

求证：$\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{DE}{EF}$.

（证明较繁，从略）

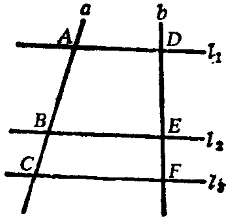


图 4-3

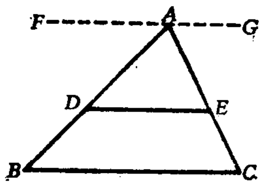


图 4-4

推论　平行于三角形一边的直线截其它两边，所得的线段对应成比例；其中的一边和这边上截得的一条线段以及另一边和另一边上截得的对应线段成比例。

如图 4-4，在$\triangle ABC$ 中，如果 $DE \parallel BC$，那么$\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE}{EC}$，$\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{AC}{AE}$；$\dfrac{AB}{DB}=\dfrac{AC}{EC}$.

定理　如果一条直线截三角形的两边所得的线段对应成比例，那么这条直线平行于三角形的第三边.

已知：$\triangle ABC$ 中，DE 分别交 AB、AC 于 D、E，并且$\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE}{EC}$（如图 4-5）。

求证：$DE \parallel BC$。

证明：过 D 点作 $DE' \parallel BC$ 交 AC 于 E'．那么

$\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE'}{E'C}$（平行于三角形一边的直线截其它两边，所得的线段对应成比例）．

又 $\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE}{EC}$（已知），

$\therefore\ \dfrac{AE'}{E'C}=\dfrac{AE}{EC}$．

于是 $\dfrac{AE'+E'C}{E'C}=\dfrac{AE+EC}{EC}$

（合比定理），

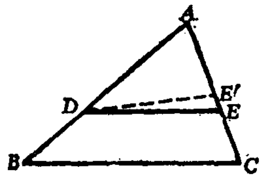


图 4-5

即 $\dfrac{AC}{E'C}=\dfrac{AC}{EC}$．

$\therefore\ E'C=EC$．

因此，E' 点和 E 点重合．

$\therefore\ DE \parallel BC$．

推论 如果一条直线截三角形的两边，其中一边和这边上截得的一条线段与另一边和另一边上截得的对应线段成比例，那么这条直线平行于第三边．

例 1 已知：$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$ED\perp BC$ 于 D，$BD=3$，$DC=2$，$AB=6$（图 4-6）．

求：BE 和 AE．

解：在 $\triangle ABC$ 中，

$\because\ \angle C=90°$，

$\therefore\ AC\perp BC$．

又 $ED\perp BC$，

$\therefore\ ED\parallel AC$．

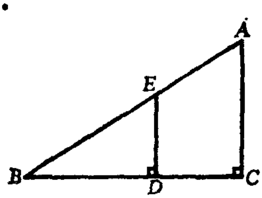


图 4-6

$\therefore \quad \dfrac{BD}{DC}=\dfrac{BE}{EA}$（平行于三角形一边的直线截其它两边，所得的线段对应成比例）。

于是 $\dfrac{3}{2}=\dfrac{BE}{6-BE}$，

$\therefore \quad BE=3\dfrac{3}{5}$.

$$
\begin{aligned}
AE &= AB-BE \\
&= 6-3\frac{3}{5} \\
&= 2\frac{2}{5}.
\end{aligned}
$$

例 2　如图 4-7，已知：$\triangle ABC$ 中，$DE \parallel BC$，$EF \parallel CD$.

求证：AD 是 AF 和 AB 的比例中项。

证明：在$\triangle ABC$ 中，

$\because \quad DE \parallel BC$,

$\therefore \quad \dfrac{AB}{AD}=\dfrac{AC}{AE}$（平行于三角形一边的直线截其它两边，其中的一边和这边上截得的一条线段以及另一边和另一边上截得的对应线段成比例）。

在$\triangle ADC$ 中，同理，得

$\dfrac{AD}{AF}=\dfrac{AC}{AE}$.

$\therefore \quad \dfrac{AB}{AD}=\dfrac{AD}{AF}$.

即　AD 是 AF 和 AB 的比例中项。

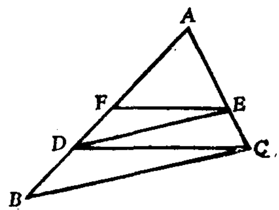


图 4-7

定理 三角形内角的平分线分对边所得的两条线段和这个角的两边对应成比例.

已知：$\triangle ABC$ 中，$\angle 1=\angle 2$(图 4-8)。

求证：$\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{AB}{AC}$.

分析：要证明$\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{AB}{AC}$，只要从$C$点作$AD$ 的平行线交 BA 的延长线于 E，再证明 $AC=AE$ 就可以了.

证明：过C点作 $CE\parallel DA$ 交 BA 的延长线于 E.

$\therefore$ $\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{AB}{AE}$(平行于三角形一边的直线截其它两边，所得的线段对应成比例)。

又 $\angle 1=\angle E$,

$\angle 2=\angle 3$,

但是 $\angle 1=\angle 2$,

$\therefore$ $\angle 3=\angle E$.

则 $AE=AC$.

$\therefore$ $\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{AB}{AC}$.

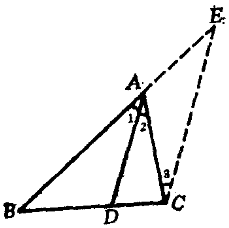


图 4-8

例 3 已知：$\triangle ABC$ 中，D、E、F 分别在 AB、BC、AC 上，且四边形 $ADEF$ 是菱形，$AB=14$，$BC=12$，$AC=10$(图 4-9)．求：BE 和 EC.

解：连结 AE.

$\because$ 四边形 $ADEF$ 是菱形，

$\therefore$ $\angle 1=\angle 2$.

则 $\dfrac{BE}{EC}=\dfrac{AB}{AC}$ (三角形内角的平分线分对边所得的两

条线段和这个角的两边对应成比例)。

于是 $\frac{BE}{12-BE}=\frac{14}{10}$,

$\therefore\quad BE=7$。

$EC=BC-BE$

$=12-7$

$=5$。

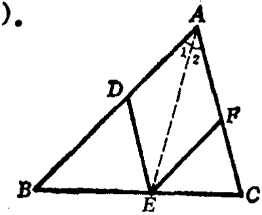


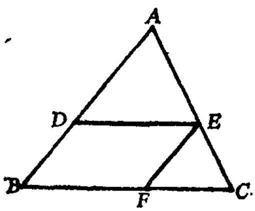
图 4-9

习 题 三

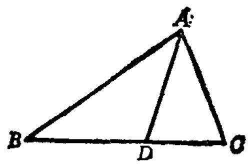
1. 如图，在$\triangle ABC$中，$DE\parallel BC$，$EF\parallel AB$。

求证：$\frac{AD}{DB}=\frac{BF}{FC}$.

2. 如图，在$\triangle ABC$中，AD平分$\angle A$交BC于D，$AB=12$，$BC=13$，$AC=7$。求BD和DC。



(第1题)



(第2题)

3. 如图，$\triangle ABC$中，$AD\perp BC$于D，E为BC之中点，并且$FE\perp BC$交AB于F，$BD=6\,\text{cm}$，$DC=4\,\text{cm}$，$AB=8\,\text{cm}$。求BF和FA的长。

4. 如图，直线PQ经过菱形$ABCD$的顶点C，分别交边