普通高等院校计算机专业（本科）实用教程系列

离散数学结构

习题与解答

王家廞 编

清华大学出版社

普通高等院校计算机专业(本科)实用教程系列

离散数学结构
习题与解答

王家廞 编

清华大学出版社
北 京

内容简介

本书是作者编写的《离散数学结构》一书的习题与解答，对离散数学涉及的各部分内容，从集合、序列、整数除法、矩阵、关系、函数等基础知识到数学结构、图论、群、语言和有限状态机等高级内容，都提供了相应的丰富习题及解答，使读者在学习理论知识的基础上，通过知识的实际运用进一步将其消化、理解，融会贯通，从而在需要时可熟练应用数学知识来解决计算机领域内的实际问题。

本书既可与《离散数学结构》一书配套使用，也可作为独立的习题集使用。

图书在版编目(CIP)数据

离散数学结构习题与解答/王家廞编．—北京：清华大学出版社，2004.9

(普通高等院校计算机专业(本科)实用教程系列)

ISBN 7-302-09190-0

Ⅰ．离…　Ⅱ．王…　Ⅲ．离散数学—高等学校—解题　Ⅳ．O158-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 080725 号

出 版 者：清华大学出版社　　**地　址**：北京清华大学学研大厦

http://www.tup.com.cn　　**邮　编**：100084

社总机：010-62770175　　**客户服务**：010-62776969

组稿编辑：徐培忠

文稿编辑：付弘宇

封面设计：龚正伟

印 刷 者：北京密云胶印厂

装 订 者：三河市李旗庄少明装订厂

发 行 者：新华书店总店北京发行所

开　本：185×260　**印张**：18.5　**字数**：457 千字

版　次：2004 年 9 月第 1 版　2004 年 9 月第 1 次印刷

书　号：ISBN 7-302-09190-0/TP・6468

印　数：1～3000

定　价：26.00 元

前 言

2002年，中国计算机学会、全国高校计算机教育研究会、清华大学出版社共同组织专家和教授，提出了《中国计算机科学与技术学科教程2002》。该教程主要参考了IEEE和ACM推出的"Computing Curricula 2001"，提出了计算机学科的教学计划，包括课程设置、课程结构、课时内容、实验学时等内容。该教程把数学方法作为计算机学科的学科方法之一，要求用数学语言表示事物的状态、关系和过程，建立抽象而严谨的数学模型，通过推导进行解释和判断。

计算机学科的基础理论主要包括数学分析、高等代数、数值分析、概率与统计、集合与图论、近世代数、数理逻辑、形式语言与自动机、数学建模等。这些基础理论可以分为三部分：连续数学、离散数学、计算模型。连续数学部分的代表是数学分析，加之高等代数、概率与统计，这些都是公共基础理论，是所有理工学科的公共基础课。连续数学为物理学等众多学科提供了建模的数学工具，但是不能直接用于建模计算机内部的数据、功能和过程。计算模型部分包括数值分析和数学建模。它将连续数学模型与计算数学模型联系起来，为用计算机解决实际问题建起了桥梁。离散数学部分提供了在计算机内部建立数学模型的数学工具，包括集合论与图论、近世代数、数理逻辑、形式语言与自动机等分支。

由此可见，离散数学在计算机学科基础理论中占有重要地位。它的特点之一是实用性。离散数学是一门数学，但是作为计算机学科的一门基础课程，目的十分明确，就是应用于计算机领域。不仅用于计算机内部的数据，还用于算法和过程，用于系统结构，用于通信和网络；不仅用于硬件系统，还用于软件系统。因此，理论与实践的结合，是离散数学教学中的重点之一。它的另一个特点是综合性。离散数学包括多个彼此独立的数学分支，它们的知识点具有或多或少的联系，但是又自成体系。有机地组合这些数学知识，成为合理、完善的体系，这是离散数学课程在内容组织编排上的要点。课程内容的合理编排必定有助于教师的教学和学生的学习。

近年来，教育主管部门推荐了一批信息领域的英文原版教材，这些教材为我国相关学科的教材建设，提供了很好的参考和借鉴。其中有的原版教材包括了计算机学科需要的离散数学结构知识，并对多个数学分支的知识进行合理的组织。《中国计算机科学与技术学科教程2002》中，相关知识领域的名称也是"离散结构"。用这个名称代替常用的"离散数学"，自有一番用意。这或许表示，该课程不是注重数学知识的系统、完整、严谨，而是注重离散结构需要的数学，也就是计算机需要的数学。离散结构不仅涉及计算机中的数据结构，也涉及算法和程序结构、系统体系结构、通信系统和网络结构。随着信息技术的快速发展，这门课程的内容也在发展和更新。

本书是编者撰写的教材《离散数学结构》的配套资料，提供了该书全部习题和自测题的解答。

《离散数学结构》的基本编著思想是选取计算机学科需要的离散结构的数学知识，并进

行合理的组织。同时关注知识在计算机学科中的应用，注重理论与实际的结合。《离散数学结构》一书中，理论和实际的结合体现在，大量例题和练习都与计算机学科相关。

本书的基本内容为前9章。习题的解答过程中利用了《离散数学结构》中的知识。不同的离散数学教材中，知识的表示形式和采用的符号可能稍有差别，所以，参阅《离散数学结构》一书，有助于理解本书的解答。

编者

2004.8

目　录

第 1 章　基础知识 …… 1

练习 1.1　集合与子集 …… 1

练习 1.2　序列 …… 4

练习 1.3　整数的除法 …… 8

练习 1.4　矩阵 …… 11

练习 1.5　数学结构 …… 16

自测题 1 …… 20

第 2 章　逻辑 …… 24

练习 2.1　命题和逻辑运算 …… 24

练习 2.2　条件命题 …… 28

练习 2.3　证明方法 …… 34

练习 2.4　数学归纳法 …… 36

自测题 2 …… 46

第 3 章　计数 …… 50

练习 3.1　叠加原理 …… 50

练习 3.2　排列 …… 51

练习 3.3　组合 …… 53

练习 3.4　鸽巢原理 …… 55

练习 3.5　概率基础 …… 56

练习 3.6　递归关系 …… 60

自测题 3 …… 63

第 4 章　关系 …… 65

练习 4.1　乘积集合 …… 65

练习 4.2　关系和有向图 …… 66

练习 4.3　关系和有向图中的路径 …… 71

练习 4.4　关系的性质 …… 75

练习 4.5　等价关系 …… 79

练习 4.6　关系的计算机表示 …… 81

练习 4.7　关系的运算 …… 84

练习 4.8　闭包 …… 91

自测题 4 …… 102

第 5 章 函数 …… 107
练习 5.1 函数 …… 107
练习 5.2 计算机科学中的函数 …… 111
练习 5.3 函数的增长 …… 112
练习 5.4 排列函数 …… 116
自测题 5 …… 120

第 6 章 序关系和结构 …… 122
练习 6.1 偏序集合 …… 122
练习 6.2 偏序集合的极值元素 …… 128
练习 6.3 格 …… 132
练习 6.4 有限布尔代数 …… 137
练习 6.5 布尔代数上的函数 …… 141
练习 6.6 电路设计 …… 144
自测题 6 …… 147

第 7 章 树 …… 150
练习 7.1 树 …… 150
练习 7.2 标记树 …… 153
练习 7.3 树搜索 …… 157
练习 7.4 无向树 …… 162
练习 7.5 最小生成树 …… 167
自测题 7 …… 171

第 8 章 图论 …… 177
练习 8.1 图 …… 177
练习 8.2 欧拉路径和回路 …… 178
练习 8.3 哈密尔顿路径及回路 …… 181
练习 8.4 运输网 …… 183
练习 8.5 图着色 …… 206
自测题 8 …… 208

第 9 章 半群和群 …… 212
练习 9.1 二元运算回顾 …… 212
练习 9.2 半群 …… 216
练习 9.3 半群的积和商 …… 221
练习 9.4 群 …… 226

练习 9.5　群的积和商 …… 232
自测题 9 …… 235

第 10 章　语言和有限状态机 …… 238
练习 10.1　语言 …… 238
练习 10.2　语法和语言的表示 …… 241
练习 10.3　有限状态机 …… 244
练习 10.4　半群、机器和语言 …… 250
练习 10.5　机器和正则语言 …… 254
练习 10.6　机器简化 …… 259
自测题 10 …… 265

第 11 章　群和编码 …… 269
练习 11.1　二进制编码和错误检测 …… 269
练习 11.2　解码和纠错 …… 273
自测题 11 …… 284

第1章　基础知识

练习1.1　集合与子集

1. 令 $A=\{1,2,3\}$。下列结论是否成立?

   (1) $2\in A$; (2) $4\in A$; (3) $A\in A$; (4) $\varnothing\in A$; (5) $\{\}\notin A$; (6) $5\notin A$。

解:(1) 成立;(2) 不成立;(3) 不成立;(4) 不成立;(5) 成立;(6) 成立。

2. 令 $A=\{x|x$ 是小于 5 的正整数$\}$。下列结论是否成立?

   (1) $2\in A$; (2) $0\in A$; (3) $-3\in A$; (4) $\varnothing\in A$; (5) $2.5\notin A$; (6) $5\notin A$。

解:(1) 成立;(2) 不成立;(3) 不成立;(4) 不成立;(5) 成立;(6) 成立。

3. 令 $A=\{1,\{2,3\}\}$。下列结论是否成立?

   (1) $2\in A$; (2) $\{2,3\}\in A$; (3) $\{1\}\in A$; (4) $\varnothing\subseteq A$; (5) $\{2,3\}\subseteq A$; (6) $\{1\}\subseteq A$。

解:(1) 不成立;(2) 成立;(3) 不成立;(4) 成立;(5) 不成立;(6) 成立。

4. 令 $A=\{1,2,3\}$。下列结论是否成立?

   (1) $2\in A$; (2) $\{2,3\}\in A$; (3) $\varnothing\in A$; (4) $\varnothing\subseteq A$; (5) $\{1,2,3\}\subseteq A$; (6) $\{3\}\subseteq A$。

解:(1) 成立;(2) 不成立;(3) 不成立;(4) 成立;(5) 成立;(6) 成立。

5. 用列举法列出集合的所有元素。

   (1) 小于 10 的正整数的集合;(2) $\{x|x\in\mathbf{Z}$ 且 $x^2<12\}$。

解:(1) $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$;(2) $\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$。

6. 用$\{x \mid P(x)\}$形式表示下列集合

   (1) $\{2,4,6,8,10\}$; (2) $\{1,8,27,64\}$; (3) $\{-2,-1,0,1,2\}$。

解:(1) $\{x|x=2y$ 且 $y\in\mathbf{Z}$ 且 $0<y<6\}$;

   (2) $\{x|x=y^3$ 且 $y\in\mathbf{Z}$ 且 $0<y<5\}$;

   (3) $\{x|\ x^2<5$ 且 $x\in\mathbf{Z}\}$。

7. 令 $A=\{1,2,3\}$。下列集合中哪些等于 A?

   (1) $\{2,4,3\}$; (2) $\{3,1,2,1\}$; (3) $\{x|x$ 是小于 3 的正整数$\}$ 。

解:(2) $\{3,1,2,1\}=A$。

8. 下列集合中哪些是空集?

   (1) $\{x|x\in\mathbf{R}$ 且 $x^2+1=0\}$; (2) $\{x|x\in\mathbf{R}$ 且 $x^2-1=0\}$;

   (3) $\{x|x\in\mathbf{R}$ 且 $x=x+1\}$; (4) $\{x|x\in\mathbf{R}$ 且 $x=2x+1\}$。

解:(1) $\{x|x\in\mathbf{R}$ 且 $x^2+1=0\}=\varnothing$;

   (3) $\{x|x\in\mathbf{R}$ 且 $x=x+1\}=\varnothing$。

9. 列出$\{1,2\}$的所有子集。

解:$\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1,2\}$。

10. 列出$\{\}$的所有子集。

解：$\varnothing$。

11. 由图 1.1(即教材中的图 1.8)的文氏图确定下列结论是否成立？

(1) $x\in A$；(2) $x\in B$；(3) $y\in B$；(4) $A\subseteq B$；(5) $B\subseteq A$；(6) $C\subseteq B$。

解：(1) 成立；(2) 成立；(3) 不成立；(4) 不成立；(5) 成立；(6) 不成立。

12. 由图 1.2(即教材中的图 1.9)的文氏图确定下列结论是否成立？

(1) $x\in A$；(2) $x\in B$；(3) $y\in A$；(4) $A\subseteq C$；(5) $B\subseteq A$；(6) $C\subseteq B$。

解：(1) 不成立；(2) 成立；(3) 成立；(4) 不成立；(5) 不成立；(6) 不成立。

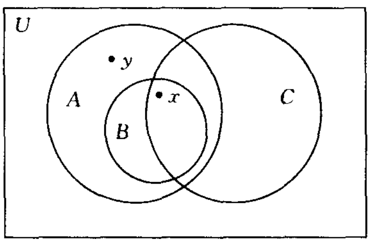


图 1.1

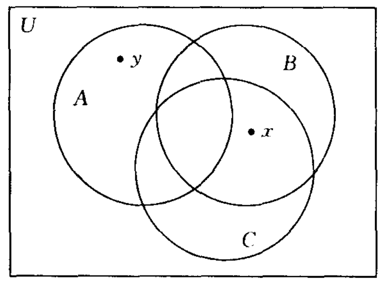
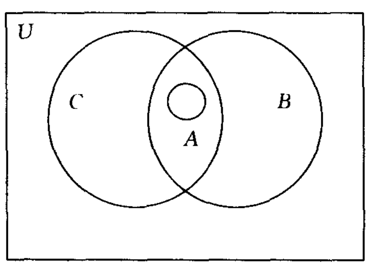


图 1.2

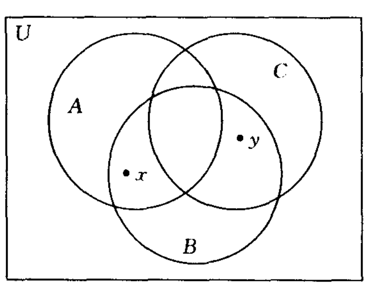
13. 用文氏图表示下列关系：$A\subseteq B$；$A\subseteq C$；$\sim(B\subseteq C)$；$\sim(C\subseteq B)$。

解：



14. 用文氏图表示下列关系：$x\in A$；$x\in B$；$x\notin C$；$y\in B$；$y\in C$；$y\notin A$。

解：



15. $A=\{a,b\}$，给出 $P(A)$，$|A|$，$|P(A)|$。

解：$P(A)=\{\{\},\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$，$|A|=2$；$|P(A)|=4$。

16. $A=\{1,2,3\}$，给出 $P(A)$，$|A|$，$|P(A)|$。

解：$P(A)=\{\{\},\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$，$|A|=3$，$|P(A)|=8$。

17. 如果 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，证明：$A\subseteq C$。

证明：对任意的 $x\in A$，因为 $A\subseteq B$，所以 $x\in B$。又因为 $B\subseteq C$，所以 $x\in C$。

于是，$A\subseteq C$。

18. 如果集合 A 有 n 个子集，集合 B 比 A 多一个元素，$|B|=|A|+1$，证明集合 B 有 $2n$ 个子集。

证明：令集合 B 比 A 多一个元素 x。集合 B 的子集中，不含 x 的 B 的子集，就是集合 A 的子集，共有 n 个。包含 x 的 B 的子集，就是集合 A 的子集分别加上元素 x，也有 n 个。所以，集合 B 有 $2n$ 个子集。

19. 令 $U=\{a,b,c,d,e,f,g\}$，$A=\{a,b,c\}$，$B=\{d,e,f\}$，$C=\{a,c,f\}$，计算：

(1) $A\cup B$；(2) $B\cap C$；(3) $A-C$；(4) $\overline{A}$；(5) $A\oplus C$；(6) $(A\cup C)-B$。

解：(1) $A\cup B=\{a,b,c,d,e,f\}$；(2) $B\cap C=\{f\}$，(3) $A-C=\{b\}$，

(4) $\overline{A}=\{d.e.f.g\}$；(5) $A\oplus C=\{b,f\}$；(6) $(A\cup C)-B=\{a,b,c\}$。

20. 令 $U=\{a,b,c,d,e,f,g\}$，$A=\{a,b,c\}$，$B=\{d,e,f\}$，$C=\{a,c,f\}$，计算：

解：(1) $A\cup C$；(2) $B\cap A$；(3)$B-C$；(4)$\overline{B}$；(5) $B\oplus C$；(6) $(B\cup C)-A$。

(1) $A\cup C=\{a,b,c,f\}$；(2) $B\cap A=\{\}$；(3) $B-C=\{d,e\}$；

(4) $\overline{B}=\{a,b,c.g\}$；(5) $B\oplus C=\{a,c,d,e\}$；(6) $(B\cup C)-A=\{d,e,f\}$。

21. 令 $U=\{1,2,3,4,5,6,7\}$，$A=\{1,3,5\}$，$B=\{2,4,6\}$，$C=\{x\mid x$ 是小于 4 的正整数$\}$，计算：

(1) $\overline{A\cup B}$；(2) $\overline{A}\cup\overline{B}$；(3) $A\cap A$；(4) $A\cap\overline{A}$。

解：(1) $\overline{A\cup B}=\{7\}$；(2) $\overline{A}\cap\overline{B}=\{7\}$；(3) $A\cap A=\{1,3,5\}$；(4) $A\cap\overline{A}=\{\}$。

22. 令 $U=\{1,2,3,4,5,6,7\}$，$A=\{1,3,5\}$，$B=\{2,4,6\}$，$C=\{x\mid x$ 是小于 4 的正整数$\}$，计算：

(1) $\overline{A\cap B}$；(2) $\overline{A}\cup\overline{B}$；(3) $A\cup A$；(4) $A\cup\overline{A}$。

解：(1) $\overline{A\cap B}=\{1,2,3,4,5,6,7\}$；(2) $\overline{A}\cup\overline{B}=\{1,2,3,4,5,6,7\}$；

(3) $A\cup A=\{1,3,5\}$；(4) $A\cup\overline{A}=\{1,2,3,4,5,6,7\}$。

23. 证明：$A\subseteq A\cup B$。

证明：对任意的 $x\in A$，显然有 $x\in A$ 或 $x\in B$，$x\in A\cup B$。于是，$A\subseteq A\cup B$。

24. 证明：$A\cap B\subseteq A$。

证明：对任意的 $x\in A\cap B$，有 $x\in A$ 且 $x\in B$，则 $x\in A$。于是，$A\cap B\subseteq A$。

25. 如果 $A\cup B=A\cup C$，是否 $B=C$ 一定成立？说明原因。

解：不一定。例如，$A=\{a,b\}$，$B=\{a\}$，$C=\{b\}$时，$A\cup B=A\cup C$，但不满足 $B=C$。

26. 如果 $A\cap B=A\cap C$，是否 $B=C$ 一定成立？说明原因。

解：不一定。例如，$A=\{\}$，$B=\{a\}$，$C=\{b\}$时，$A\cap B=A\cap C$，但不满足 $B=C$。

27. 如果 $A\oplus B=A\oplus C$，是否 $B=C$ 一定成立？说明原因。

解：成立。

对任意的 $x\in B$，

① 若 $x\notin A$，则由定义 $x\in A\oplus B$，由已知 $x\in A\oplus C$。

则或者 $x\in A$ 且 $x\notin C$，或者 $x\notin A$ 且 $x\in C$。

$x\in A$ 且 $x\notin C$ 矛盾，只能 $x\notin A$ 且 $x\in C$，于是 $x\in C$。

② 若 $x\in A$，则由定义 $x\notin A\oplus B$，由已知 $x\notin A\oplus C$。

则或者 $x\in A$ 且 $x\in C$，或者 $x\notin A$ 且 $x\notin C$。

$x\notin A$ 且 $x\notin C$ 矛盾，只能 $x\in A$ 且 $x\in C$，于是 $x\in C$。

类似地，对任意的 $x\in C$，有 $x\in B$。

由①，②知，$B=C$ 成立。

28. 如果 $A-B=B-A$，A 和 B 的关系如何？

解：$A=B$。

29. 证明：$A-(A-B)\subseteq B$。

证明：对任意的 $x\in A-(A-B)$，成立 $x\in A$ 且 $x\notin(A-B)$。由 $x\notin(A-B)$，则或者 $x\notin A$，或者 $x\in B$。其中 $x\notin A$ 与已知矛盾，只能是 $x\in B$。于是，$A-(A-B)\subseteq B$。

30. 证明：如果 $A\subseteq B$，$C\subseteq D$，则 $A\cup C\subseteq B\cup D$，$A\cap C\subseteq B\cap D$。

证明：对任意的 $x\in A\cup C$，或者 $x\in A$，或者 $x\in C$。

若 $x\in A$，由 $A\subseteq B$，有 $x\in B$，$x\in B\cup D$；

若 $x\in C$，由 $C\subseteq D$，有 $x\in D$，$x\in B\cup D$。

总之，$A\cup C\subseteq B\cup D$。

对任意的 $x\in A\cap C$，有 $x\in A$ 且 $x\in C$。

对 $x\in A$，由 $A\subseteq B$，有 $x\in B$，对 $x\in C$，由 $C\subseteq D$，有 $x\in D$，于是 $x\in B\cap D$。

总之，$A\cap C\subseteq B\cap D$。

练习 1.2 序　　列

1. 给出对应序列 0，1，0，1，0，1，0，1 的集合。

解：$\{0,1\}$。

2. 给出对应序列 0，2，4，6，8，10，…的集合。

解：$\{0,2,4,6,8,10,\cdots\}$。

3. 给出对应序列 aabbccdd…yyzz 的集合。

解：$\{a,b,c,d,\cdots,y,z\}$。

4. 给出对应序列 abcabcabcabc 的集合。

解：$\{a,b,c\}$。

5. 给出两个序列，使对应该序列的集合是 $\{x,y,z\}$。

解：xyzxyzxyzxyz；xxxyyyzzz。

6. 给出两个序列，使对应该序列的集合是 $\{1,2,3,4\}$。

解：12341234；11223344。

7. 写出序列的前四项，序列的公式是 $a_n=3^n$。

解：3，9，27，81，…

8. 写出序列的前四项，序列的公式是 $b_n=n^2+3n-2$。

解：2，8，16，26，…

9. 写出序列的前四项，序列的公式是 $c_1=2$，$c_n=c_{n-1}+1$。

解：2，3，4，5，…

10. 写出序列的前四项，序列的公式是 $d_1=-2$，$d_n=-2d_{n-1}+1$。

解：$-2, 5, -9, 19, \cdots$

11. 函数 F 递归定义如下，写出 F 的前 6 个值（$n=0,1,2,3,4,5$）。
    $F(0)=0$；$F(1)=1$；$F(n)=2F(n-2)+F(n-1)$；$n>1$。

解：$0,1,1,3,5,11,\cdots$

12. 函数 G 递归定义如下，写出 G 的前 6 个值（$n=0,1,2,3,4,5$）。
    $G(0)=1$；$G(1)=2$；$G(n)=G(n-2)+G(n-1)$；$n>1$。

解：$1,2,3,5,8,13,\cdots$

13. 写出序列 $1,3,5,7,\cdots$ 的公式，指出它是递归的还是显式的。

解：$c_1=1, c_n=c_{n-1}+2$ 是递归的。$c_n=2n-1$ 是显式的。

14. 写出序列 $0,3,8,15,24,\cdots$ 的公式，指出它是递归的还是显式的。

解：$c_n=n^2-1$ 是显式的。

15. 写出序列 $1,-1,1,-1,1,-1,\cdots$ 的公式，指出它是递归的还是显式的。

解：$c_1=1, c_n=c_{n-1}\times(-1)$ 是递归的。$c_n=(-1)^{n+1}$ 是显式的。

16. 写出序列 $0,2,0,2,0,2,\cdots$ 的公式，指出它是递归的还是显式的。

解：$c_1=0, c_n=-(c_{n-1}-1)+1$ 是递归的。$c_n=(-1)^n+1$ 是显式的。

17. 集合 $A=\{x \mid x$ 是实数且 $0<x<1\}$ 是否是有限集合？是否是可数集合？是否是不可数集合？

解：A 是不可数集合。

18. 集合 $A=\{x \mid x$ 是实数且 $x^2+1=0\}$ 是否是有限集合？是否是可数集合？是否是不可数集合？

解：A 是有限集合；是可数集合。

19. 集合 $A=\{x \mid x=4n$ 且 $n\in\mathbf{Z}\}$ 是否是有限集合？是否是可数集合？是否是不可数集合？

解：A 是可数集合，不是有限集合。

20. 集合 $A=\{x \mid x\in\mathbf{Z}$ 且 $x^2<100\}$ 是否是有限集合？是否是可数集合？是否是不可数集合？

解：A 是有限集合、可数集合。

21. 令 $A=\{\mathrm{ab},\mathrm{bc},\mathrm{ba}\}$。下列串是否属于 A^*？
    (1) ababab；(2) abc；(3) abba；(4) abbab.

解：(1) 属于 A^*；(2) 不属于 A^*；(3) 属于 A^*；(4) 不属于 A^*。

22. 令 $A=\{\mathrm{a},\mathrm{bc},\mathrm{cba}\}$。下列串是否属于 A^*？
    (1) abcba；(2) abcaa；(3) abccba；(4) abcbcba。

解：(1) 不属于 A^*；(2) 属于 A^*；(3) 属于 A^*；(4) 不属于 A^*。

23. 利用特征函数证明：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$。

证明：首先证明 $f_{\bar{A}}(x)+f_A(x)=1$。

如果 $f_{\bar{A}}(x)=1$，则 $x\in\overline{A}$，$x\notin A$，则 $f_A(x)=0$。

如果 $f_{\bar{A}}(x)=0$，则 $x\notin\overline{A}$，$x\in A$，则 $f_A(x)=1$。

$f_{\bar{A}}(x)+f_A(x)=1$ 得证。

设 $x\in\overline{A\cup B}$，则 $f_{\overline{A\cup B}}(x)=1$，则 $f_{A\cup B}(x)=0$，由定理 1 得，

$f_A(x)+f_B(x)-f_A(x)f_B(x)=0$，则 $f_A(x)=\dfrac{f_B(x)}{f_B(x)-1}$，$f_B(x)=\dfrac{f_A(x)}{f_A(x)-1}$，

于是不允许 $f_A(x)=1$ 和 $f_B(x)=1$，只有 $f_A(x)=f_B(x)=0$。

则 $F_{A}(x)=f_{B}(x)=1$，由定理 1，$f_{\bar{A}\cap\bar{B}}(x)=f_{\bar{A}}(x)f_{\bar{B}}(x)=1$，$x\in\bar{A}\cap\bar{B}$。

于是$\overline{A\cup B}\subseteq\bar{A}\cap\bar{B}$。类似可证 $\bar{A}\cap\bar{B}\subseteq\overline{A\cup B}$。

则$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$ 得证。

24. 利用特征函数证明：$(A\oplus B)\oplus C=A\oplus(B\oplus C)$。

证明：由定理 1，$f_{A\oplus B}(x)=f_A(x)+f_B(x)-2f_A(x)f_B(x)$。

$$
\begin{aligned}
f_{(A\oplus B)\oplus C}(x)&=f_{(A+B)}(x)+f_C(x)-2f_{(A+B)}(x)f_C(x)\\
&=[f_A(x)+f_B(x)-2f_A(x)f_B(x)]+f_C(x)\\
&\quad-2[f_A(x)+f_B(x)-2f_A(x)f_B(x)]f_C(x)\\
&=f_A(x)+f_B(x)+f_C(x)-2f_A(x)f_B(x)-2f_A(x)f_C(x)\\
&\quad-2f_B(x)f_C(x)+4f_A(x)f_B(x)f_C(x)。
\end{aligned}
$$

类似可证，

$$
\begin{aligned}
f_{(A\oplus B\oplus C)}(x)&=f_A(x)+f_B(x)+f_C(x)-2f_A(x)f_B(x)-2f_A(x)f_C(x)\\
&\quad-2f_B(x)f_C(x)+4f_A(x)f_B(x)f_C(x)。
\end{aligned}
$$

所以，$f_{(A\oplus B)\oplus C}(x)=f_{A\oplus(B\oplus C)}(x)$。$(A\oplus B)\oplus C=A\oplus(B\oplus C)$。

25. 令 $A=\{a,b\}$，说明下列表达式是 A 上的正则表达式。

(1) $(a\vee b^*)(a^*\vee b)$　　(2) $((a^*b\vee b)^*\vee b^*)$

解：(1) $(a\vee b^*)(a^*\vee b)$

由本节定义 7 的 RE2，a 和 b 是正则表达式。

由本节定义 7 的 RE5，a^* 和 b^* 是正则表达式。

由本节定义 7 的 RE4，$(a\vee b^*)$和$(a^*\vee b)$是正则表达式。

由本节定义 7 的 RE3，$(a\vee b^*)(a^*\vee b)$是正则表达式。

(2) $((a^*b\vee b)^*\vee b^*)$

由本节定义 7 的 RE2，a 和 b 是正则表达式。

由本节定义 7 的 RE5，a^* 和 b^* 是正则表达式。

由本节定义 7 的 RE3，a^*b 是正则表达式。

由本节定义 7 的 RE4，$(a^*b\vee b)$是正则表达式。

由本节定义 7 的 RE5，$(a^*b\vee b)^*$ 是正则表达式。

由本节定义 7 的 RE4，$((a^*b\vee b)^*\vee b^*)$是正则表达式。

26. 令 $A=\{+,-,a,b\}$，说明下列表达式是 A 上的正则表达式。

(1) $a+b-(a^*\vee b)$ (2) $((a^*b\vee +)^*\vee -b^*)$

解：(1) $a+b-(a^*\vee b)$

由本节定义 7 的 RE2，a 和 b 和＋和－是正则表达式。

由本节定义 7 的 RE5，a^* 是正则表达式。

由本节定义 7 的 RE4，$(a^*\vee b)$是正则表达式。

由本节定义 7 的 RE3，$a+b-(a^*\vee b)$是正则表达式。

(2) $((a^*b\vee +)^*\vee -b^*)$

由本节定义 7 的 RE2，a 和 b 和 + 和 − 是正则表达式。

由本节定义 7 的 RE5，a^* 和 b^* 是正则表达式。

由本节定义 7 的 RE3，a^*b 是正则表达式。

由本节定义 7 的 RE4，$(a^*b \vee +)$ 是正则表达式。

由本节定义 7 的 RE5，$(a^*b \vee +)^*$ 是正则表达式。

由本节定义 7 的 RE3，$-b^*$ 是正则表达式。

由本节定义 7 的 RE4，$((a^*b \vee +)^* \vee -b^*)$ 是正则表达式。

27. 令 $A=\{a,b,c\}$，判断前面的串是否属于后面的正则表达式对应的正则集合。

(1) ac，a^*b^*c　　(2) abcc，$(abc \vee c)^*$　　(3) aaabc，$((a \vee b) \vee c)^*$

解：(1) ac，a^*b^*c

a^* 对应的正则集合 $\{\Lambda, a, aa, aaa, \cdots\}$；

b^* 对应的正则集合 $\{\Lambda, b, bb, bbb, \cdots\}$；

a^*b^*c 对应的正则集合 $\{c, ac, bc, abc, aac, bbc, \cdots\}$；

所以，ac 属于正则表达式 a^*b^*c 对应的正则集合。

(2) abcc，$(abc \vee c)^*$

abc 对应的正则集合 $\{abc\}$；

$(abc \vee c)$ 对应的正则集合 $\{abc, c\}$；

$(abc \vee c)^*$ 对应的正则集合 $\{\Lambda, c, abc, cabc, abcc, abcabcc, \cdots\}$；

所以，abcc 属于正则表达式 $(abc \vee c)^*$ 对应的正则集合。

(3) aaabc，$((a \vee b) \vee c)^*$

$(a \vee b)$ 对应的正则集合 $\{a, b\}$；

$((a \vee b) \vee c)$ 对应的正则集合 $\{a, b, c\}$；

$((a \vee b) \vee c)^*$ 对应的正则集合 $\{\Lambda, a, b, c, ab, ca, bc, aaabc, abcabcc, \cdots\}$；

所以，aaabc 属于正则表达式 $((a \vee b) \vee c)^*$ 对应的正则集合。

28. 令 $A=\{a,b,c\}$，判定前面的串是否属于后面的正则表达式对应的正则集合。

(1) ac，$a^*b \vee c$　　(2) abab，$(ab)^*c$　　(3) aaccc，$(a^* \vee b)c^*$

解：(1) ac，$a^*b \vee c$

a^* 对应的正则集合 $\{\Lambda, a, aa, aaa, \cdots\}$；

a^*b 对应的正则集合 $\{b, ab, aab, aaab, \cdots\}$；

$a^*b \vee c$ 对应的正则集合 $\{c, b, ab, aab, aaab, \cdots\}$；

所以，ac 不属于正则表达式 $a^*b \vee c$ 对应的正则集合。

(2) abab，$(ab)^*c$

ab 对应的正则集合 $\{ab\}$；

$(ab)^*$ 对应的正则集合 $\{\Lambda, ab, abab, ababab, \cdots\}$；

$(ab)^*c$ 对应的正则集合 $\{c, abc, ababc, abababc, \cdots\}$；

所以，abab 不属于正则表达式 $(ab)^*c$ 对应的正则集合。

(3) aaccc，$(a^* \vee b)c^*$

a^* 对应的正则集合 $\{\Lambda, a, aa, aaa, \cdots\}$；

c^* 对应的正则集合 $\{\Lambda, c, cc, ccc, \cdots\}$；

$(a^* \vee b)$对应的正则集合$\{\Lambda, b, a, aa, aaa, \cdots\}$；

$(a^* \vee b)c^*$对应的正则集合$\{\Lambda, a, b, c, aa, ac, bc, aac, bcc, aaccc, \cdots\}$；

所以，aaccc属于正则表达式$(a^* \vee b)c^*$对应的正则集合。

29. 令$A=\{p,q,r\}$，给出下列正则表达式对应的正则集合。

(1) $(p \vee q)rq^*$　　(2) $p(qq)^*r$

解：(1) $(p \vee q)rq^*$

$(p \vee q)$对应的正则集合$\{p,q\}$；

q^*对应正则集合$\{\Lambda, q, qq, qqq, \cdots\}$；

$(p \vee q)rq^*$对应正则集合$\{pr, qr, prq, qrq, prqq, qrqq, \cdots\}$。

(2) $p(qq)^*r$

qq对应正则集合$\{qq\}$；

$(qq)^*$对应正则集合$\{\Lambda, qq, qqqq, qqqqqq, \cdots\}$；

$p(qq)^*r$对应正则集合$\{pr, pqqr, pqqqqr, pqqqqqqr, \cdots\}$。

30. 令$A=\{p,q,r\}$，给出对应下列正则集合的正则表达式。

(1) $\{00, 010, 0110, \cdots\}$；(2) $\{0, 001, 000, 00001, 00000, 0000001, 0000000, \cdots\}$。

解：(1) 01^*0；

(2) $0 \vee 0(00)^*(00 \vee 01)$。

练习 1.3　整数的除法

1. 对于$m=20$和$n=3$，找到整数q和r，使得$m=qn+r, 0 \leqslant r < n$。

解：$q=6$；$r=2$；$20=6 \times 3+2$。

2. 对于$m=64$和$n=37$，找到整数q和r，使得$m=qn+r, 0 \leqslant r < n$。

解：$q=1$；$r=27$；$64=1 \times 37+27$。

3. 对于$m=3$和$n=22$，找到整数q和r，使得$m=qn+r, 0 \leqslant r < n$。

解：$q=0$；$r=3$；$3=0 \times 22+3$。

4. 对于$m=48$和$n=12$，找到整数q和r，使得$m=qn+r, 0 \leqslant r < n$。

解：$q=4$；$r=0$；$48=4 \times 12+0$。

5. 把828写成素数的幂的乘积，如本节的定理3所示。

解：$828=2^2 \cdot 3^2 \cdot 23$。

6. 把1666写成素数的幂的乘积，如本节的定理3所示。

解：$1666=2 \cdot 7^2 \cdot 17$。

7. 把1125写成素数的幂的乘积，如本节的定理3所示。

解：$1125=3^2 \cdot 5^3$。

8. 把107写成素数的幂的乘积，如本节的定理3所示。

解：$107=107^1$。

9. 对于$a=60$和$b=100$，找到整数s, t和$d=\mathrm{GCD}(a,b)$，使得$d=sa+tb$。

解：100除以60，$100=1 \times 60+40$；

60除以40，$60=1 \times 40+20$；

40 除以 20，$40=2\times20+0$；

所以 $GCD(60,100)=20$，这是最后的非 0 的除数。

$$
\begin{aligned}
GCD(60,100)=20&=60-1\times40\\
&=60-(100-1\times60)\\
&=2\times60-100
\end{aligned}
$$

所以 $s=2,t=-1$。

10. 对于 $a=45$ 和 $b=33$，找到整数 s,t 和 $d=GCD(a,b)$，使得 $d=sa+tb$。

解：45 除以 33，$45=1\times33+12$；

33 除以 12，$33=2\times12+9$；

12 除以 9，$12=1\times9+3$；

9 除以 3，$9=3\times3+0$；

所以 $GCD(45,33)=3$，这是最后的非 0 的除数。

$$
\begin{aligned}
GCD(45,33)=3&=12-1\times9\\
&=12-(33-2\times12)\\
&=3\times12-33\\
&=3\times(45-33)-33\\
&=3\times45-4\times33
\end{aligned}
$$

所以 $s=3,t=-4$。

11. 对于 $a=34$ 和 $b=58$，找到整数 s,t 和 $d=GCD(a,b)$，使得 $d=sa+tb$。

解：58 除以 34，$58=1\times34+24$；

34 除以 24，$34=1\times24+10$；

24 除以 10，$24=2\times10+4$；

10 除以 4，$10=2\times4+2$；

4 除以 2，$4=2\times2+0$；

所以 $GCD(34,58)=2$，这是最后的非 0 的除数。

$$
\begin{aligned}
GCD(34,58)=2&=10-2\times4\\
&=10-2\times(24-2\times10)\\
&=5\times10-2\times24\\
&=5\times(34-24)-2\times24\\
&=5\times34-7\times24\\
&=5\times34-7\times(58-34)\\
&=12\times34-7\times58
\end{aligned}
$$

所以 $s=12,t=-7$。

12. 对于 $a=77$ 和 $b=128$，找到整数 s,t 和 $d=GCD(a,b)$，使得 $d=sa+tb$。

解：128 除以 77，$128=1\times77+51$；

77 除以 51，$77=1\times51+26$；

51 除以 26，$51=1\times26+25$；

26 除以 25，$26=1\times25+1$；

25 除以 1，$25=25\times1+0$；