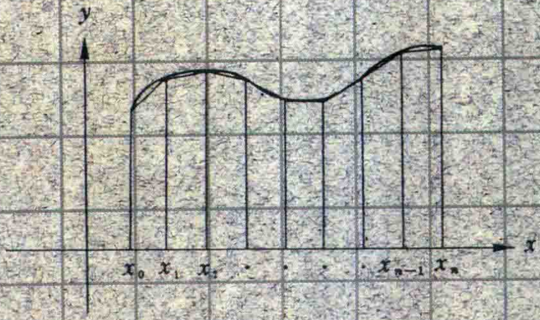
$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2n}\left(f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\cdots\cdots+2f(x_{n-1})+f(x_n)\right)$$

高數題庫

3650

數值方法

$$(x-c)^2+\cdots\cdots+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n+\cdots$$



牛頓出版公司

數 值 方 法

方程式的近似解(題號 1～13)

1. 勘根定理

若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 內連續，且 $f(a)f(b)<0$，則 $f(x)=0$ 在 (a, b) 內至少存在一解。

2. 賈憲-霍納法之解法步驟

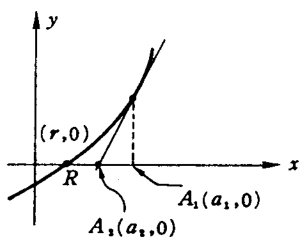
(1) 用勘根定理，求得 $f(x)$ 之實根所在位置。

(2) 設一實根介於 a, b 之間，可寫成 $a<x_0<b$，
則令 $x_0=a+x_1$，且 $0<x_1<1$。
由於 $f(x_0)=0$，將 x_0用 $a+x_1$ 代入，則得到 $f(x_1)$ 之函數。

(3) 由於 $0<x_1<1$，把閉區間 $[0, 1]$ 分成 $[0, 0.1]$，$[0.1, 0.2]$, ……, $[0.9, 1]$ 等十個小區間，再次利用勘根定理，求出 x_1 屬於十個小區間的那一個。

(4) 同步驟(3)再細分，由勘根定理找出實根之位置，重複類似(2)～(3)之步驟，照前面過程繼續進行，可得出 x_0 的更多位正確值。

3. 牛頓法的解法步驟



(1) 在 x 軸上選任意一點 $A_1(a_1, 0)$

(2) 求經過$(a_1, f(a_1))$之切線方程式，可由直線點斜式

$\Rightarrow \quad y=f'(a_1)(x-a_1)+f(a_1)$

(3) 求此切線與x軸之交點 $A_2(a_2, 0)$

令 $y=0$ $\Rightarrow$ 此點坐標爲 $\left(a_1-\dfrac{f(a_1)}{f'(a_1)}, 0\right)$

即 $a_2=a_1-\dfrac{f(a_1)}{f'(a_1)}$

(4) 同理：$a_2=a_1-\dfrac{f(a_1)}{f'(a_1)}$，$a_3=a_2-\dfrac{f(a_2)}{f'(a_2)}$ ……

$\Rightarrow$ $a_2, a_3,$ ……必定愈來愈接近 r

(5) 定理

設$f(x)$ 在 $[a, b]$ 內連續，$f(a)f(b)<0$，

若於 (a, b) 內 $f'(x), f''(x)$不變號

令 $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

where

① $f'(x)f''(x)>0$ 時，$x_0=b$

② $f'(x)f''(x)<0$ 時，$x_0=a$，

則 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=c$ 存在，且 $f(c)=0$

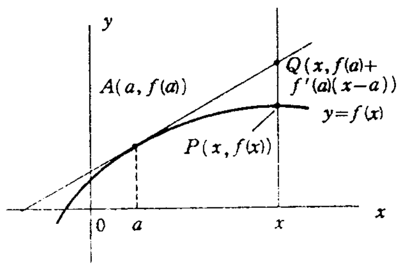
◉ 一次、二次近似與泰勒展開式(題號 14～36)

1. 一次近似

(1) 若實函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 處可微分，則因

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$$

故當 x 很接近 a 時，可以選 $f'(a)$ 做爲 $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 的近似值。其幾何意義如下圖：



(2) 進一步可以說：

當 x 很接近 a 時，$f(x)$ 很接近 $f(a)+f'(a)(x-a)$，故可選 $f(a)+f'(a)(x-a)$ 爲 $f(x)$ 的近似值。

(3) 函數 $f(a)+f'(a)(x-a)$ 稱爲函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 附近的一次近似。

2. 二次近似

(1) 當實函數 $f(x)$ 有二階導函數時，$f(x)$ 在 $x=a$ 附近的二次近似值選取爲

$$f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2$$

即當 x 很接近 a 時，選取

$$f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2$$

之值做爲 $f(x)$ 的近似值。

(2) 一般而言，由二次近似的方法求得的近似值比用一次近似的方法所求得的近似值，誤差比較小。

3. 泰勒展開式

設 $f(x)$ 爲定義在 $[a, b]$ 內一函數，且 $f'(x), f''(x), \cdots\cdots, f^{(n)}(x),\ f^{(n+1)}(x)$ 具連續性，則 $f(x)$ 可表成一 n 次多項式函數及一餘數項之和，亦即

$$\begin{aligned} f(x) &= P_n(x)+R_n(x) \\ &= f(c)+\frac{f'(c)}{1\,!}(x-c)+\frac{f''(c)}{2\,!}(x-c)^2+\cdots \\ &\quad \cdots+\frac{f^{(n)}(c)}{n\,!}(x-c)^n+\int_c^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n\,!}dt \end{aligned}$$

4. 常用的泰勒展開式

(1) $\ln x=(x-1)-\dfrac{(x-1)^2}{2}+\dfrac{(x-1)^3}{3}-\dfrac{(x-1)^4}{4}+\cdots\cdots,$

$0<x\leq 2$

(2) $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\cdots\cdots$

(3) $\ln(1-x)=-x-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}-\cdots\cdots$

(4) $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2\,!}+\dfrac{x^3}{3\,!}+\cdots\cdots \quad , x\in R$

(5) $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3\,!}+\dfrac{x^5}{5\,!}-\dfrac{x^7}{7\,!}+\cdots\cdots \quad , x\in R$

(6) $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2\,!}+\dfrac{x^4}{4\,!}-\dfrac{x^6}{6\,!}+\cdots\cdots \quad , x\in R$

5. 重根定理

設 $f(x)=0$ 爲 n 次方程式，則

(1) 若 α 爲 $f(x)=0$ 之二重根 $\Leftrightarrow f(\alpha)=f'(\alpha)=0$

(2) 若 α 爲 $f(x)=0$ 之三重根 $\Leftrightarrow f(\alpha)=f'(\alpha)=f''(\alpha)=0$

(3) 若 α 爲 $f(x)=0$ 之 n 重根 $\Leftrightarrow f(\alpha)=f'(\alpha)=\cdots\cdots$

$$=f^{(n-1)}(\alpha)=0$$

$$f^{(n)}(\alpha)\neq 0$$

◉ 平方根的近似求法(題號 37～51)

1. 傳統開平方根法

傳統開平方根法是利用 $(a+b)^2=a^2+(2a+b)b$ 之公式，一位數一位數地求下去(先決定 a 再決定 $b\cdots\cdots$)：

說明例：$\sqrt{1849}$

$\because \quad 4^2<18<5^2 \Rightarrow 40^2<1849<50^2$

設 $\sqrt{1849}=40+k$

$\Rightarrow \quad 1849=1600+80k+k^2$

$\Rightarrow \quad 249=(80+k)k$

$\because\quad 249 = 80 \times 3 + 9$

$\therefore\quad k = 3$

故 $\sqrt{1849} = 40 + 3 = 43$

上述計算過程可簡化為

$$
\begin{array}{r|l}
 & \ \ 43 \\
\hline
 & 1849 \\
4^2 & 16 \\
\hline
20 \times 4 & \ 249 \\
3 & \\
\cline{1-1}
83 & 249 \\
\hline
 & \quad 0
\end{array}
$$

2. 阿基米得開平方根法

解法原理：

由不等式 $w \pm \dfrac{p}{2w \pm 1} \le \sqrt{w^2 \pm p} \le w \pm \dfrac{p}{2w}$(符號順取)

其中w, p為正數$\begin{cases} (1)\sqrt{w^2 \pm p} < w \pm \dfrac{p}{2w} \text{ 恆成立} \\ (2)\text{若} p < 2w \pm 1,\ w \pm \dfrac{p}{2w \pm 1} < \sqrt{w^2 \pm p} \\ \quad \text{恆成立} \end{cases}$

阿基米得之開平方根法，由於採用左右挾擠，所以通常每使用一次不等式就可得到一位正確值，若反複進行，就可以使近似值之正確位數不斷增加。

說明例：$\sqrt{180}$

$\because\quad 180 = 13^2 + 11$

$\Rightarrow\quad 13 + \dfrac{11}{27} < \sqrt{180} < 13 + \dfrac{11}{26}$

$\Rightarrow\quad 13.407 < \sqrt{180} < 13.432$

若設 $w = 13.4 \ \Rightarrow\ p = 180 - (13.4)^2 = 0.44$

$$\Rightarrow \quad 13.4+\frac{0.44}{27.8}<\sqrt{180}<13.4+\frac{0.44}{26.8}$$

$$\Rightarrow \quad 13.416<\sqrt{180}<13.4164$$

$$\therefore \quad \sqrt{180}=13.416\cdots\cdots$$

3. 牛頓法開平方根

解法原理：

視 $\sqrt{p}$ 爲方程式 $x^2-p=0$ 之根（正根）

設 $f(x)=x^2-$

$\Rightarrow \quad f'(x)=2x,\ f''(x)=2$

$\because \quad f''(x)>0$

設 a_1 爲 $\sqrt{p}$ 之近似值，且 $a_1>\sqrt{p}$，如圖示

$$\Rightarrow \quad a_2=a_1-\frac{f(a_1)}{f'(a_1)}=a_1-\frac{a_1^2-p}{2a_1}=\frac{1}{2}\left(a_1+\frac{p}{a_1}\right)$$

$$\because \quad a_1>\sqrt{p} \ \Rightarrow \ a_1>\frac{p}{a_1}$$

$$\therefore \quad a_1>\frac{1}{2}\left(a_1+\frac{p}{a_1}\right)>\frac{p}{a_1}$$

$$\Rightarrow \quad a_1>a_2>\frac{p}{a_1}$$

$\because \quad a_1\neq\dfrac{p}{a_1}$，利用算術平均大於幾何平均

$$\therefore \quad \frac{1}{2}\left(a_1+\frac{p}{a_1}\right)>\sqrt{a_1\cdot\frac{p}{a_1}}=\sqrt{p}$$

故 $a_2>\sqrt{p}$

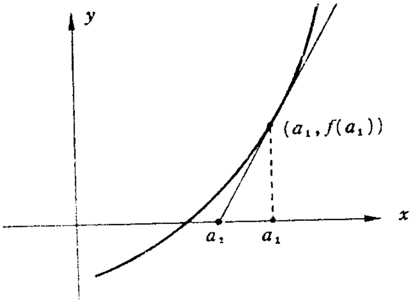
同理

$$a_3=\frac{1}{2}\left(a_2+\frac{p}{a_2}\right)$$

$$a_4=\frac{1}{2}\left(a_3+\frac{p}{a_3}\right)$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{p}{a_n}\right)$$



4. 泰勒展開式求平方根

解法原理：

函數 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $x=w^2$ 附近的一次近似爲

$$f(w^2)+f'(w^2)(x-w^2)=w+\frac{1}{2w}(x-w^2)$$

當 $x\to w^2$，則 $\sqrt{x}\doteqdot w+\frac{1}{2w}(x-w^2)$

設 $x=w^2\pm p \Rightarrow \sqrt{w^2\pm p}\doteqdot w\pm\frac{p}{2w}$

◉ 正餘弦函數值的近似求法(題號 52～67)

1. 正餘弦函數值的古典求法

(1) 利用正三角形的邊上作高，得一直角三角形，各角爲 30°，60°，90°，求 sin60° 的值。

(2) 利用倍角公式，由 $\theta=72°$ 得 $3\theta=360°-2\theta$ 以求 $\sin\theta$ 的值，或利用正十邊形內接於一圓，由其一邊與二半徑所成三角形，求 sin72° 的值。

(3) 利用差角公式，求sin12° 的值。

(4) 利用半角公式，求sin6°， sin3°， sin1°30′， sin45′的值。

(5) 利用內插法，求 sin1° 的值。

(6) 利用半角公式，求 sin30′的值。

由上列步驟，再依和角、倍角公式，求得間隔爲30′的正弦函數值表。

2. 利用泰勒展開式求正餘弦函數的近似值

(1) $\sin x$ 在 $x=0$ 附近的 n 次近似(即 n 次泰勒展開式)爲

① 當 $n=2k-1$ 或 $n=2k$ 時

$$P_n(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\cdots+(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}$$

② 誤差公式爲

$|\sin x - P_{2k-1}(x)|$

$= |\sin x - P_{2k}(x)| < \frac{1}{(2k+1)!}|x|^{2k+1}$

(2) $\cos x$在$x=0$附近的n次近似(即n次泰勒展開式)爲

① 當 $n=2k$ 或 $2k+1$ 時

$Q_n(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$

② 誤差公式爲

$|\cos x - Q_{2k}(x)|$

$= |\cos x - Q_{2k+1}(x)| < \frac{1}{(2k+2)!}|x|^{2k+2}$

(3) 精確度

設 r 是 a 的近似值，若 r 與 a 的誤差小於 $\frac{1}{2} \times 10^{-n}$，

亦即 $|a-r| < \frac{1}{2} \times 10^{-n}, n \in N$

則稱 r 精確到小數第 n 位。

◉ 對數的近似求法 (題號 68～79)

1. 化乘除爲加減

(1) 當 $x = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots, \frac{1}{2048}$ 時，10^x的五位精確值爲

$10^{\frac{1}{2}} = 3.16228,\ 10^{\frac{1}{4}} = 1.77828,\ 10^{\frac{1}{8}} = 1.33352$

$10^{\frac{1}{16}} = 1.15478,\ 10^{\frac{1}{32}} = 1.07461,\ 10^{\frac{1}{64}} = 1.03663$

$10^{\frac{1}{128}} = 1.01815,\ 10^{\frac{1}{256}} = 1.00904,\ 10^{\frac{1}{512}} = 1.00451$

$10^{\frac{1}{1024}} = 1.00225,\ 10^{\frac{1}{2048}} = 1.00112,\ 10^{\frac{1}{4096}} = 1.00056$

(2) 正實數 x 介於 1 與 10 之間，將 x 表爲 $10^{\Sigma\frac{1}{2^k}} \cdot a$，

其中 k 爲正整數，$1 < a < 1.00056$ 可得

$\log x = \Sigma \frac{1}{2^k} + \log a$

$\because$ $\log a$ 的值很接近於 0，可取 $\Sigma\frac{1}{2^k}$ 作爲 $\log x$ 的近似值。

2. 利用泰勒展開式求對數的近似值

(1) $\ln(1+x)$在 $x=0$ 附近的 n 次泰勒展開式爲

$$P_n(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$

(2) 誤差公式爲

$$|\ln(1+x)-P_n(x)|<\frac{x^{n+1}}{n+1}\quad(\text{當}0\leq x\leq 1)$$

(3) 根據理論，當 $-1<x\leq 1$ 時，$P_n(x)$才會趨近$\ln(1+x)$，方可以做爲 $\ln(1+x)$ 的近似公式。

若只限於 $0\leq x\leq 1$，即$P_n(x)$做爲 $\ln(1+x)$ 的近似公式時的誤差公式可用

$$|\ln(1+x)-P_n(x)|<\frac{1}{n+1}x^{n+1}$$

(4) 若 $x>1$，要計算 $\ln(1+x)$ 的近似值，可將 $1+x$ 表示成 $2^m(1+y)$ 的形式，其中 $0\leq y<1$，則

$\ln(1+x)=m\ln 2+\ln(1+y)$

其中 $\ln 2=0.6931471806$，而 $\ln(1+y)$ 可用 $P_n(y)$ 計算。

3. 利用泰勒展開式求 e^x 值

(1) e^x 在 $x=0$ 附近的 n 次泰勒展開式爲

$$P_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}$$

(2) 誤差公式：

① $|e^x-P_n(x)|<\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$，當 $x<0$

② $|e^x-P_n(x)|<\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$，當 $x>0$

◉ 定積分的近似求法(題號 80～101)

1. 矩形法

設函數 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 內連續，若將區間 $[a,\ b]$ 等分成 n 等分，且 $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$，並設 $x_0=a,\ x_1=a+\Delta x,$ $x_2=a+2\Delta x,\ \cdots\cdots,\ x_n=b$，則

(1) 左端點矩形法

$$\int_a^b f(x)dx=\Delta x\sum_{i=1}^{n}f(x_{i-1})$$
$$=\Delta x\Big[f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)+\cdots\cdots+f(x_{n-1})\Big]$$

(2) 右端點矩形法

$$\int_a^b f(x)dx=\Delta x\sum_{i=1}^{n}f(x_i)$$
$$=\Delta x\Big[f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+\cdots\cdots+f(x_n)\Big]$$

(3) 中點矩形法

$$\int_a^b f(x)dx$$
$$=\Delta x\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)$$
$$=\Delta x\left[f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)+f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+\cdots+f\left(\frac{x_{n-1}+x_n}{2}\right)\right]$$

2. 梯形法

設函數 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 內連續，若將區間 $[a,\ b]$ 等分成 n 等分，且 $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$，

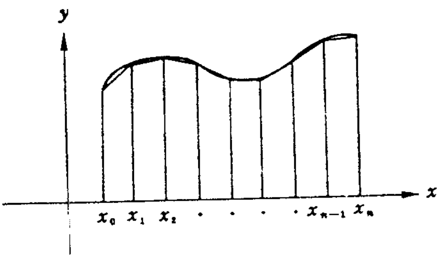
並設 $x_0=a,\ x_1=a+\Delta x,\ x_2=a+2\Delta x,\ \cdots\cdots,\ x_n=b$，則

$$\int_a^b f(x)dx$$

$$\doteqdot \frac{1}{2}\Big[f(x_0)+f(x_1)\Big]\Delta x+\frac{1}{2}\Big[f(x_1)+f(x_2)\Big]\Delta x+\cdots\cdots$$

$$+\frac{1}{2}\Big[f(x_{n-1})+f(x_n)\Big]\Delta x$$

$$=\frac{1}{2}\Big[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\cdots\cdots+2f(x_{n-1})+f(x_n)\Big]\Delta x$$



3. 辛浦森法（拋物線法）

設$f(x)$在$[a, b]$上可積分，將$[a, b]n$等分，設分點爲$a=x_0, x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n=b$，則拋物線法近似值爲

$$\int_a^b f(x)dx \doteqdot \sum_{i=1}^{n}\frac{b-a}{6n}\left[f(x_{i-1})+4f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)+f(x_i)\right]$$

$$=\frac{b-a}{n}\left\{\frac{1}{6}\Big[f(x_0)+f(x_n)\Big]+\frac{1}{3}\Big[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{n-1})\Big]\right.$$

$$\left.+\frac{2}{3}\left[f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)+f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+\cdots\cdots+f\left(\frac{x_{n-1}+x_n}{2}\right)\right]\right\}$$

1 理下 一 ★★

用賈憲-霍納法求 $3x^4-5x^3-31=0$ 的實根的近似值，求到小數後第二位。

【詳解】 令 $f(x)=3x^4-5x^3-31$

$\because$ $f(2)=3\cdot 2^4-5\cdot 2^3-31=-23<0$

$\because$ $f(3)=3\cdot 3^4-5\cdot 3^3-31=77>0$

$\Rightarrow$ $f(2)\cdot f(3)<0$

$\therefore$ 有一實根介於 2 與 3 之間

令 $x_0=2+x_1$，又 $f(2+x_1)=0$

$\therefore$ $3x_1^4+19x_1^3+42x_1^2+36x_1-23=0$

令 $g(x)=3x^4+19x^3+42x^2+36x-23$

$\because$ $g(0.4)=-0.5872<0$

$\because$ $g(0.5)=8.0625>0$

再令 $x_1=0.4+x_2$，又 $g(0.4+x_2)=0$

$\therefore$ $3x_2^4+23.8x_2^3+67.68x_2^2+79.488x_2-0.5872=0$

令 $h(x)=3x^4+23.8x^3+67.68x^2+79.488x-0.5872$

$\because$ $h(0)=-0.5872<0$

$\because$ $h(0.01)=0.2144718>0$

$\therefore$ $x_0=2+0.4+0.00\cdots\cdots=2.40\cdots\cdots$

故 $x=2.40\cdots\cdots$即為所求

2 理下 一 ★★

用牛頓法求 $x^2+2x-4=0$ 正實根的近似值至小數點後有三位正確。

【詳解】 (1) 令 $f(x)=x^2+2x-4, f'(x)=2x+2, f''(x)=2$

$\because\ f(1)=-1<0, f(2)=4>0$

$\therefore\ x^2+2x-4=0$ 有一根介於 1 與 2 之間

(2) 取 $a_1=2$，由

$$a_2=a_1-\frac{f(a_1)}{f'(a_1)}=2-\frac{4}{6}=\frac{4}{3}=1.3$$

$$a_3=\frac{4}{3}-\frac{f\left(\frac{4}{3}\right)}{f'\left(\frac{4}{3}\right)}=\frac{4}{3}-\frac{\frac{9}{4}}{\frac{14}{3}}=\frac{26}{21}$$

$$=1.2380952\cdots\cdots\cdots$$

$$a_4=\frac{26}{21}-\frac{f\left(\frac{26}{21}\right)}{f'\left(\frac{26}{21}\right)}=1.2360689\cdots\cdots\cdots$$

$\because\ f(1.236)=-0.000304<0$

$\because\ f(1.237)=0.004169>0$

故知 $x=1.236$ 爲 $x^2+2x-4=0$ 的正實根，

其小數點後有三位正確

3 理下 一 ★★

試以賈憲-霍納法求方程式 $x^3+x-7=0$ 實根的近似值，使所得近似根的小數點後面的兩位數正確。

【詳解】 (1) $x^3+x-7=0$ 沒有有理根(用牛頓公式判別)

(2) 令 $f(x)=x^3+x-7$，則 $f'(x)=3x^2+1$ 恆爲正，即 $y=f(x)$ 爲嚴格遞增函數

$\therefore$ $f(x)=0$最多僅有一個實根

(3) $\because$ $f(1)=-5<0, f(2)=3>0$

$\therefore$ $f(x)=0$有一實根 x_0 介於 1 與 2 間

$$\begin{array}{rrrr|l}
1 & +0 & +1 & -7 & 1 \\
 & +1 & +1 & +2 & \\
\hline
1 & +1 & +2 & ,-5 & \\
 & +1 & +2 & & \\
\hline
1 & +2, & 4 & & \\
 & +1 & & & \\
\hline
1, & 3 & & &
\end{array}$$

(4) x_0爲方程式 $x^3+x-7=0$ 之根，$1<x_0<2$,

令 $x_0=1+x_1$，其中 $0<x_1<1$

$(1+x_1)^3+(1+x_1)-7=0$

$\Rightarrow$ $x_1^3+3x_1^2+4x_1-5=0$

即 x_1 爲 $g(x)=x^3+3x^2+4x-5=0$ 之一根

(5) $\because$ $0<x_1<1$

$g(0.7)=-0.387<0, g(0.8)=0.632>0$

$\therefore$ $0.7<x_1<0.8$，令 $x_1=0.7+x_2, 0<x_2<0.1$

$(0.7+x_2)^3+3(0.7+x_2)^2+4(0.7+x_2)-5=0$

$\Rightarrow$ $x_2^3+5.1x_2^2+9.67x_2-0.387=0$

即 x_2 爲 $h(x)=x^3+5.1x^2+9.67x-0.387=0$ 之一根

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & +3 & +4 & -5 & \underline{0.7} \\ & +0.7 & +2.59 & +4.613 & \\ \hline 1 & +3.7 & +6.59, & -0.387 & \\ & +0.7 & +3.08 & & \\ \hline 1 & +4.4, & 9.67 & & \\ & 0.7 & & & \\ \hline 1, & 5.1 & & & \end{array}$$

(6) $\because\ 0<x_2<0.1 \quad \left(x_2=\dfrac{0.387}{9.67}\doteqdot 0.04\right)$

$h(0.03)=-0.092283<0 \quad h(0.04)=0.008024>0$

$\therefore\ 0.03<x_2<0.04$

令 $x_2=0.03+x_3$，其中 $0<x_3<0.01$

由以上各過程知

$x_0=1+x_1=1+0.7+x_2=1+0.7+0.03+x_3=1.73+x_3$

故所求實根近似值爲 $x=1.73$

4 理下 一 ★★

利用賈憲-霍納法，求方程式 $x^3-3x+1=0$ 的負實根的近似值，使所得近似根小數點後面有二位正確。

【詳解】 (1) $f(x)=x^3-3x+1$

$\because\ f(-1)=3, f(-2)=-1$，

令 $f(x)=0$ 之負實根爲 x_0，則 $-2<x_0<-1$，

令 $x_0=-2+x_1\ (0<x_1<1)$, x_0 爲 $x^3-3x+1=0$ 之根

$\therefore\ (-2+x_1)^3-3(-2+x_1)+1=0$

即 $x_1^3-6x_1^2+9x_1-1=0$

故 x_1 爲方程式 $g(x)=x^3-6x^2+9x-1=0$ 之根

$$\begin{array}{rrrr|l}
1 & +0 & -3 & +1 & \underline{-2} \\
 & -2 & +4 & -2 & \\ \hline
1 & -2 & +1, & -1 & \\
 & -2 & +8 & & \\ \hline
1 & -4, & 9 & & \\
 & -2 & & & \\ \hline
1, & -6 & & &
\end{array}$$

(2) 令 $g(x)=x^3-6x^2+9x-1$, $0<x_1<1$ 爲 $g(x)=0$ 之根

$g(0.1)=-0.159$, $g(0.2)=0.568$

$\therefore \quad 0.1<x_1<0.2$

令 $x_1=0.1+x_2$, （但 $0<x_2<0.1$ ）

$(0.1+x_2)^3-6(0.1+x_2)^2+9(0.1+x_2)-1=0$

$\therefore \quad x_2{}^3-5.7x_2{}^2+7.83x_2-0.159=0$

$\dfrac{0.159}{7.83}\doteqdot 0.02$ 　令 $h(x)=x^3-5.7x^2+7.83x-0.159$

$h(0.02)=-0.004672$, $h(0.03)=0.070797$

$\therefore \quad 0.02<x_2<0.03$

$\therefore \quad x_2=0.02+x_3 \ (0<x_3<0.01)$

$$\begin{array}{rrrr|l}
1 & -6 & +9 & -1 & \underline{0.1} \\
 & +0.1 & -0.59 & +0.841 & \\ \hline
1 & -5.9 & +8.41, & -0.159 & \\
 & +0.1 & -0.58 & & \\ \hline
1 & -5.8, & 7.83 & & \\
 & +0.1 & & & \\ \hline
1, & -5.7 & & &
\end{array}$$